UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 10

Abgabe: Dienstag, 26.06.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(3x4=12 Punkte)**

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes den Wert der folgenden Integrale:

(a) $$\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz.$$

(b) $$\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,dz.$$

(c) $$\int_{\gamma} \frac{z}{\cosh z - 1}\,dz,$$ wobei γ der positiv orientierte Rand der Menge

$$\{x+iy : y^2 < (4\pi^2-1)(1-x^2)\} \text{ ist.}$$

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $A \subset G$ diskret. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{O}(G \setminus A)$ genau dann eine komplexe Stammfunktion auf $G \setminus A$ besitzt, wenn $\operatorname{Res}(f,z) = 0$ für alle $z \in A$ gilt.

Aufgabe 3 **(4+4=8 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+5}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2-2x+2}\,dx.$$

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für $\lambda > 1$ die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der rechten Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ genau eine Lösung hat, die überdies reell ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(4 Punkte)**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5 - 4\cos t}\, dt.$$

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html`