

Funktionentheorie

Ernst Albrecht



Vorlesung im Sommersemester 2007

Universität des Saarlandes

Saarbrücken

Stand: 3. November 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0.	Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.	3
Kapitel 1.	Komplexer Differentialkalkül und die komplexe Form des Greenschen Satzes	10
Kapitel 2.	Grundlegende Eigenschaften holomorpher Funktionen	27
Kapitel 3.	Lokale Existenz von Stammfunktionen	38
Kapitel 4.	Folgen und Reihen holomorpher Funktionen	43
Kapitel 5.	Windungszahlen und eine allgemeinere Fassung des Cauchyschen Integralsatzes	53
Kapitel 6.	Laurentreihen, isolierte Singularitäten und der Residuenkalkül	64
Kapitel 7.	Der Approximationssatz von Runge	84
Kapitel 8.	Meromorphe Funktionen und der Satz von Mittag-Leffler	88
Kapitel 9.	Der Produktsatz von Weierstraß	96
Kapitel 10.	Holomorphe Funktionen als Abbildungen	107
Kapitel 11.	Die Γ -Funktion	115
Kapitel 12.	Die Riemannsche Zetafunktion	128
	Literaturverzeichnis	134
	Index	136

KAPITEL 0

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Wir erinnern zunächst an den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Versieht man den $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen der komponentenweise definierten Addition

$$+ : ((x, y), (u, v)) \mapsto (x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

und der durch

$$\cdot : ((x, y), (u, v)) \mapsto (x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

definierten Multiplikation, so ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper, der üblicherweise mit $\mathbb{C}$ bezeichnet wird und Körper der komplexen Zahlen genannt wird. Das neutrale Element der Addition ist $(0, 0)$ (wieder mit 0 bezeichnet) und das Einselement des Körpers $\mathbb{C}$ ist $(1, 0)$ (was wir auch wieder mit 1 bezeichnen). Dabei ist für $(0, 0) \neq z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ das bezüglich der Multiplikation zu z inverse Element z^{-1} gegeben durch

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Man rechnet leicht nach, daß $\mathbb{C}$ tatsächlich aller Körperaxiome erfüllt.

Die komplexe Zahl $i := (0, 1)$ heißt die *imaginäre Einheit*. Für diese gilt $i^2 = -(1, 0) = -1$. Die in $\mathbb{R}$ nicht lösbare Gleichung $X^2 + 1 = 0$ besitzt also in $\mathbb{C}$ eine Lösung. Vermöge der Einbettung $x \mapsto (x, 0)$ wird $\mathbb{R}$ zu einem Teilkörper von $\mathbb{C}$.

Da $\{(1, 0), (0, 1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{R}^2$ ist, besitzt jedes Element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy,$$

wobei wir die obige Identifikation von $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ verwenden. Wir nennen $\{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ die *reelle Achse* und $\{(0, x); x \in \mathbb{R}\}$ die *imaginäre Achse* in der komplexen Zahlenebene.

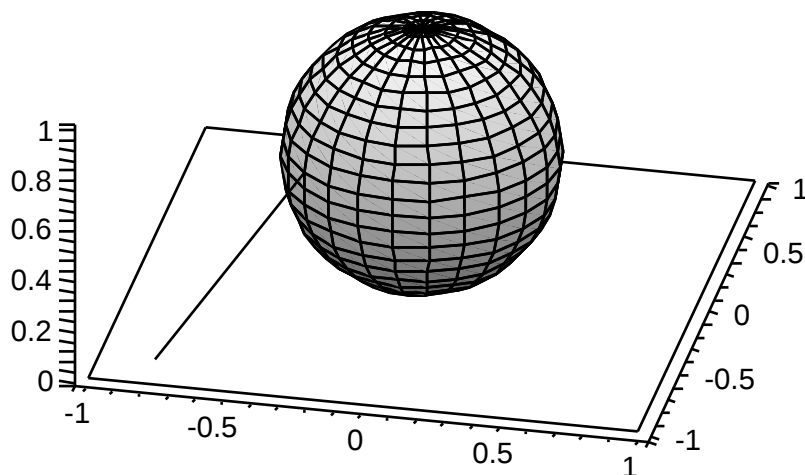
Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) gegeben, so heißt

- $\operatorname{Re} z := x$ der *Realteil* und
- $\operatorname{Im} z := y$ der *Imaginärteil* von z sowie
- $\bar{z} := x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Die Abbildungen $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind offensichtlich reell-linear. Geometrisch gesehen ist $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gerade die Spiegelung an der reellen Achse. Man rechnet ferner nach, daß $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) gilt. Insbesondere folgt für $0 \neq z \in \mathbb{C}$: $z^{-1} = |z|^{-2} \bar{z}$.

Sei (X, d) ein *metrischer Raum*, d.h. eine nicht leere Menge X , die mit einer *Metrik* $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ versehen ist, so daß also die folgenden Aussagen gelten:

- (M1) Für alle $x, y \in X$ ist $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (M2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- (M3) $\forall x, y \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).



h

ABBILDUNG 1. Zur stereographischen Projektion

Eine Teilmenge Ω von X heißt bekanntlich *offen*, wenn zu jedem $x \in \Omega$ ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(x) := \{y \in X ; d(x, y) < \delta\} \subseteq \Omega$.

Wir versehen $\mathbb{C}$ wie üblich mit der durch den euklidischen Betrag gegebenen Metrik

$$d(z, w) = |z - w| \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

Durch Hinzunahme eines *uneigentlichen Punktes* ∞ werden wir nun $\mathbb{C}$ in einen kompakten metrischen Raum einbetten.

DEFINITION 0.1. Wir nennen $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die *Einpunktkompaktifizierung* der komplexen Ebene. Eine Menge $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ heiße *offen* in $\widehat{\mathbb{C}}$, falls $\Omega \cap \mathbb{C}$ offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist und falls im Fall $\infty \in \Omega$ gilt : $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist kompakt in $\mathbb{C}$

Wir vereinbaren im folgenden $1/\infty = 0$ und $1/0 = \infty$. Ist $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen in $\widehat{\mathbb{C}}$, so auch $\tilde{\Omega} := \{1/z ; z \in \Omega\}$.

Wir zeigen nun mit Hilfe der *stereographischen Projektion* wie man $\widehat{\mathbb{C}}$ mit der Struktur eines kompakten metrischen Raums versehen kann (vergl. Aufgabe 0.2). Wir betrachten hierzu die komplexe Zahlenebene als x_1 - x_2 -Ebene im $\mathbb{R}^3$ und legen auf diese die Sphäre

$$\mathbb{S} := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Der Südpol dieser Sphäre ist also gerade der Ursprung $(0, 0, 0)$ und der Nordpol der Punkt $x_\infty := (0, 0, 1)$. Als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist $\mathbb{S}$ bezüglich der euklidischen Betragsmetrik im $\mathbb{R}^3$ kompakt. Wir nennen $\mathbb{S}$ die *Riemannsche Zahlenkugel*.

Ist $z \in \mathbb{C}$ so trifft die Verbindungsgerade von x_∞ nach $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, 0)$ die Sphäre $\mathbb{S}$ in genau einem weiteren Punkt $\varphi(z) \in \mathbb{S}$. Umgekehrt gibt es zu jedem $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}$ genau ein $\psi(x) \in \mathbb{C}$, so daß $(\operatorname{Re} \psi(x), \operatorname{Im} \psi(x), 0)$ der Schnittpunkt der Geraden durch x_∞ und x mit der x_1 - x_2 -Ebene ist. Man berechnet (vergl. Aufgabe 0.2 (a))

$$\varphi(z) = \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}, \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

und

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}.$$

Man rechnet nach daß die hierdurch definierten Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S} \setminus \{x_\infty\} \quad \text{und} \quad \psi : \mathbb{S} \setminus \{x_\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$$

stetig und invers zueinander sind. Somit können wir $\mathbb{C}$ identifizieren mit $\mathbb{S} \setminus \{x_\infty\}$. Eine Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$ ist offen genau dann, wenn $\varphi(\Omega)$ offen ist in $\mathbb{S} \setminus \{x_\infty\}$, versehen wir mit der durch den euklidischen Betrag im $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik. Wir definieren noch $\varphi(\infty) := x_\infty$ und $\psi(x_\infty) := \infty$.

Versehen mit der *chordalen Metrik*

$$d_c : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, \infty) \quad (z, w) \mapsto d_c(z, w) := |\varphi(z) - \varphi(w)|$$

ist nun $\widehat{\mathbb{C}}$ ein kompakter metrischer Raum, der $\mathbb{C}$ als offene Teilmenge enthält. $\mathbb{C}$ versehen mit der auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ eingeschränkten chordalen Metrik besitzt die gleichen offenen Mengen wie $\mathbb{C}$ versehen mit der Betragsmetrik. Für die chordale Metrik berechnet man:

$$d_c(z, w) = d_c(w, z) = \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

und

$$d_c(z, \infty) = d_c(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

(vergl. Aufgabe 0.2 (b)).

Wir benötigen für die Vorlesung einige weitere Hilfsmittel aus der Topologie. Insbesondere gehen wir auf die verschiedenen Zusammenhangsbegriffe ein.

DEFINITION 0.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (a) X heißt *zusammenhängend*, falls X und die leere Menge $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
- (b) $G \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, falls $(G, d|_{G \times G})$ als metrischer Raum zusammenhängend ist.
- (c) $G \subseteq X$ heißt *Gebiet*, falls G offene und zusammenhängende Teilmenge von X ist.
- (d) (X, d) heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen stetigen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.
- (e) $G \subseteq X$ heißt *wegzusammenhängend*, falls $(G, d|_{G \times G})$ als metrischer Raum wegzusammenhängend ist.

LEMMA 0.3. *Jeder wegzusammenhängende metrische Raum (X, d) ist auch zusammenhängend.*

BEWEIS. Ist (X, d) nicht zusammenhängend, so gibt es eine nicht leere offene und abgeschlossene Teilmenge A von X , für die $X \setminus A$ nicht leer ist. Dann ist auch $X \setminus A$ offen und abgeschlossen. Insbesondere gibt es Punkte $u \in A$ und $v \in X \setminus A$.

Annahme: Es gibt eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = u$ und $\gamma(b) = v$. Dann sind die Mengen $\gamma^{-1}(A)$ und $\gamma^{-1}(X \setminus A)$ als Urbilder von abgeschlossenen Mengen unter der stetigen Abbildung γ ebenfalls abgeschlossen. Ferner $a \in \gamma^{-1}(A)$ und $b \in \gamma^{-1}(X \setminus A)$. Also existiert $c := \min \gamma^{-1}(X \setminus A)$ und es gilt $\gamma(c) \in X \setminus A$ sowie $\gamma([a, c)) \subseteq A$. Wegen $\gamma(t) \rightarrow \gamma(c) \in \overline{A} = A$ für $t \rightarrow c$ ergibt dies einen Widerspruch. Daher kann X nicht wegzusammenhängend sein. $\square$

Bekanntlich heißt $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein *Intervall*, falls I von der Gestalt $[a, b]$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$, $(a, b]$ mit $-\infty \leq a < b < \infty$, $[a, b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ oder (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ist.

LEMMA 0.4. Für $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- (a) I ist ein Intervall.
- (b) I ist wegzusammenhängend.
- (c) I ist zusammenhängend.

