



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2007

Blatt 13

Abgabe: Dienstag, 17.07.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder
bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1

(4+5=9 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - nz^n)$$

auf \mathbb{D} kompakt gegen eine auf \mathbb{D} holomorphe Funktion f konvergiert.

- (b) Zeigen Sie, dass jeder Punkt der Einheitskreislinie Häufungspunkt der Nullstellenmenge von f ist.
-

Aufgabe 2

(10 Punkte)

Zeigen Sie, dass gilt

$$\cos(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2} \right).$$

Aufgabe 3

(5+6=11 Punkte)

- (a) Seien $a, z \in \mathbb{D}$ mit $a \neq 0$, und sei $|z| \leq r < 1$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left| \frac{a + |a|z}{(1 - \bar{a}z)a} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

- (b) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Zeigen Sie: Das unendliche Produkt

$$B(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

konvergiert kompakt auf \mathbb{D} gegen eine beschränkte holomorphe Funktion. Was sind die Nullstellen von B ?

Aufgabe 4 (Wiederholungsaufgabe)

(5+5=10 Punkte)

- (a) Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $f = cg$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq 1$ gilt.

Bitte wenden!

(b) Bestimmen Sie alle Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft

$$\log |f(z)| \leq 2 \operatorname{Re}(z^2 + 1)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) \neq 0$.

Aufgabe 5* (Wiederholungsaufgabe)

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die Laurententwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

auf den Mengen $R_{1,\infty}(1)$ und $R_{0,1}(0)$.

Informationen zu den Klausuren

- Dies ist das letzte bewertete Übungsblatt zur Funktionentheorie. Sie sind zur Haupt- bzw. Nachklausur zugelassen, wenn Sie die folgenden Bedingungen erfüllt haben:
 - durchgehende Anwesenheit in den Übungsgruppen (außer in begründeten Ausnahmefällen),
 - ernsthafte Bearbeitung von mindestens 75 % der Übungsaufgaben,
 - mindestens 50 % der möglichen Übungspunkte,
 - aktive Mitarbeit in den Übungsgruppen; d.h. Vorstellung der von Ihnen erarbeiteten Lösungen.
- Die Hauptklausur findet am Montag, den 23.07.2007 von 9-12 Uhr und die Nachklausur am Mittwoch, den 17.10.2007 von 9-12 Uhr, in den Hörsälen der Mathematik statt.
- In der Woche vor der Klausur wird es am schwarzen Brett einen Aushang mit allen zu der Klausur zugelassenen Teilnehmern und der Raumverteilung für die Klausur geben.
- Zur Nachklausur ist automatisch jeder angemeldet, der die Hauptklausur nicht bestanden hat bzw. wer trotz Zulassung und Anmeldung nicht mitgeschrieben hat. Wollen Sie Ihre Note aus der Hauptklausur verbessern, so können Sie auch an der Nachklausur teilnehmen. In diesem Fall müssen Sie sich aber bis spätestens 08.10.2007 entweder bei Natalie Marx in Zimmer 225 in Gebäude E2 4 oder per Mail an marx@math.uni-sb.de anmelden. Schreiben Sie die Haupt- und die Nachklausur mit, so wird die bessere der beiden Noten gewertet.