UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 11

Abgabe: Dienstag, 03.07.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(3x3=9 Punkte)**

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Bereich:

(a) $z^4 - 4z + 2$ in $D_1(0)$.

(b) $z^5 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$ auf $\mathbb{D}$.

(c) $z^5 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$ auf $U_{\frac{1}{2}}(0)$.

Aufgabe 2 **(5+5=10 Punkte)**

Sei $G := \left\{ z \in \mathbb{D} : |ze^{1-z}| > 1 \right\}$ (vergleiche Abbildung 2 in Kapitel 6). Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ gibt es eine Folge von Polynomen, die auf G kompakt gegen f konvergiert.

(b) Geben Sie eine auf einer Umgebung von $\overline{G}$ holomorphe Funktion an, die *nicht* gleichmäßig auf $\overline{G}$ durch Polynome approximierbar ist.

Aufgabe 3 **(9 Punkte)**

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine kompakt konvergente Folge von auf G holomorphen, nullstellenfreien Funktionen. Zeigen Sie, dass die nach dem Satz von Weierstraß auf G holomorphe Grenzfunktion f dann entweder identisch auf G verschwindet oder ebenfalls keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4 **(3x4=12 Punkte)**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial_+ D(0,\pi)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

mit

(a) $f(z) = \sin(\pi z)$.

(b) $f(z) = \cos(\pi z)$.

(c) $f(z) = \tan(\pi z)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 5* (Wiederholungsaufgabe) **(6 Punkte)**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f_{|G}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant ist, wenn $f(\partial G) \subset \mathbb{R}$ gilt.

Informationen zur Klausur

- Aus organisatorischen Gründen müssen Sie sich zur Hauptklausur anmelden. Die Anmeldung erfolgt in den Übungen in der Woche vom 02.07.2007 bis zum 06.07.2007. Zur Nachklausur ist automatisch jeder angemeldet, der die Hauptklausur nicht bestanden hat bzw. wer trotz Zulassung und Anmeldung nicht mitgeschrieben hat. Zusätzlich müssen sich alle Studierende im Bachelorstudiengang Mathematik für die Klausuren beim Prüfungssekretariat (Geb. E2 4, Zi. 103) anmelden. Der Anmeldezeitraum hierfür geht vom 25.06.2007 bis zum 29.06.2007.