BEWEIS. Ist I ein Intervall so enthält I mit je zwei Punkten auch die Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten. Somit ist I wegzusammenhängend. Nach Lemma 0.3 gilt (b) $\implies$ (c). Zu zeigen ist also nur noch die Implikation (c) $\implies$ (a). Sei also $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend. Offensichtlich gilt: I ist genau dann ein Intervall, wenn

$$\forall x, y \in I \text{ mit } x \leq y : [x, y] \subseteq I. \quad (0.1)$$

Seien also $x, y \in I$ beliebig mit $x \leq y$ und sei $t \in [x, y]$ beliebig. Ist $t \notin I$, so ist $A := I \cap (-\infty, t) = I \cap (-\infty, t]$ offen und abgeschlossen in $(I, d_{|\cdot|}|_{I \times I})$. Wegen $x \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Da I zusammenhängend ist, muß $I = A$ gelten im Widerspruch zu $y \notin A$. Also muß (0.1) gelten und damit I ein Intervall sein. $\square$

DEFINITION 0.5. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^N$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt (endlicher) *Polygonzug*, falls es eine endliche Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ von $[a, b]$ gibt, so daß mit $z_j := \gamma(t_j)$, $j = 1, \dots, n$, gilt:

$$\gamma(t) = z_{j-1} + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(z_j - z_{j-1}) \quad \text{für } t_{j-1} \leq t \leq t_j, j = 1, \dots, n.$$

Eine Menge $G \subseteq \mathbb{K}^N$ heißt *polygonzugzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $u, v \in G$ einen Polygonzug $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^N$ gibt mit $\gamma(a) = u$, $\gamma(b) = v$ und $\gamma([a, b]) \subset G$.

Nach Lemma 0.3 ist jede polygonzugzusammenhängende Menge auch zusammenhängend.

SATZ 0.6. Für eine offene Menge $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{K}^N$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) G ist ein Gebiet in $\mathbb{K}^N$ (also offen und zusammenhängend).
- (b) G ist wegzusammenhängend.
- (c) G ist polygonzugzusammenhängend.

BEWEIS. Die Implikation (c) $\implies$ (b) ist offensichtlich und die Aussage (b) $\implies$ (a) gilt nach Lemma 0.3. Sei also nun $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{K}^N$ offen und zusammenhängend. Wir nennen zwei Punkte $z, w \in G$ *verbindbar in G* (durch Polygonzüge), falls es einen Polygonzug $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^N$ gibt mit $\gamma(a) = z$, $\gamma(b) = w$ und $\gamma([a, b]) \subset G$. Für alle $z \in G$ bezeichnen wir die Menge der mit z in G verbindbaren Punkte aus G mit $M(z)$. Wir zeigen nun für alle $z \in G$:

- (i) $M(z) \neq \emptyset$.
- (ii) $M(z)$ ist offen (also auch offen in $(G, d_{|\cdot|}|_{G \times G})$).
- (iii) $M(z)$ ist abgeschlossen in $(G, d_{|\cdot|}|_{G \times G})$.

Zu (i): Es ist $z \in M(z)$, denn $t \mapsto \gamma(t) := z$, $t \in [0, 1]$, verbindet z mit sich.

Zu (ii): Sei $w \in M(z)$ beliebig vorgegeben und sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^N$ ein Polygonzug in G mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$. Da G offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(w) := \{u \in \mathbb{K}^N; |u - w| < \varepsilon\} \subseteq G$. Ist $v \in U_\varepsilon(w)$ beliebig vorgegeben, so ist $\gamma_* : [a, b+1] \rightarrow \mathbb{K}^N$ mit $\gamma_*(t) := \gamma(t)$ für $a \leq t \leq b$ und mit $\gamma_*(t) := w + (t - b)(v - w)$ für $b \leq t \leq b+1$ ein Polygonzug der z und v in G verbindet. Also gibt es zu jedem $w \in M(z)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(w) \subseteq M(z)$, d.h. $M(z)$ ist offen.

Zu (iii): Sei $v \in G \setminus M(z)$ beliebig. Wegen (ii) ist dann $M(v)$ eine offene Umgebung von v . Wir zeigen $M(v) \subseteq G \setminus M(z)$. Ist dies für alle $v \in G \setminus M(z)$ gezeigt so ist $G \setminus M(z)$ offen und es folgt die Behauptung (iii).

Annahme: $M(v) \cap M(z) \neq \emptyset$, d.h. es existiert ein $w \in M(v) \cap M(z)$. Dann gibt es Polygonzüge $\gamma_z : [a, b] \rightarrow G$ und $\gamma_v : [c, d] \rightarrow G$ mit $\gamma_z(a) = z, \gamma_z(b) = w, \gamma_v(c) = v, \gamma_v(d) = w$. Dann ist aber durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_z(t) & \text{für } a \leq t \leq b \\ \gamma_v(d + b - t) & \text{für } b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

ein Polygonzug in G gegeben, der die Punkte z und v in G verbindet im Widerspruch zu $v \notin M(z)$. Also war die Annahme falsch und wir erhalten (wie oben gezeigt) auch die Aussage (iii).

Da G zusammenhängend ist, folgt aus (i)–(iii), daß $M(z) = G$ für alle $z \in G$ gilt, d.h. G ist polygonzugzusammenhängend. $\square$

DEFINITION 0.7. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine nicht leere, offene und zusammenhängende Teilmenge G von Ω heißt *Zusammenhangskomponente von Ω* , falls auch $\Omega \setminus G$ offen ist.

LEMMA 0.8. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist für alle $z \in \Omega$ die Menge $M(z)$ der in Ω durch einen stetigen Polygonzug mit z verbindbaren Punkte eine Zusammenhangskomponente von Ω . Es gilt für alle $z, w \in \Omega$: Entweder ist $M(z) \cap M(w) = \emptyset$ oder es ist schon $M(z) = M(w)$.

BEWEIS. Dies sieht man durch ähnliche Schlüsse wie im Beweis zu Satz 0.6. $\square$

FOLGERUNG 0.9. Eine offene, nicht leere Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$ hat höchstens abzählbar unendlich viele verschiedene Zusammenhangskomponenten.

BEWEIS. Die Menge $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist abzählbar, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, ist $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ dicht. Ist also G eine Zusammenhangskomponente von Ω , so gibt es ein $z \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \cap G$. Nach Definition von $M(z)$ und wegen Satz 0.6 hat man $G \subseteq M(z)$. Da $M(z) \setminus G = M(z) \cap (\Omega \setminus G)$ offen ist und auch $M(z)$ ein Gebiet ist, muß $M(z) = G$ gelten. Jede Zusammenhangskomponente von Ω ist also von der Form $M(z)$ für ein $z \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Also hat Ω höchstens abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten. $\square$

LEMMA 0.10. Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Dann hat $\mathbb{C} \setminus K$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

BEWEIS. Wir setzen $\Omega := \mathbb{C} \setminus K$. Da K kompakt ist gibt es ein $r > 0$ mit $K \subset \overline{D(0, r)}$. Dann ist $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r)} \subset \Omega$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r)}$ gilt also $M(z) = M(w)$. Es kann also nur eine Zusammenhangskomponente G von Ω mit $G \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r)}) \neq \emptyset$ geben. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 0.

AUFGABE 0.1. Beschreiben Sie für $r > 0$ die Menge

$$A_r := \left\{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > r \right\}$$

geometrisch.

AUFGABE 0.2. *Die stereographische Projektion.* Sei

$$\mathbb{S} := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

die *Riemannsche Zahlenkugel* und $x_\infty := (0, 0, 1)$ ihr Nordpol. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{x_\infty\}, \quad z \mapsto \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}, \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \right)$$

und

$$\psi : \mathbb{S} \setminus \{x_\infty\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

sind stetig und invers zueinander. Deuten Sie φ und ψ geometrisch. Wir definieren noch $\varphi(\infty) := x_\infty$ und $\psi(x_\infty) := \infty$.

(b) Für die durch $d_c(z, w) := |\varphi(z) - \varphi(w)|$ für alle $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ definierte *chordale Metrik* gilt:

$$d_c(z, w) = d_c(w, z) = \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

und

$$d_c(z, \infty) = d_c(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

(c) Geraden in $\mathbb{C}$ werden von φ in Kreislinien in $\mathbb{S}$ durch den Nordpol überführt. Umgekehrt wird jede Kreislinie in $\mathbb{S}$ durch den Nordpol von ψ in eine Gerade in $\mathbb{C}$ überführt.

Hinweis: Eine Kreislinie in $\mathbb{S}$ ist der Schnitt von $\mathbb{S}$ mit einer Ebene in $\mathbb{R}^3$.

(d) Kreislinien in $\mathbb{C}$ werden von φ in Kreislinien in $\mathbb{S} \setminus (0, 0, 1)$ überführt. Umgekehrt werden Kreislinien in $\mathbb{S} \setminus (0, 0, 1)$ von ψ in Kreislinien in $\mathbb{C}$ überführt.

AUFGABE 0.3. Für $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ sei $U_{c,\varepsilon}(w) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} ; d_c(w, z) < \varepsilon\}$ die ε -Umgebung von w in $\widehat{\mathbb{C}}$ bezüglich der chordalen Metrik.

(a) Zeigen Sie: Für $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon < d_c(w, \infty)$ ist $U_{c,\varepsilon}(w)$ eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. Geben Sie den euklidischen Mittelpunkt und den euklidischen Radius dieser Kreisscheibe an.

(b) Beschreiben Sie $U_{c,\varepsilon}(w)$ für $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon := d_c(w, \infty)$ geometrisch.

(c) Beschreiben Sie $U_{c,\varepsilon}(w)$ für $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > d_c(w, \infty)$ geometrisch.

(d) Beschreiben Sie $U_{c,\varepsilon}(\infty)$ für alle $\varepsilon > 0$ geometrisch.

AUFGABE 0.4. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 + |b|^2 > 0$ und sei $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$\phi(z) := \frac{az - b}{\bar{b}z + \bar{a}} \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

Zeigen Sie, daß ϕ eine Isometrie bezüglich der chordalen Metrik d_c ist, d.h. daß gilt

$$d_c(\phi(z), \phi(w)) = d_c(z, w) \quad \text{für alle } z, w \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Insbesondere ist also die Abbildung $z \mapsto 1/z$ eine isometrische Abbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$ auf sich.

AUFGABE 0.5. Zeigen Sie: Die Menge

$$K := \left\{ t + i \sin\left(\frac{1}{t}\right); t \in (0, 2007] \right\} \cup \{it; t \in [-1, 1]\} \subset \mathbb{C}$$

ist kompakt und zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend.

AUFGABE 0.6. Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\left| \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \right| < 1 \iff |z| < 1; \quad \left| \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \right| = 1 \iff |z| = 1.$$

KAPITEL 1

Komplexer Differentialkalkül und die komplexe Form des Greenschen Satzes

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C} (= \mathbb{R}^2)$ offen und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine in einem Punkt $w \in \Omega$ reell differenzierbare Abbildung

$$f : z = x + iy \mapsto f(z) = f(x + iy) = f(x, y).$$

Insbesondere existieren also die partiellen Ableitungen nach den reellen Variablen x und y in w . Dann sind die *Pompeiu–Wirtinger–Ableitungen* von f in w definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial z}(w) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(w) - i \frac{\partial f}{\partial y}(w) \right) \quad (1.1)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(w) + i \frac{\partial f}{\partial y}(w) \right). \quad (1.2)$$

Mit Hilfe der aus der Analysis bekannten Rechenregeln (Summenregel, Produktregel und Kettenregel) für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ rechnet man leicht die entsprechenden Rechenregeln für die Pompeiu–Wirtinger–Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ nach. Hinzu kommen noch Rechenregeln für den Übergang zur konjugiert-komplexen Funktion. (Vergl. Aufgabe 1.2).

