UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 12

Abgabe: Dienstag, 10.07.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(6+5=11 Punkte)**

(a) Leiten Sie eine Partialbruchzerlegung für $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$ her.

(b) Zeigen Sie

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(1-2n)(1+2n)}.$$

Aufgabe 2 **(6+3+3=12 Punkte)**

Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ und sei

$$\Omega := \{n_1 w_1 + n_2 w_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Zeigen Sie: Die *Weierstraßsche $\wp$-Funktion*

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

konvergiert kompakt auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

(b) Berechnen Sie $\wp'$ und folgern Sie, dass

$$\wp'(z+w) = \wp'(z)$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, w \in \Omega$ gilt.

(c) Schließen Sie aus (b), dass

$$\wp(z+w) = \wp(z)$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, w \in \Omega$ gilt.

Aufgabe 3 **(7+4=11 Punkte)**

Sei $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, derart dass $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ gilt.

Gilt dies auch noch, wenn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n) \neq 0$ nicht mehr gefordert wird?

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Wiederholungsaufgabe) **(3x2=6 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D_2(0)} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz.$

(b) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,dz.$

(c) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz.$

Aufgabe 5* (Wiederholungsaufgabe) **(6 Punkte)**

Sei $R > 1$ und sei $f : D_R(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \pi\left(f(0) + \frac{f'(0)}{2}\right)$$

gilt.

Informationen zur Übung am 11.07.2007

- Die Übung am Mittwoch, den 11.07.2007 fällt leider aus. Eine Ersatzübung findet am Dienstag, den 10.07.2007 von 16-18 Uhr im Hörsaal III der Mathematik statt.