UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 8

Abgabe: Dienstag, 12.06.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(2+2+2+2=8 Punkte)**

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, wobei $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} x \leq 0, \operatorname{Im} x = 0\}$ gilt. Sei die Potenz mit komplexen Exponenten $z^w := \exp(w \log z)$ für $w \in \mathbb{C}$ definiert.

(a) Beweisen Sie, dass $\log(ab) = \log a + \log b$ ist.

(b) Berechnen Sie i^i und $i^{\frac{1}{\log i}}$.

(c) Zeigen Sie, dass $z^c \cdot z^d = z^{c+d}$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $a^w \cdot b^w = (a \cdot b)^w$ gilt.

Aufgabe 2 **(5+5=10 Punkte)**

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

(a) Zeigen Sie, dass jede nullstellenfreie, holomorphe Funktion auf G eine Wurzel hat, d. h. zu jedem nullstellenfreien $f \in \mathcal{O}(G)$ existiert ein $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $f = g^2$.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines nicht einfach zusammenhängenden Gebiets G und einer nullstellenfreien Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ an, derart dass $f \neq g^2$ für alle $g \in \mathcal{O}(G)$ gilt.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Sei X ein metrischer Raum. Zwei stetige, geschlossene Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ heißen *homotop* in X, falls eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1]^2 \to X$ - eine *Homotopie* - existiert mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\gamma(0,t) = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0,1]$,

(ii) $\gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$,

(iii) $\gamma(s,1) = \gamma(s,0)$ für alle $s \in [0,1]$.

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und seien γ_0 und γ_1 zwei stetige, geschlossene, in Ω homotope Wege. Zeigen Sie:

$$n(\gamma_0, z) = n(\gamma_1, z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

(Hinweis: Für eine zugehörige Homotopie $\gamma : [0,1]^2 \to X$ sei $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$. Überlegen Sie, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ die Funktion $[0,1] \ni s \mapsto n(\gamma_s, z)$ lokal konstant ist.)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(2+2+2+3+3=12 Punkte)**

Wir definieren Funktionen $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ und $\psi : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i} \quad \text{und} \quad \psi(z) := i\frac{1+z}{1-z}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ bzw. $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) φ und ψ sind holomorph und invers zueinander.

(b) $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

(c) $\operatorname{Im} \psi(z) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(d) $\psi(\mathbb{D}) = \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$.

(e) Berechnen Sie $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$.

Aufgabe 5* **(3+3=6 Punkte)**

Seien Γ_1 und Γ_2 Ketten von stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Wegen in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass gilt

(a) $n(\Gamma_1 + \Gamma_2, u) = n(\Gamma_1, u) + n(\Gamma_2, u) \quad$ für $u \notin \operatorname{Spur}(\Gamma_1) \cup \operatorname{Spur}(\Gamma_2)$.

(b) $n(-\Gamma_1, u) = -n(\Gamma_1, u) \quad$ für $u \notin \operatorname{Spur}(\Gamma_1)$.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html`