Für die Funktionen $z \mapsto z$ und $z \mapsto \bar{z}$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x + iy)}{\partial x} + i \frac{\partial(x + iy)}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x + iy)}{\partial x} - i \frac{\partial(x + iy)}{\partial y} \right) = 1, \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x - iy)}{\partial x} + i \frac{\partial(x - iy)}{\partial y} \right) = 1 \text{ und} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x - iy)}{\partial x} - i \frac{\partial(x - iy)}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Hiermit rechnet man leicht mit Hilfe der Produktregeln nach (Aufgabe 1.3), daß für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial z}(z^n \bar{z}^m) = n z^{n-1} \bar{z}^m \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^n \bar{z}^m) = m z^n \bar{z}^{m-1}.$$

$\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ verhalten sich also auf den Polynomen in z und $\bar{z}$ tatsächlich wie „partielle Ableitungen“ nach z und $\bar{z}$.

Für Funktionen $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ gilt nach H. A. Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Man erhält hiermit für die Pompeiu–Wirtinger–Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x + iy) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + iy) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x + iy) \right) = \frac{1}{4}(\Delta f)(z). \end{aligned}$$

Ebenso sieht man $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z) = \frac{1}{4}(\Delta f)(z)$ und somit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} \equiv \frac{1}{4}(\Delta f) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \quad \text{auf } \Omega. \quad (1.3)$$

Gegenstand dieser Vorlesung ist die Theorie der holomorphen Funktionen, deren Definition wir jetzt angeben:

DEFINITION 1.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf Ω *holomorph*, falls $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ auf Ω . Die Menge aller auf Ω holomorphen komplexwertigen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(\Omega)$.

LEMMA 1.2. $\mathcal{O}(\Omega)$ ist eine Unter algebra der Algebra $C^1(\Omega, \mathbb{C})$ der auf Ω stetig partiell differenzierbaren Funktionen.

BEWEIS. Wegen der Linearität der Pompeiu–Wirtinger–Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : C^1(\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{C})$$

ist $\mathcal{O}(\Omega) = \ker \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ein Untervektorraum von $C^1(\Omega, \mathbb{C})$. Mit der Produktregel

$$\frac{\partial fg}{\partial \bar{z}} \equiv f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + g \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

sieht man, daß für alle $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ auch $fg \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt. $\square$

Seien nun Ω_1 und Ω_2 zwei offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ und seien $f \in C^1(\Omega_2, \mathbb{C}), g \in C^1(\Omega_1, \mathbb{C})$ gegeben mit $g(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$. Aus den Kettenregeln für $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ (vergl. Aufgabe 1.2), nämlich

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial w}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z) \quad (1.4)$$

und

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial f}{\partial w}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}(z) \quad (1.5)$$

erhalten wir unmittelbar den ersten Teil des folgenden Lemmas.

LEMMA 1.3. (a) Sind $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen und sind Funktionen $f \in \mathcal{O}(\Omega_2), g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ gegeben mit $g(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$, so ist auch die Hintereinanderausführung $f \circ g$ auf Ω_1 holomorph.

(b) Ist $g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ ($\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$ offen) mit $g(\Omega_1) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist auch die Funktion $z \mapsto \frac{1}{g}(z) := \frac{1}{g(z)}$ auf Ω_1 holomorph.

BEWEIS. Zu (b): Für die Funktion $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$z = x + iy \mapsto h(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + i \frac{\partial}{\partial y} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist h auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph und mit (a) folgt die Holomorphie von $\frac{1}{g} = h \circ g$ auf Ω_1 . $\square$

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, so sind die durch $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$ für $z \in \Omega$ definierten reellwertigen Funktionen $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls auf Ω stetig partiell differenzierbar und es gilt auf Ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Hierbei sind die Ausdrücke in den Klammern der zweiten Zeile jeweils reellwertig. Da eine komplexe Zahl genau dann Null ist, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil Null sind, erhalten wir mit Definition 1.1:

LEMMA 1.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine Funktion $f = u + iv \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ mit $u, v \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ sind äquivalent:

(a) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(b) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ auf Ω .

(c) u und v erfüllen die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.6)$$

auf Ω .

DEFINITION 1.5. Eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definierte Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar, falls

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + o(|h|) \quad \text{für } |h| \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt. α ist durch (1.7) eindeutig bestimmt und wird mit $f'(z_0)$ oder $\frac{df}{dz}(z_0)$ bezeichnet.

Die Bedingung (1.7) ist offensichtlich äquivalent dazu, daß der Grenzwert

$$\frac{df}{dz}(z_0) := f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.8)$$

in $\mathbb{C}$ existiert. $\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0)$ heißt dann die komplexe Ableitung von f im Punkt z_0 .

Nach Aufgabe 1.5 ist (1.7) genau dann erfüllt, wenn f in z_0 reell (total) differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ gilt.

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar. Dann gilt wegen (1.8) auch

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad (1.9)$$

und

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \quad (1.10)$$

Aus (1.9) und (1.10) sowie der Definition der Pompeiu–Wirtinger–Ableitungen folgt weiter:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0). \quad (1.11)$$

Wie im reellen Fall führt man induktiv höhere komplexe Ableitungen ein: Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ in allen $z \in \Omega$ komplex differenzierbar und ist die dann durch (1.8) definierte Funktion $f^{(1)} := f' = \frac{df}{dz} : z \mapsto f'(z)$ ebenfalls in allen Punkten von Ω komplex differenzierbar, so sei $f^{(2)} := f'' := \frac{d^2 f}{dz^2}$ definiert durch $f^{(2)}(z) := (f')'(z)$ für $z \in \Omega$. Existiert $f^{(n)}(z) = \frac{d^n f}{dz^n}(z)$ für alle $z \in \Omega$ und ist die hierdurch definierte Funktion $f^{(n)} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf Ω komplex differenzierbar, so ist die $(n+1)$ -te komplexe Ableitung $f^{(n+1)}(z) = \frac{d^{n+1} f}{dz^{n+1}}(z)$ von f in $z \in \Omega$ definiert durch $f^{(n+1)}(z) := (f^{(n)})'(z)$ für alle $z \in \Omega$.

Wir erhalten nun:

SATZ 1.6. *Für eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definierten Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent*

- (a) *f ist auf Ω holomorph, d.h. $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ auf Ω .*
- (b) *f ist auf Ω stetig komplex differenzierbar.*

BEWEIS. Ist (a) erfüllt, so ist f nach Aufgabe 1.5 auf Ω komplex differenzierbar. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$ und (1.9) ist f' stetig auf Ω .

Die Rückrichtung ergibt sich ebenfalls unmittelbar aus Aufgabe 1.5 und den Darstellungen (1.9) und (1.10) der komplexen Ableitung. $\square$

Wir werden später (in Satz 3.5) sehen, daß bereits aus der komplexen Differenzierbarkeit (ohne der zusätzlichen Voraussetzung der stetigen partiellen Differenzierbarkeit) von f auf der offenen Menge Ω schon die Holomorphie von f auf Ω folgt.

Die aus der reellen Analysis bekannten Rechenregeln für die Differentiation übertragen sich sinngemäß auf den komplexen Fall. Wir zeigen hier nur die Kettenregel:

LEMMA 1.7. *Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion.*

(a) *Ist $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf Ω_1 komplex differenzierbare Funktion mit $g(\Omega_1) \subseteq \Omega$, so ist auch $f \circ g : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ auf Ω_1 komplex differenzierbar und es gilt*

$$\forall z \in \Omega_1 : (f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

(b) *Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar mit $\gamma([a, b]) \subset \Omega$, so ist $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt für alle*

$$\forall t \in [a, b] : (f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

BEWEIS. **(a)** Aus der Kettenregel für die reelle Differenzierbarkeit folgt die reelle Differenzierbarkeit von $f \circ g$ auf Ω_1 . Mit der Kettenregel für die komplexen Pompeiu–Wirtinger–Ableitungen folgt

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \text{ sowie } \frac{\partial f \circ g}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial w}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial z}(z).$$

Mit (1.11) folgt hieraus die Behauptung.

(b) Aus der reellen Kettenregel folgt die Differenzierbarkeit von $f \circ \gamma$ auf $[a, b]$ sowie (mit Hilfe von (1.9) und (1.10))

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \frac{d\operatorname{Re}\gamma}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \frac{d\operatorname{Im}\gamma}{dt}(t) \\ &= f'(\gamma(t))(\operatorname{Re}\gamma)'(t) + i f'(\gamma(t))(\operatorname{Im}\gamma)'(t) \\ &= f'(\gamma(t))\gamma'(t)\end{aligned}$$

für alle $t \in [a, b]$. □

Es soll nun an den aus der Analysis bekannten Begriff des Wegintegrals erinnert werden. Wir beschränken uns dabei auf stückweise stetig differenzierbare Wege (obwohl viele der später bewiesenen Aussagen auch für allgemeinere rektifizierbare Wege gültig bleiben).

DEFINITION 1.8. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ein *stetig differenzierbarer Weg* in Ω ist eine Abbildung $\gamma \in C^1(I, \mathbb{C})$ mit $\gamma(I) \subset \Omega$. Hierbei sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$. Eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \Omega$ heißt *stückweise stetig differenzierbarer Weg in Ω* , falls es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ von $I = [a, b]$ gibt, so daß $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \in C^1([t_{j-1}, t_j], \mathbb{C})$ für $j = 1, \dots, n$.

Stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sind insbesondere rektifizierbar und es gilt für ihre Weglänge:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Das *Wegintegral* von $f \in C(\gamma(I), \mathbb{C})$ längs γ ist definiert durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (1.12)$$

γ hat auch eine eindeutige Darstellung der Form $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ mit stückweise stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\gamma_1(t) = \operatorname{Re}\gamma(t)$, $\gamma_2(t) = \operatorname{Im}\gamma(t)$ für alle $t \in I$. Für reellwertige stetige Funktionen $u, v \in C(\gamma(I), \mathbb{R})$ definiert man dann

$$\int_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy := \int_a^b (u(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v(\gamma(t))\gamma_2'(t)) dt. \quad (1.13)$$

Die in (1.12) und (1.13) definierten Wegintegrale erster und zweiter Art sind unabhängig von der speziellen Parametrisierung, d.h. für jede stetig differenzierbare, bijektive Funktion $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz$$

und

$$\int_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_{\gamma \circ \varphi} u(x, y) dx + v(x, y) dy.$$

Dies sieht man leicht mit Hilfe der Substitutionsregel für Riemann-Integrale.

