



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie  
Sommersemester 2007

Blatt 9

**Abgabe:** Dienstag, 19.06.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder  
bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1**

(3x3=9 Punkte)

Seien  $\Omega_1, \Omega_2$  zwei nicht leere, offene Teilmengen von  $\mathbb{C}$ . Eine Abbildung  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  heißt *biholomorph*, falls sie eine holomorphe und bijektive Funktion ist, deren Umkehrabbildung ebenfalls holomorph ist. Gibt es eine biholomorphe Abbildung  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , so nennen wir  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  *biholomorph äquivalent*.

- (a) Zeigen Sie, dass zwei biholomorph äquivalente Gebiete entweder beide einfach zusammenhängend oder beide nicht einfach zusammenhängend sind.
  - (b) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$  nicht biholomorph äquivalent sind.
  - (c) Geben Sie ein unbeschränktes zu  $\mathbb{D}$  biholomorph äquivalentes Gebiet an.
- 

**Aufgabe 2**

(3x3=9 Punkte)

Die Funktion  $f$  sei gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$$

( $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, 3\}$ ). Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von  $f$

- (a) im Kreisring  $1 < |z| < 3$ .
  - (b) im Kreisring  $1 < |z-2| < 3$ .
  - (c) um den Entwicklungspunkt  $z_0 = 1$ , die im Punkt  $1 + 3i$  konvergiert.
- 

**Aufgabe 3**

(4x3=12 Punkte)

Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und geben Sie im Falle eines Pols dessen Ordnung an:

- (a)  $\frac{z}{\exp(z^2) - 1}$ .
  - (b)  $\frac{\cos z - 1}{z^2}$ .
  - (c)  $z \cot^2 z$ .
  - (d)  $\exp\left(\sin \frac{1}{z}\right)$ .
- 

Bitte wenden!

**Aufgabe 4****(5+5=10 Punkte)**

Sei  $a \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist  $a$  ein Pol der Ordnung  $m$  für  $f'$ , so ist  $m \geq 2$  und  $f$  hat einen Pol der Ordnung  $m - 1$  in  $a$ .
  - (b) Ist  $f'$  hebbar in  $a$ , so ist auch  $f$  hebbar in  $a$ .
- 

**Aufgabe 5\*****(3x2=6 Punkte)**

Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

(a)  $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^3}$ .

(b)  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ .

(c)  $f(z) = z \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$ .

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

[www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html](http://www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html)