Die durch (1.12) und (1.13) definierten Abbildungen

$$f \mapsto \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{und} \quad (u, v) \mapsto \int_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy$$

sind linear und erfüllen folgende Abschätzungen:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \|f\|_{\gamma(I)} L(\gamma), \quad (1.14)$$

wobei $\|f\|_{\gamma(I)} := \sup_{z \in \gamma(I)} |f(z)|$ die Supremumsnorm von f auf $\gamma(I)$ sei, und

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy \right| &\leq \int_a^b |u(\gamma(t))\gamma'_1(t) + v(\gamma(t))\gamma'_2(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |(u(\gamma(t)), v(\gamma(t)))| \cdot |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \|(u, v)\|_{\gamma(I)} L(\gamma). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Schreibt man $f \in C(\gamma(I), \mathbb{C})$ in der Form $f = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f \in C(\gamma(I), \mathbb{R})$, so hat man für den Integranden der rechten Seite von (1.12):

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = (u(\gamma(t))\gamma'_1(t) - v(\gamma(t))\gamma'_2(t)) + i(u(\gamma(t))\gamma'_2(t) + v(\gamma(t))\gamma'_1(t)),$$

wobei die Terme in den Klammern reell sind. Geht man also in (1.12) zum Real- und Imaginärteil über, so erhält man:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b \operatorname{Re}(f(\gamma(t))\gamma'(t)) dt = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy \\ \operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b \operatorname{Im}(f(\gamma(t))\gamma'(t)) dt = \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Häufig will man endlich Summen und Differenzen von Wegintegralen über verschiedene stückweise stetig differenzierbare Wege bilden. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der *Kette von stückweise stetig differenzierbaren Wegen* (kurz Wegkette oder Kette) ein: Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ stückweise stetig differenzierbare Wege in einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und sind $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, so bilden wir die formale Summe

$$\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j. \quad (1.17)$$

Einen Ausdruck der Form (1.17) nennt man ein *Kette* (eigentlich 1-Kette) in Ω . Für Funktionen $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$ und $u, v \in C(\Omega, \mathbb{R})$ definiert man dann

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^k n_j \int_{\gamma_j} f(z) dz \quad (1.18)$$

und

$$\int_{\Gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy := \sum_{j=1}^k n_j \int_{\gamma_j} u(x, y) dx + v(x, y) dy. \quad (1.19)$$

Zwei Ketten Γ und $\tilde{\Gamma}$ werden identifiziert (wir schreiben dann auch $\Gamma = \tilde{\Gamma}$), falls gilt:

$$\forall u, v \in C(\Omega, \mathbb{R}) : \quad \int_{\Gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_{\tilde{\Gamma}} u(x, y) dx + v(x, y) dy. \quad (1.20)$$

Mit Hilfe von (1.16) sieht man: Stimmen zwei Ketten Γ und $\tilde{\Gamma}$ von stückweise differenzierbaren Wegen im Sinne von (1.20) überein, so gilt auch

$$\forall f \in C(\Omega, \mathbb{C}) : \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz. \quad (1.21)$$

Umgekehrt folgt (1.20) auch leicht aus (1.21).

Wir benötigen einige Aussagen über die Vertauschbarkeit von Grenzprozessen mit der Integration.

Ist $K \subset \mathbb{K}^N$ kompakt (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}$), so ist $C(K, \mathbb{C})$ versehen mit der Supremumsnorm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_K : C(K, \mathbb{C}) &\rightarrow [0, \infty) \\ f &\mapsto \|f\|_K := \sup_{x \in K} |f(x)| \end{aligned}$$

bekanntlich ein Banachraum (also ein vollständiger normierter Raum). Eine lineare Abbildung $J : C(K, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn

$$\|J\| := \sup\{|J(f)|; f \in C(K, \mathbb{C}), \|f\|_K \leq 1\} < \infty.$$

Es gilt dann

$$\forall f \in C(K, \mathbb{C}) : |J(f)| \leq \|J\| \cdot \|f\|_K.$$

Im Rahmen dieser Vorlesung sind wir besonders interessiert an:

BEISPIEL 1.9. Sei $\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j$ eine Kette von stückweise differenzierbaren Wegen $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist $K := \text{Spur}(\Gamma) := \bigcup_{j=1}^k \gamma_j([a_j, b_j])$, die *Spur* von Γ , als endliche Vereinigung von kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ kompakt. Durch

$$J_\Gamma(f) := \int_\Gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^k n_j \int_{\gamma_j} f(z) dz \quad \text{für } f \in C(K, \mathbb{C})$$

wird eine lineare Abbildung $J_\Gamma : C(K, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ erklärt. Diese ist wegen

$$\forall f \in C(K, \mathbb{C}) : |J_\Gamma(f)| \leq \sum_{j=1}^k |n_j| L(\gamma_j) \|f\|_K$$

stetig mit

$$\|J_\Gamma\| \leq \sum_{j=1}^k |n_j| L(\gamma_j) =: L(\Gamma).$$

LEMMA 1.10. Sei $K \subset \mathbb{K}^N$ kompakt, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ offen und sei $J : C(K, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige lineare Abbildung sowie f eine auf $K \times \Omega$ stetige komplexwertige Funktion. Dann gilt:

(a) Die durch $y \mapsto f(\cdot, y)$ definierte Abbildung von Ω nach $C(K, \mathbb{C})$ ist stetig. Also ist auch die Funktion

$$H : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } H(y) := J(f(\cdot, y)) \quad \text{für } y \in \Omega \quad (1.22)$$

als Hintereinanderausführung von stetigen Abbildungen wieder stetig. Insbesondere gilt

$$\forall y_0 \in \Omega : \lim_{y \rightarrow y_0} J(f(\cdot, y)) = J(f(\cdot, y_0)).$$

(b) Ist f für alle $j = 1, \dots, M$ und alle $(x, y) \in K \times \Omega$ in (x, y) partiell differenzierbar bezüglich y und $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)$ auf $K \times \Omega$ stetig, so ist die Funktion H aus (1.22) stetig partiell differenzierbar auf Ω und es gilt für $j = 1, \dots, M$:

$$\forall y \in \Omega : \frac{\partial H}{\partial y_j}(y) = J\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(\cdot, y)\right).$$

BEWEIS. (a) Wir definieren $h : \Omega \rightarrow C(K, \mathbb{C})$ durch $h(y) := f(\cdot, y)$ für alle $y \in \Omega$ und haben zu beweisen, daß h auf Ω stetig ist. Hierzu genügt es, die Stetigkeit von h auf allen kompakten Teilmengen A von Ω zu zeigen. Sei also $A \subset \Omega$ kompakt und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $K \times A$ gibt es dann ein $\delta > 0$ mit

$$\forall (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in K \times A : \quad |(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})| < \delta \implies |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| < \varepsilon$$

Für alle $y, \tilde{y} \in A$ mit $|y - \tilde{y}| < \delta$ folgt dann

$$\|h(y) - h(\tilde{y})\|_K = \max_{x \in K} |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| < \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß h auf A stetig ist.

(b) Sei $y_* \in \Omega$ beliebig und sei $\rho > 0$ mit $A := K_\rho(y_*) := \{y \in \mathbb{R}^M; |y - y_*| \leq \rho\} \subset \Omega$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial y_j} \in C(K \times \Omega, \mathbb{C})$ gibt es wie im Beweis zu (a) zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für $j = 1, \dots, M$ gilt:

$$\forall u, v \in A : \quad |u - v| < \delta \implies \left\| \frac{\partial f}{\partial y_j}(\cdot, u) - \frac{\partial f}{\partial y_j}(\cdot, v) \right\|_K < \frac{\varepsilon}{\|J\| + 1}.$$

Sei $F : K \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$x \mapsto F(x) := \frac{1}{t}(f(x, y_* + t\mathbf{e}_j) - f(x, y_*)) - \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_*),$$

wobei $\mathbf{e}_j$ der j -te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^M$ sei, so erhalten wir für $0 \neq t \in (-\delta, \delta)$:

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left| \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_* + ste_j) - \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_*) \right) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_* + ste_j) - \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_*) \right| ds \leq \frac{\varepsilon}{\|J\| + 1}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\|F\|_K \leq \frac{\varepsilon}{\|J\| + 1}$$

und daher

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t}(H(y_* + t\mathbf{e}_j) - H(y_*)) - J \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(\cdot, y_*) \right) \right| &= |J(F)| \leq \|J\| \cdot \|F\|_K \\ &\leq \frac{\varepsilon \|J\|}{\|J\| + 1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Also ist H in y_* partiell differenzierbar nach $y_1, \dots, y_M$ und es folgt für $j = 1, \dots, M$:

$$\frac{\partial H}{\partial y_j}(y_*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(H(y_* + t\mathbf{e}_j) - H(y_*)) = J \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(\cdot, y_*) \right).$$

Die Stetigkeit von $\frac{\partial H}{\partial y_j}$ folgt nun durch Anwendung von Teil (a) auf $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ statt f . □

BEMERKUNGEN 1.11. (a) Ist in der Situation von Lemma 1.10 die Funktion f bezüglich der Variablen $y_1, \dots, y_M$ k mal partiell differenzierbar und ist für alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{N}_0^M$ mit $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_M \leq k$ die Funktion $\frac{\partial^\alpha f}{\partial y^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_M^{\alpha_M}}$ auf $K \times \Omega$ stetig, so ist (wie man mit Hilfe von 1.10 (b) durch vollständige Induktion nach k zeigt) die Funktion H aus Lemma 1.10 ebenfalls k mal stetig partiell differenzierbar auf Ω und es gilt für alle $y \in \Omega$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^M$ mit $|\alpha| \leq k$:

$$\frac{\partial^\alpha J(f(\cdot, y))}{\partial y^\alpha} = J \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial y^\alpha}(\cdot, y) \right).$$

(b) Ist speziell $M = 2$, ist Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und erfüllt $f : K \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ die Voraussetzungen zu 1.10 (b) sowie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, z) \equiv 0$ auf $K \times \Omega$, so daß also $z \mapsto f(x, z)$ für alle $x \in K$ eine auf Ω holomorphe Funktion ist, so ist auch die Funktion $z \mapsto J(f(\cdot, z))$ auf Ω holomorph und man hat

$$\frac{dJ(f(\cdot, z))}{dz} = J\left(\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, z)\right).$$

Dies folgt mit Hilfe von 1.10 (b) und (1.9) – (1.11).

Mit Hilfe von 1.10 und 1.11 erhalten wir nun die

FOLGERUNG 1.12. *Sei Γ eine Kette von stückweise stetig differenzierbaren Wegen in $\mathbb{C}$ und sei $f \in C(\text{Spur}(\Gamma), \mathbb{C})$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir Funktionen $h_n : \text{Spur}(\Gamma) \times (\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)) \rightarrow \mathbb{C}$ durch*

$$h_n(z, w) := \frac{n!f(z)}{(z-w)^{n+1}} \quad \text{für } z \in \text{Spur}(\Gamma) \text{ und } w \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$$

sowie $F_n : \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F_n(w) := \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h_n(z, w) dz$$

für $w \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$. Dann ist F_n auf $\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ holomorph und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$F'_n \equiv F_{n+1} \quad \text{auf } \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma).$$

BEWEIS. Nach Beispiel 1.9 ist die durch

$$J(g) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) dz \quad \text{für } g \in C(\text{Spur}(\Gamma), \mathbb{C})$$

definierte Abbildung $J : C(\text{Spur}(\Gamma), \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ linear und stetig mit

$$\|J\| \leq \frac{L(\Gamma)}{2\pi}.$$

Für alle $z \in \text{Spur}(\Gamma)$ ist die Funktion $w \mapsto \frac{1}{z-w}$ nach Lemma 1.3 (und dessen Beweis) auf $\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ holomorph. Also sind (nach Lemma 1.2) auch die Funktionen $w \mapsto h_n(z, w) = \frac{n!f(z)}{(z-w)^{n+1}}$ dort holomorph. Durch vollständige Induktion sieht man

$$\frac{\partial h_n}{\partial w}(z, w) = h_{n+1}(z, w) \quad \text{für alle } z \in \text{Spur}(\Gamma), w \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma).$$

Nach Lemma 1.10 und Bemerkung 1.11 (b) ist also $F_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma))$ und es gilt für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$

$$F'_n(w) = \frac{\partial F_n}{\partial w}(w) = J\left(\frac{\partial h_n}{\partial w}(\cdot, w)\right) = J(h_{n+1}(\cdot, w)) = F_{n+1}(w)$$

und somit die Behauptung. □

Wir zeigen nun zunächst die reelle Fassung des Greenschen Integralsatzes, wobei wir uns der Einfachheit halber auf einen für uns ausreichenden Spezialfall beschränken und definieren zu diesem Zweck:

DEFINITION 1.13. Eine kompakte Menge $E \subset \mathbb{R}^2$ heiße *Greenscher Elementarbereich*, falls es Intervalle $[a, b]$, $[c, d]$ und stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi_1 < \varphi_2$ auf (a, b) , $\psi_1 < \psi_2$ auf (c, d) und

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

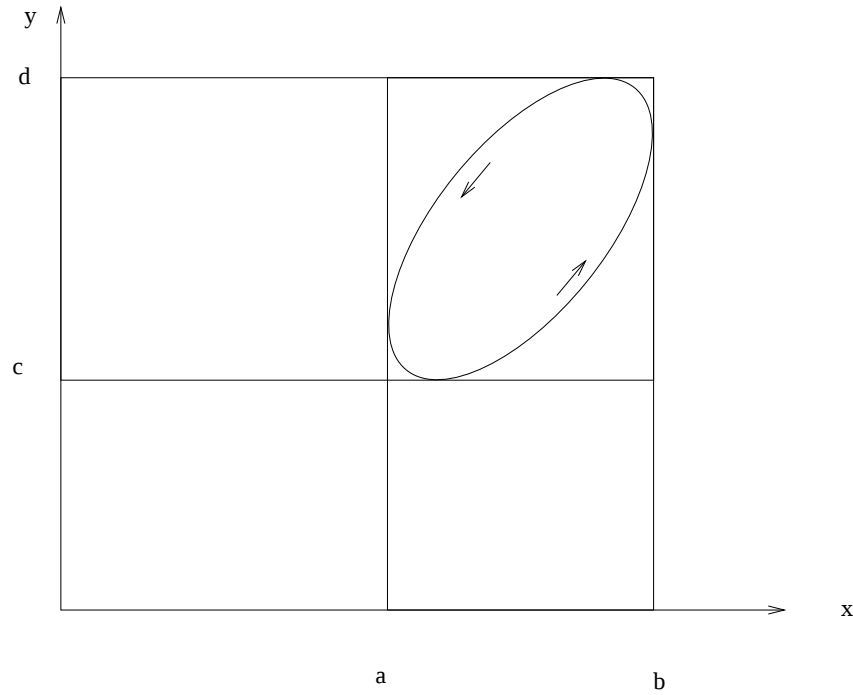


ABBILDUNG 1. Ein Greenscher Elementarbereich

Hierbei wollen wir für die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ stückweise stetige Differenzierbarkeit auf den offenen Intervallen (a, b) bzw. (c, d) voraussetzen, d.h. es gebe eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ von $[a, b]$ mit $\varphi_j|_{(a,b) \cap [t_{k-1}, t_k]} \in C^1((a, b) \cap [t_{k-1}, t_k], \mathbb{R})$ für $j = 1, 2$ und $k = 1, \dots, n$ (analog für ψ_1, ψ_2).

Der Rand ∂E eines solchen Greenschen Elementarbereiches E kann dann so stückweise stetig parametrisiert werden, daß er einmal im mathematischen Drehsinn umlaufen wird. Mit den Bezeichnungen von Definition 1.13 überlegt man sich, daß zwei Parametrisierungen $\Gamma_\varphi = \sum_{j=1}^4 \gamma_{\varphi,j}$ und $\Gamma_\psi = \sum_{j=1}^4 \gamma_{\psi,j}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi,1}(t) &:= (t, \varphi_1(t)) && \text{für } a \leq t \leq b, \\ \gamma_{\varphi,2}(t) &:= (b, t) && \text{für } \varphi_1(b) \leq t \leq \varphi_2(b), \\ \gamma_{\varphi,3}(t) &:= (b - t, \varphi_2(b - t)) && \text{für } 0 \leq t \leq b - a, \\ \gamma_{\varphi,4}(t) &:= (a, \varphi_2(a) - t) && \text{für } 0 \leq t \leq \varphi_2(a) - \varphi_1(a), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \gamma_{\psi,1}(t) &:= (\psi_2(t), t) && \text{für } c \leq t \leq d, \\ \gamma_{\psi,2}(t) &:= (\psi_2(d) - t, d) && \text{für } 0 \leq t \leq \psi_2(d) - \psi_1(d), \\ \gamma_{\psi,3}(t) &:= (\psi_1(d - t), d - t) && \text{für } 0 \leq t \leq d - c, \\ \gamma_{\psi,4}(t) &:= (t, c) && \text{für } \psi_1(c) \leq t \leq \psi_2(c). \end{aligned}$$

Weiter überlegt man sich, daß (auch in dem Fall, daß eine oder mehrere der Funktionen φ_j, ψ_j in den Randpunkten senkrechte Tangenten besitzen) für alle stetigen Funktionen $u, v \in C(\partial E, \mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\Gamma_\varphi} u(x, y)dx + v(x, y)dy = \int_{\Gamma_\psi} u(x, y)dx + v(x, y)dy.$$

In dem Spezialfall, daß eine oder mehrere der Funktionen φ_j, ψ_j in Randpunkten senkrechte Tangenten besitzen, zeigt eine kleine Zusatzbetrachtung, daß die Integrale auch dann noch Sinn machen und übereinstimmen. Wir identifizieren daher die beiden Wegketten,

bezeichnen sie mit $\partial_+ E$ und nennen sie den *positiv orientierten Rand von E* . Mit diesen Definitionen und Bezeichnungen gilt nun:

SATZ 1.14 (Satz von Green). *Sei E ein Greenscher Elementarbereich und seien $u, v \in C(E, \mathbb{R})$ auf $\text{int}(E)$ stetig partiell differenzierbare Funktionen, deren partielle Ableitungen 1. Ordnung stetig auf E fortsetzbar sind. Dann gilt*

$$\iint_E \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_{\partial_+ E} u(x, y) dx + v(x, y) dy.$$

BEWEIS. Wir berechnen zunächst:

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b (u(x, \varphi_2(x)) - u(x, \varphi_1(x))) dx \\ &= - \int_0^{b-a} u(\gamma_{\varphi,3}(t)) \frac{d(b-t)}{dt} dt - \int_a^b u(\gamma_{\varphi,1}(t)) \frac{dt}{dt} dt \\ &= - \int_{\gamma_{\varphi,1}} u(x, y) dx - \int_{\gamma_{\varphi,3}} u(x, y) dx \\ &= - \int_{\Gamma_\varphi} u(x, y) dx, \end{aligned}$$

da die Ableitungen der ersten Komponenten von $\gamma_{\varphi,2}$ und $\gamma_{\varphi,4}$ verschwinden. Wir erhalten also

$$\iint_E \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\partial_+ E} u(x, y) dx. \quad (1.23)$$

Analog zeigt man

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\partial_+ E} v(x, y) dy \end{aligned} \quad (1.24)$$

Subtraktion der Gleichung (1.23) von (1.24) ergibt die Behauptung. $\square$

Der Satz von Green gilt auch für allgemeinere Bereiche. Wir definieren hierzu:

DEFINITION 1.15. Eine kompakte Teilmenge E des $\mathbb{R}^2$ heiße *Greenscher Bereich*, falls E sich zerlegen läßt in endlich viele Elementarbereiche, d.h. $E = \bigcup_{j=1}^n E_j$ mit Greenschen Elementarbereichen $E_1, \dots, E_n$, so daß $\text{int} E_j \cap \text{int} E_k = \emptyset$ für $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, n$. Der positiv orientierte Rand $\partial_+ E$ ist dann die Wegkette aller positiv orientierten Ränder $\partial_+ E_1, \dots, \partial_+ E_n$, wobei die im Inneren von E verlaufenden Wegstrecken weggelassen werden, da sich die Wegintegrale hierüber aufheben.

Mit Hilfe dieser Bezeichnung erhalten wir aus Satz 1.14

FOLGERUNG 1.16 (Satz von Green). *Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ ein Greenscher Bereich. Dann gilt für alle $u, v \in C(E, \mathbb{R})$, die auf $\text{int}(E)$ stetig partiell differenzierbar sind und deren partielle Ableitungen 1. Ordnung sich stetig auf E fortsetzbar lassen:*

$$\iint_E \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_{\partial_+ E} u(x, y) dx + v(x, y) dy.$$

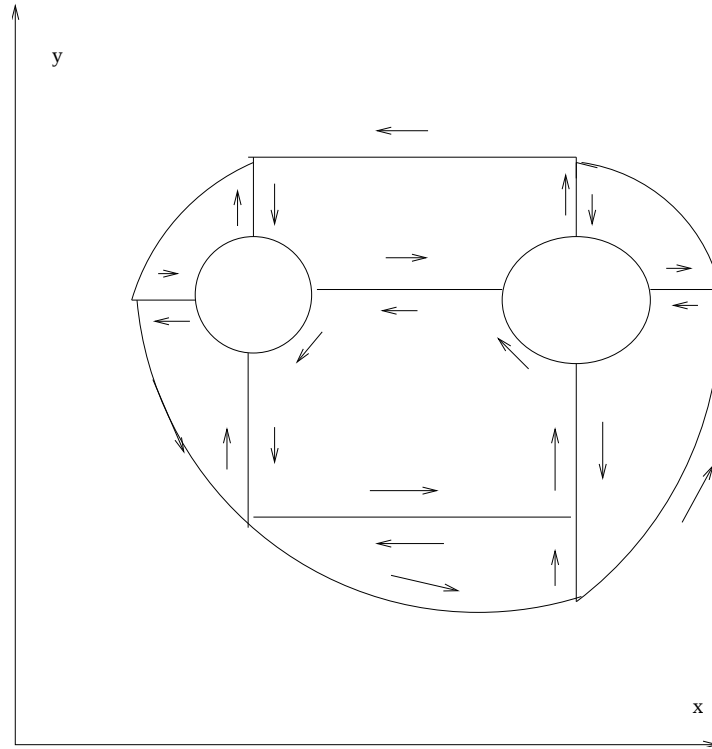


ABBILDUNG 2. Ein Greenscher Bereich

Für eine noch allgemeinere Fassung des Greenschen Satzes sei auf das Buch von Apostol [4], Chapter 10, verwiesen.

Die folgende komplexe Variante des Greenschen Satzes wird Grundlage der weiteren Theorie der holomorphen Funktionen sein.

SATZ 1.17 (Komplexe Fassung des Satzes von Green). *Sei $E \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ein Greenscher Bereich. Dann gilt für alle Funktionen $f \in C(E, \mathbb{C})$, die auf $\text{int}(E)$ stetig partiell differenzierbar sind und deren partielle Ableitungen 1. Ordnung sich stetig auf E fortsetzen lassen:*

$$2i \iint_E \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dx dy = \int_{\partial_+ E} f(z) dz. \quad (1.25)$$

BEWEIS. Mit $u(x, y) = \text{Re} f(z)$, $v(x, y) = \text{Im} f(z)$ für $z = x + iy \in E$ ($x, y \in \mathbb{R}$) gilt für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset E$ unter Verwendung von (1.16):

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (1.26)$$

Geht man nun auf der linken Seite von (1.25) zum Realteil über, so erhält man unter Verwendung von Folgerung 1.16 und (1.26)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(2i \iint_E \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dx dy \right) &= \iint_E \operatorname{Re} \left(i \frac{\partial f}{\partial x}(z) - \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right) dx dy \\ &= \iint_E \frac{\partial(-v)}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\partial_+ E} u(x, y) dx - v(x, y) dy \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_{\partial_+ E} f(z) dz \right) \end{aligned}$$

Ebenso rechnet man nach, daß für den Imaginärteil der linken Seite von (1.25) gilt:

$$\operatorname{Im} \left(2i \iint_E \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dx dy \right) = \operatorname{Im} \left(\int_{\partial_+ E} f(z) dz \right)$$

und erhält so die Behauptung. $\square$

Als wichtige Folgerung erhalten wir eine erste Fassung des Cauchyschen Integralsatzes:

SATZ 1.18 (Integralsatz von Cauchy). *Sei $E \subset \mathbb{C}$ ein Greenscher Bereich und sei $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf E stetige und auf $\operatorname{int}(E)$ holomorphe Funktion, für die f' stetig auf E fortsetzbar ist. Dann gilt:*

$$\int_{\partial_+ E} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS. Wegen

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

(vergl. (1.9) und (1.10)) sieht man, daß die partiellen Ableitungen von f stetige Fortsetzungen auf E haben. Mit Satz 1.17 folgt wegen $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ die Behauptung. $\square$

Zur Herleitung einer allgemeinen Integralformel für stetig differenzierbare Funktionen auf Greenschen Bereichen benötigen wir einige Hilfsaussagen. Für alle $w \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne $D(w, r)$ die offene Kreisscheibe um w mit Radius r .

LEMMA 1.19. *Für alle $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w, r)} (z - w)^n dz = \begin{cases} 1 & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{für } n \neq -1. \end{cases}$$

BEWEIS. Wir parametrisieren $\partial_+ D(w, r)$ durch $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := w + r \exp(i2\pi t)$ für $t \in [0, 1]$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w, r)} (z - w)^n dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 r^n \exp(2\pi n i t) 2\pi i r \exp(2\pi i t) dt \\ &= r^{n+1} \int_0^1 \exp(2\pi(n+1)it) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{für } n \neq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

LEMMA 1.20. *Sei $f \in C(\overline{D(w, R)}, \mathbb{C})$ für ein $w \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Dann gilt:*

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w, r)} \frac{f(z)}{z - w} dz = f(w).$$

BEWEIS. Für $0 < r < R$ gilt unter Verwendung von Lemma 1.19 und der Stetigkeit von f mit der gleichen Parametrisierung wie im Beweis zu Lemma 1.19:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w,r)} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w,r)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{f(w)}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w,r)} \frac{1}{z-w} dz \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^1 \frac{f(w + r \exp(2\pi i t)) - f(w)}{r \exp(2\pi i t)} 2\pi i r \exp(2\pi i t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(w + r \exp(2\pi i t)) - f(w)| dt \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

LEMMA 1.21. Sei $w \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und sei h eine auf $\overline{D(w, R)}$ stetige Funktion. Dann ist die Funktion

$$z \mapsto g(z) := \frac{h(z)}{z-w}$$

auf $D(w, R)$ Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\left| \iint_{D(w,R)} \frac{h(z)}{z-w} dx dy \right| \leq 2\pi R \|h\|_{\overline{D(w,R)}}.$$

BEWEIS. Wir führen Polarkoordinaten um w ein: Die Abbildung $\Phi : (0, R) \times (0, 2\pi) \rightarrow D(w, R) \setminus \{x; x \in [0, R)\}$ mit $\Phi(r, \varphi) = w + r \exp(i\varphi)$ ist ein Diffeomorphismus mit $|\det J_\Phi(r, \varphi)| = r$. Die Funktion g ist also nach dem Transformationssatz genau dann auf $D(w, R)$ bezüglich des ebenen Lebesgemaßes integrierbar, wenn die Funktion

$$(r, \varphi) \mapsto g(\Phi(r, \varphi))r = h(\Phi(r, \varphi)) \exp(-i\varphi)$$

auf $(0, R) \times (0, 2\pi)$ Lebesgue-integrierbar ist. Da dies aus Stetigkeitsgründen der Fall ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{D(w,R)} g(z) dx dy \right| &= \left| \int_0^R \int_0^{2\pi} g(\Phi(r, \varphi)) r d\varphi dr \right| = \left| \int_0^R \int_0^{2\pi} h(\Phi(r, \varphi)) \exp(-i\varphi) d\varphi dr \right| \\ &\leq 2\pi R \|h\|_{\overline{D(w,R)}}. \end{aligned}$$

Damit ist die behauptete Ungleichung bewiesen. $\square$

Nun können wir die angekündigte Integralformel beweisen:

SATZ 1.22 (Cauchy–Stokes–Integralformel von Pompeiu). Sei $E \subset \mathbb{C}$ ein Greenscher Bereich. Ist $f \in C(E, \mathbb{C})$ auf $\text{int}(E)$ stetig partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen von f stetig auf E fortsetzbar, so gilt für alle $w \in \text{int}(E)$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{1}{z-w} dx dy. \quad (1.27)$$

BEWEIS. Sei $w \in \text{int}(E)$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$ mit $\overline{D(w, \varepsilon)} \subset \text{int}(E)$. Wir setzen zur Abkürzung

$$I := \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{1}{z-w} dx dy, \quad I_\varepsilon := \frac{1}{\pi} \iint_{D(w, \varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{1}{z-w} dx dy.$$

Zu ε gibt es eine Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ mit $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq [0, 1]$, $\varphi(z) = 1$ für $|z - w| > \varepsilon/2$ und $\varphi(z) = 0$ für $|z - w| < \varepsilon/4$. Unter Verwendung der komplexen Form des Greenschen

Satzes erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 I &= I_\varepsilon + \frac{1}{\pi} \iint_{E \setminus D(w, \varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{1}{z - w} dx dy \\
 &= I_\varepsilon + \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\partial(f\varphi)}{\partial \bar{z}}(z) \frac{1}{z - w} dx dy - \frac{1}{\pi} \iint_{D(w, \varepsilon)} \frac{\partial(f\varphi)}{\partial \bar{z}}(z) \frac{1}{z - w} dx dy \\
 &= I_\varepsilon + \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f(z)\varphi(z)}{z - w} \right) dx dy - \frac{1}{\pi} \iint_{D(w, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f(z)\varphi(z)}{z - w} \right) dx dy \\
 &= I_\varepsilon + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f(z)\varphi(z)}{z - w} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w, \varepsilon)} \frac{f(z)\varphi(z)}{z - w} dz.
 \end{aligned}$$

Nach Wahl von φ ist $\varphi \equiv 1$ auf $\partial E \cup \partial D(w, \varepsilon)$ und es folgt;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - w} dz = I_\varepsilon - I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Da für $\varepsilon \rightarrow 0$ die linke Seite dieser Gleichung nach Lemma 1.20 gegen $f(w)$ und I_ε (nach Lemma 1.21) gegen 0 konvergiert, erhalten wir die Cauchy–Stokes–Formel (1.27). $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 1.

AUFGABE 1.1. Für diejenigen unter Ihnen, denen die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ noch nicht bekannt ist, definieren wir diese durch

$$\exp(z) := e^x (\cos(y) + i \sin(y)),$$

für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
- Die Funktion $\exp$ ist auf $\mathbb{C}$ holomorph und es gilt $\exp' \equiv \exp$ auf $\mathbb{C}$.
- Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $z = r \exp(i\varphi)$ mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Man nennt φ dann das *Argument* von z und schreibt $\text{Arg}(z) = \varphi$.

AUFGABE 1.2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ zwei in einem Punkt z_0 reell differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

- $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}(z_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}(z_0)$;
- $\frac{\partial(fg)}{\partial z}(z_0) = f(z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) g(z_0)$;
- ist $V \subseteq \mathbb{C}$ offen, ist $f(z_0) \in V$, und ist $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ reell differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial(h \circ f)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial z}(f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(f(z_0)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0).$$

Wie lauten die zu (b) und (c) analogen Rechenregeln für die partielle Ableitung nach $\bar{z}$?

AUFGABE 1.3. Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ für folgende Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(z) := z^n \bar{z}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}_0$);
- $f(z) := \bar{z}^5 (1 - |z|^6)$;
- $f(z) := e^{-|z|^2}$.

AUFGABE 1.4. Zeigen Sie, daß die durch

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right),$$

definierte Funktion f auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph ist. Geben Sie für alle $c > 0$ die geometrische Beschreibung der Höhenlinien

$$H_f(c) := \{z \in \mathbb{C} ; |f(z)| = c\}$$

an und zeigen Sie, daß $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ und $f(\mathbb{T} \setminus \{1\}) = \mathbb{T}$ gilt. Hierbei bezeichne $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ deren Rand.

AUFGABE 1.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei $z_0 \in U$, und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann reell differenzierbar in z_0 , wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + \beta \bar{h} + o(h) \quad \text{für } h \rightarrow 0;$$

in diesem Fall sind α und β eindeutig bestimmt, und es gilt

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

(b) f ist genau dann komplex differenzierbar in z_0 , wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ gilt.

(c) Es gibt eine überall reell, aber nirgends komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

AUFGABE 1.6. (a) Sei $S := \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} ; r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \alpha\}$, wobei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Sei $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, für die der Grenzwert $L := \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in S}} zf(z)$ existiert. Zeigen Sie

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i\alpha L,$$

wobei $\gamma_r(\varphi) := r \exp(i\varphi)$ für $0 \leq \varphi \leq \alpha$.

(b) Sei f eine auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ stetige Funktion, für die $\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \mathbb{H}}} zf(z) = 0$ gilt. Zeigen Sie, daß dann für jedes $s > 0$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} \exp(isz) f(z) dz = 0,$$

wobei γ_r der im positiven Sinne durchlaufene Halbkreisbogen $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z| = r\}$ sei.

AUFGABE 1.7. Sei γ der Weg, der den Rand des Gebietes

$$G := \{z \in \mathbb{C} ; 1 < |z| < 2, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

im positiven Sinn durchläuft. Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ das Integral $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}^n}{z^n} dz$.

AUFGABE 1.8. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf Ω *harmonisch*, falls $\Delta f \equiv 0$ auf Ω gilt. Zeigen Sie

(a) Ist $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ auf Ω holomorph, so sind die Funktionen f , $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ auf Ω harmonisch.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \log(|z|)$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ harmonisch.

AUFGABE 1.9. Verifizieren Sie den Satz von Green für das Integral

$$\int_{\gamma} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy,$$

wobei γ der im positiven Sinne durchlaufene Rand des in $[0, 1] \times [0, 1]$ enthaltenen Gebietes ist, welches zwischen den Kurven $y = x^2$ und $y^2 = x$ liegt.

AUFGABE 1.10. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Zeigen Sie, daß es einen Greenschen Bereich $E \subset \Omega$ gibt mit $K \subset \text{int}(E)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß die Vereinigung von endlich vielen achsenparallelen Rechtecken ein Greenscher Bereich ist.

AUFGABE 1.11. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma} (8\bar{z} + 3z)dz,$$

wobei γ den Rand von $E := \{x + iy \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\}$ ($a > 0$) im positiven Sinn durchläuft.

(b) Zeigen Sie: Ist E ein Greenscher Bereich, so ist die Fläche $A(E)$ von E gegeben durch

$$A(E) = \int_{\partial_+ E} \frac{1}{2} i \bar{z} dz$$

AUFGABE 1.12. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy,$$

wobei γ ist definiert durch

(a) $\gamma := \{2t + i(t^2 + 3) \mid t \in [0, 1]\}$.

(b) $\gamma := [3i, 2 + 3i] + [2 + 3i, 2 + 4i]$.

AUFGABE 1.13. Für $R > 1$ seien

$$\gamma_{1,R}(t) := t \quad (t \in [-R, R]) \quad \text{und} \quad \gamma_{2,R}(t) := Re^{-it} \quad (t \in [0, \pi]).$$

(a) Skizzieren Sie $\gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$ und berechnen Sie

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1 + z^2} dz.$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil (a) und Aufgabe 1.6 das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

Grundlegende Eigenschaften holomorpher Funktionen

Aus der Cauchy–Stokes–Integralformel erhalten wir nun zwei nützliche Integraldarstellungsformeln für holomorphe Funktionen.

SATZ 2.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $w \in \Omega$ beliebig. Sei $\varphi \in C^1(\Omega)$ mit $\varphi(z) \equiv 1$ in einer Umgebung von w und $\varphi \equiv 0$ außerhalb einer kompakten Umgebung $K \subset \Omega$ von w . Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:*

$$f(w) = \frac{-1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z) \frac{1}{z-w} dx dy .$$

BEWEIS. Wir setzen die Funktion $z \mapsto \varphi(z)f(z)$ außerhalb von K durch 0 zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ einmal stetig differenzierbaren Funktion fort, wenden auf diese Fortsetzung und eine hinreichend große abgeschlossene Kreisscheibe E mit $K \subset \text{int}(E)$ die Cauchy–Stokes–Integralformel an und beachten schließlich noch die Produktregel für die Pompeiu–Wirtinger–Ableitung und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ auf Ω . $\square$

Auch die folgende erste Fassung der Cauchyschen Integralformel ergibt sich unmittelbar aus Satz 1.22.

SATZ 2.2 (Cauchysche Integralformel). *Sei $E \subset \mathbb{C}$ ein Greenscher Bereich und sei f eine auf E stetige und auf $\text{int}(E)$ holomorphe Funktion, deren komplexe Ableitung stetig auf E fortsetzbar ist. Dann gilt für alle $w \in \text{int}(E)$:*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f(z)}{z-w} dz . \quad (2.1)$$

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel und Folgerung 1.12 zeigen wir nun:

SATZ 2.3 (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel). *Sei $E \subset \mathbb{C}$ ein Greenscher Bereich und sei f eine auf E stetige und auf $\text{int}(E)$ holomorphe Funktion, deren komplexe Ableitung stetig auf E fortsetzbar ist. Dann gilt:*

- (a) *f ist auf $\text{int}(E)$ unendlich oft stetig partiell komplex differenzierbar.*
- (b) *Für alle $w \in \text{int}(E)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$f^{(n)}(w) = \frac{d^n f}{dz^n}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz . \quad (2.2)$$

- (c) *Für jede kompakte Teilmenge K von $\text{int}(E)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung*

$$\|f^{(n)}\|_K \leq \frac{n! L(\partial E)}{2\pi \cdot \text{dist}(K, \partial E)^{n+1}} \|f\|_{\partial E} , \quad (2.3)$$

wobei $\text{dist}(K, \partial E) := \inf\{|\zeta - \eta|; \zeta \in K, \eta \in \partial E\}$ der euklidische Abstand von K zum Rand von E ist.

BEWEIS. (a) und (b) folgen unmittelbar aus der Cauchyschen Integralformel (2.1) und Folgerung 1.12. Aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel (2.2) erhält man für alle $w \in K$:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(w)| &\leq \frac{n!}{2\pi} L(\partial E) \|f\|_{\partial E} \sup_{z \in \partial E} |z - w|^{-n-1} \\ &\leq \frac{n! L(\partial E)}{2\pi \cdot \text{dist}(K, \partial E)^{n+1}} \|f\|_{\partial E}, \end{aligned}$$

wodurch man durch Übergang zum Supremum bezüglich $w \in K$ die Abschätzung (2.3) erhält. $\square$

FOLGERUNG 2.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist $\mathcal{O}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ und jede auf Ω holomorphe Funktion ist auf Ω beliebig oft stetig komplex differenzierbar.

BEWEIS. Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $w \in \Omega$ beliebig. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ mit $\overline{D(w, \varepsilon)} \subset \Omega$. Nach Satz 2.3 (angewendet auf $E := \overline{D(w, \varepsilon)}$) ist f auf $D(w, \varepsilon)$ beliebig oft stetig partiell und komplex differenzierbar. $\square$

DEFINITION 2.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$. Eine Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (komplexe) Stammfunktion zu f auf Ω , falls F auf Ω komplex differenzierbar ist und $F' \equiv f$ auf Ω gilt.

FOLGERUNG 2.6. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ stetige Funktion, die auf Ω eine Stammfunktion F besitzt, so ist f schon auf Ω holomorph.

BEWEIS. Da jede auf Ω komplex differenzierbare Funktion insbesondere stetig ist, und wegen der Stetigkeit von $F' = f$ auf Ω folgt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ nach Folgerung 2.4. $\square$

Anders als im reellen Fall besitzt also nicht jede stetige Funktion eine komplexe Stammfunktion. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, daß jede holomorphe Funktion auf einer offenen Menge Ω lokal (also in einer Umgebung eines jeden Punktes aus Ω) eine komplexe Stammfunktion besitzt.

Mit Hilfe der Abschätzungen in Satz 2.3 zeigen wir nun:

SATZ 2.7 (Satz von Liouville). Ist f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe und beschränkte Funktion, so ist f schon konstant.

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist $M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty$. Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig. Mit $n = 1$, $K := \{w\}$ und $E := \overline{D(w, r)}$ folgt aus (2.3) in Satz 2.3:

$$|f'(w)| \leq \frac{L(\partial \overline{D(w, r)})}{2\pi r^2} M = \frac{M}{r} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Also ist $f' \equiv 0$ und daher auch $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ (nach (1.9), (1.10)) auf $\mathbb{C}$. Also muß f auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ konstant sein. $\square$

DEFINITION 2.8. Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion nennt man auch eine ganze Funktion.

Mit Hilfe des Satzes von Liouville erhalten wir nun einen schönen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra:

SATZ 2.9 (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[Z]$ mit komplexen Koeffizienten vom Grad ≥ 1 hat wenigstens eine komplexe Nullstelle.

BEWEIS. Sei p ein Polynom in z vom Grad $n \geq 1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$, also

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Wir führen den Beweis indirekt

Annahme: p hat keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $f := 1/p$ nach Lemma 1.3 (b) eine ganze Funktion. Wegen

$$|p(z)| = |a_n| \cdot |z|^n \left| 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}}_{\rightarrow 0} \right| \rightarrow \infty$$

für $|z| \rightarrow \infty$ folgt $f(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$. Es gibt daher ein $r > 0$, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$ gilt $|f(z)| \leq 1$. Wegen der Stetigkeit von f auf $\overline{D(0, r)}$ folgt

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \leq \max \left\{ 1, \max_{|z| \leq r} |f(z)| \right\} < \infty.$$

Nach dem Satz von Liouville muß f also auf $\mathbb{C}$ konstant sein im Widerspruch zu $\text{Grad}(p) \geq 1$. Die Annahme war also falsch und es folgt die Behauptung. $\square$

BEMERKUNG 2.10. Mit dem Euklidischen Algorithmus und dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, daß sich jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ in ein Produkt von n Linearfaktoren zerlegen läßt.

DEFINITION 2.11. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$. Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$, so nennen wir z_0 eine *isolierte Singularität von f* . Diese heißt *hebbbar*, falls eine Funktion $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ existiert mit $f(z) = F(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.

SATZ 2.12 (Riemannscher Hebbbarkeitssatz). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Genau dann ist z_0 eine hebbare Singularität von f , wenn es ein $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ gibt, so daß

$$\sup_{0 < |z - z_0| \leq r} |f(z)| < \infty.$$

BEWEIS. $\Rightarrow$: Ist z_0 eine hebbare Singularität von f , so gibt es eine Funktion $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f \equiv F|_{\Omega \setminus \{z_0\}}$. Ist $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, so folgt wegen der Stetigkeit von F auf $\overline{D(z_0, r)}$:

$$\sup_{0 < |z - z_0| \leq r} |f(z)| \leq \sup_{|z - z_0| \leq r} |F(z)| < \infty.$$

$\Leftarrow$: Sei nun ein $r > 0$ gegeben mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ und gelte

$$M := \sup_{0 < |z - z_0| \leq r} |f(z)| < \infty.$$

Wir definieren

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in \Omega \setminus D(z_0, r) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw & \text{für } z \in D(z_0, r) \end{cases}$$

und zeigen $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ sowie $F(z) = f(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Sei $z_0 \neq z \in D(z_0, r)$ beliebig. Für $0 < \varepsilon < |z - z_0|$ ist $E_\varepsilon := \overline{D(z_0, r)} \setminus D(z_0, \varepsilon)$ ein Greenscher Bereich und wir

erhalten aus der Cauchyschen Integralformel (Satz 2.2):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, \varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= F(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon \exp(i\varphi))}{z_0 + \varepsilon \exp(i\varphi) - z} i\varepsilon \exp(i\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Abschätzung des Integrals auf der rechten Seite:

$$|F(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{\text{dist}(z, D(z_0, \varepsilon))} M \rightarrow 0$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ (wegen $\text{dist}(z, D(z_0, \varepsilon)) \rightarrow |z - z_0|$). Also folgt $F \equiv f$ auf $\Omega \setminus \{z_0\}$. Insbesondere ist F dort auch holomorph. Nach Folgerung 1.12 ist F auch auf $D(z_0, r)$ holomorph und es folgt $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. Also ist z_0 eine hebbare Singularität von f . $\square$

Eine weitere interessante Eigenschaft der holomorphen Funktionen ist die Mittelwerteigenschaft:

DEFINITION 2.13. Wir sagen: Eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ stetige komplexwertige Funktion f hat die *Mittelwerteigenschaft* auf Ω , falls für alle $w \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\overline{D(w, r)} \subset \Omega$ gilt:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + r \exp(i\varphi)) d\varphi. \quad (2.4)$$

SATZ 2.14. Sei f eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Dann haben $f, \bar{f}, \text{Re}(f)$, und $\text{Im}(f)$ die Mittelwerteigenschaft.

BEWEIS. Seien also $w \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{D(w, r)} \subset \Omega$ beliebig. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(w, r)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + r \exp(i\varphi)) d\varphi,$$

wobei wir $\partial_+ D(w, r)$ parametrisiert haben durch $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(\varphi) := w + r \exp(i\varphi)$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Also hat f die Mittelwerteigenschaft. Geht, man in (2.4) zum konjugiert-komplexen bzw. zum Real- bzw. zum Imaginärteil über, so erhält man die verbleibenden Behauptungen. $\square$

SATZ 2.15 (Lokale Form des Maximumprinzips). Sei f eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ stetige $\mathbb{C}$ -wertige Funktion, die auf Ω die Mittelwerteigenschaft habe. Besitzt $|f|$ in einem Punkt $w \in \Omega$ eine lokale Maximumsstelle (d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(z)| \leq |f(w)|$ für alle $z \in D(w, \varepsilon)$), so ist f schon in einer Umgebung von w konstant.

BEWEIS. Sei $w \in \Omega$ eine Maximumsstelle von $|f|$. Im Fall $f(w) = 0$ ist die Aussage trivial. Sei nun $f(w) \neq 0$. Indem wir notfalls statt f die Funktion $z \mapsto f(z)/f(w)$ betrachten, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(w) = 1$ annehmen. Da w eine Maximumsstelle von $|f|$ ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\overline{D(w, R)} \subseteq \Omega$ und $|f(z)| \leq |f(w)| = 1$ für alle $z \in \overline{D(w, R)}$. Für $0 < r \leq R$ setzen wir

$$M(r) := \sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(w + r \exp(i\varphi))| \leq 1 = f(w).$$

Da f auf Ω die Mittelwerteigenschaft besitzt, gilt für $0 < r \leq R$:

$$\begin{aligned} M(r) &\leq 1 = f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + r \exp(i\varphi)) d\varphi \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + r \exp(i\varphi)) d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(w + r \exp(i\varphi))) d\varphi \\ &\leq M(r). \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= f(w) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(w + r \exp(i\varphi))) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(w) - \operatorname{Re}(f(w + r \exp(i\varphi)))) d\varphi. \end{aligned}$$

Wegen $f(w) - \operatorname{Re}(f(w + r \exp(i\varphi))) \geq 0$ für $0 < r \leq R$ ist dies nur möglich, wenn $\operatorname{Re}(f(w + r \exp(i\varphi))) = f(w) = 1$ für alle $r \leq R$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Aus

$$\begin{aligned} 1 &= f(w)^2 = M(r)^2 \geq |f(w + r \exp(i\varphi))|^2 \\ &= \operatorname{Re}(f(w + r \exp(i\varphi)))^2 + \operatorname{Im}(f(w + r \exp(i\varphi)))^2 \\ &= 1 + \operatorname{Im}(f(w + r \exp(i\varphi)))^2 \end{aligned}$$

folgt auch $\operatorname{Im}(f(w + r \exp(i\varphi))) = 0$ für alle $r \leq R$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, d.h. es gilt $f(z) = f(w) = 1$ für alle $z \in D(w, R)$. $\square$

Auf beschränkten Gebieten gilt auch eine globale Form des Maximumprinzips:

SATZ 2.16 (Globale Form des Maximumprinzips). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und sei $f \in C(\overline{G}, \mathbb{C})$ eine Funktion, die auf G die Mittelwerteigenschaft besitze. Dann gilt:*

$$\forall w \in G : |f(w)| \leq \|f\|_{\partial G} = \max_{z \in \partial G} |f(z)|. \quad (2.5)$$

Gibt es ein $w \in G$ mit $|f(w)| = \|f\|_{\partial G}$, so ist f schon auf $\overline{G}$ konstant.

BEWEIS. Wegen $\partial G \subset \overline{G}$ ist $\|f\|_{\partial G} \leq \|f\|_{\overline{G}}$. Da $\overline{G}$ kompakt ist gibt es ein $w \in \overline{G}$ mit $|f(w)| = \|f\|_{\overline{G}}$. Sei nun

$$A := \{z \in G; |f(z)| = |f(w)|\}.$$

Wegen der Stetigkeit von f ist A abgeschlossen in $(G, d_{|\cdot|}|_{G \times G})$ und nach der lokalen Form des Maximumprinzips aber auch offen. Da G zusammenhängend ist, muß $A = \emptyset$ oder $A = G$ gelten. Im letzteren Fall ist mit festem $z_0 \in G$ die Menge $B := \{z \in G; f(z) = f(z_0)\}$ nach der lokalen Form des Maximumprinzips offen, nicht leer und wegen der Stetigkeit von f auch abgeschlossen in $(G, d_{|\cdot|}|_{G \times G})$. Also ist $B = G$ und daher f auf G (und damit auch auf $\overline{G}$) konstant. Ist $A = \emptyset$ so ist $w \in \partial G$ eine Randmaximumsstelle. Damit folgen die Behauptungen. $\square$

BEMERKUNG 2.17. Die Voraussetzungen der Beschränktheit von G und der Stetigkeit von f auf $\overline{G}$ sind beide notwendig (wie Aufgabe 2.15 zeigt).

Eine wichtige Anwendung des Maximumprinzips ist das folgende Schwarzsche Lemma. Wie meistens werden wir mit $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe bezeichnen. Wir schreiben für deren Rand auch $\mathbb{T} := \partial \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

LEMMA 2.18 (von H. A. Schwarz). Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Dann gilt

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leq 1.$$

Ist $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h. es existiert ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = \exp(i\varphi)z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

BEWEIS. Die Funktion $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{für } 0 \neq z \in \mathbb{D} \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

ist nach Lemma 1.2 und Lemma 1.3 auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ holomorph und wegen der komplexen Differenzierbarkeit auch in 0 stetig. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 2.12) muß g also auf $\mathbb{D}$ holomorph sein. Wenden wir nun für $0 < \varepsilon < 1$ das Maximumprinzip 2.16 an auf die Funktion g und $G = D(0, 1 - \varepsilon)$, so folgt

$$|g(z)| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad \text{für } |z| \leq 1 - \varepsilon \text{ und alle } \varepsilon \in (0, 1).$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir also: $|g(z)| \leq 1$ auf $\mathbb{D}$ und damit auch $|f(z)| \leq |z|$ auf $\mathbb{D}$ und $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$. Ist $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D}$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat g in $\mathbb{D}$ eine Maximumsstelle z_0 , muß also (nach Satz 2.16) auf $D(0, 1 - \varepsilon)$ konstant sein für alle $\varepsilon \in (0, 1 - |z_0|)$. Die Funktion g ist also auf $\mathbb{D}$ konstant und vom Betrag 1. Es gibt also ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $g(z) \equiv \exp(i\varphi)$ auf $\mathbb{D}$. Hieraus folgt $f(z) \equiv \exp(i\varphi)z$ auf $\mathbb{D}$. $\square$

DEFINITION 2.19. Eine Abbildung $f : G \rightarrow G$ von einem Gebiet G in sich heißt *Automorphismus* von G , falls gilt

- (i) f ist bijektiv und
- (ii) f und f^{-1} sind holomorph auf G .

Mit $\text{Aut}(G)$ bezeichnen wir die Menge aller Automorphismen von G . Nach Lemma 1.3 ist die Hintereinanderausführung von Automorphismen von G wieder ein Automorphismus von G . Somit ist $\text{Aut}(G)$ eine Gruppe (als Untergruppe der Gruppe der bijektiven Abbildungen von G in sich mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung).

Mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas 2.18 können wir die Gruppe der Automorphismen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ vollständig bestimmen.

Für $a \in \mathbb{D}$ sei die Funktion $\phi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}. \quad (2.6)$$

Nach Lemma 1.3 ist ϕ_a auf $\mathbb{D}$ (und sogar auf $\mathbb{C} \setminus \{\bar{a}^{-1}\}$ bzw. – im Fall $a = 0$ – auf ganz $\mathbb{C}$) holomorph. Offensichtlich gilt

$$\phi_a(a) = 0, \phi_a(0) = -a, \phi_0(z) = z \quad \text{für alle } a, z \in \mathbb{D}. \quad (2.7)$$

Für $|z| = 1$ gilt:

$$|\phi_a(z)| = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \left| \frac{1}{\bar{z}} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \left| \frac{a - z}{\bar{z} - \bar{a}} \right| = 1.$$

Da ϕ_a nicht konstant auf $\mathbb{D}$ ist, folgt nach dem Maximumprinzip 2.16 $|\phi_a(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$, d.h. $\phi_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Ferner rechnet man für alle $a, b \in \mathbb{D}$ nach:

$$\begin{aligned} \phi_b(\phi_a(z)) &= \frac{\frac{z-a}{1-\bar{a}z} - b}{1 - \bar{b}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}} = \frac{(1+\bar{a}b)z - (a+b)}{1 + \bar{b}a - (\bar{a} + \bar{b})z} = \\ &= \frac{1+\bar{a}b}{1+\bar{a}\bar{b}} \cdot \frac{z - \left(\frac{b - (-a)}{1 - \overline{(-a)}b}\right)}{1 - \left(\frac{b - (-a)}{1 - \overline{(-a)}b}\right)z} = \frac{1+\bar{a}b}{1+\bar{a}\bar{b}} \cdot \frac{z - \phi_{-a}(b)}{1 - \overline{\phi_{-a}(b)}z} = \\ &= \frac{1+\bar{a}b}{1+\bar{a}\bar{b}} \phi_{\phi_{-a}(b)}(z), \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei der Vorfaktor

$$\frac{1+\bar{a}b}{1+\bar{a}\bar{b}}$$

eine Konstante vom Betrag 1 ist. Insbesondere folgt $\phi_{-a} \circ \phi_a = \text{id}_{\mathbb{D}}$. Wir haben also gezeigt:

$$\{\phi_a; a \in \mathbb{D}\} \subseteq \text{Aut}(\mathbb{D}).$$

Ferner enthält $\text{Aut}(\mathbb{D})$ als Untergruppe die Gruppe der Drehungen $\{\rho_\varphi; \varphi \in \mathbb{R}\}$, wobei $\rho_\varphi(z) := z \exp(i\varphi)$ sei für alle $z \in \mathbb{D}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Es zeigt sich nun, daß jeder Automorphismus von $\mathbb{D}$ schon Hintereinanderausführung von einer Drehung und einem gebrochen linearen Automorphismus wie in (2.6) ist.

SATZ 2.20. $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{\rho_\varphi \circ \phi_a; \varphi \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}\}$

BEWEIS. Sei also $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ beliebig vorgegeben. Dann ist mit $a := f^{-1}(0)$ auch $g := f \circ \phi_{-a} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ und es gilt (vergl. (2.7))

$$g(0) = f(\phi_{-a}(0)) = f(a) = 0.$$

Dann ist auch g^{-1} ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ mit $g^{-1}(0) = 0$. Nach dem Schwarzschen Lemma 2.18 gilt also insbesondere

$$|g'(0)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |(g^{-1})'(0)| \leq 1.$$

Wegen $g^{-1} \circ g = \text{id}_{\mathbb{D}}$ und $g(0) = 0$ erhalten wir mit der Kettenregel $(g^{-1})'(0)g'(0) = 1$. Also folgt $|g'(0)| = 1$ und daher aus dem Schwarzschen Lemma 2.18

$$f \circ \phi_{-a} = g = \rho_\varphi \quad \text{für ein } \varphi \in \mathbb{R}$$

und hieraus $f = \rho_\varphi \circ \phi_a$ (wegen $\phi_{-a}^{-1} = \phi_a$). □

Häufig ist auch die folgende invariante Form des Schwarzschen Lemmas von Nutzen.

SATZ 2.21 (Schwarz-Pick). *Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Dann gilt für alle $z, w \in \mathbb{D}$ mit $z \neq w$:*

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{1 - \overline{f(z)}f(w)} \right| \leq \left| \frac{w - z}{1 - \bar{z}w} \right| \quad (2.9)$$

sowie

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}. \quad (2.10)$$

Genau dann gibt es zwei Punkte $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ mit $z_0 \neq w_0$ bzw. einen Punkt $z_0 \in \mathbb{D}$, so daß in (2.9) oder (2.10) das Gleichheitszeichen gilt, wenn f ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ ist.

BEWEIS. Sei z ein beliebiger Punkt aus $\mathbb{D}$. Dann ist auch die Funktion $g_z := \phi_{f(z)} \circ f \circ \phi_{-z}$ auf $\mathbb{D}$ holomorph und erfüllt $g_z(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ sowie nach (2.7):

$$g_z(0) = (\phi_{f(z)} \circ f)(z) = \phi_{f(z)}(f(z)) = 0.$$

Nach dem Schwarzschen Lemma 2.18 folgt

$$|g_z(w)| \leq |w| \text{ auf } \mathbb{D} \quad \text{und} \quad |g'_z(0)| \leq 1. \quad (2.11)$$

Insbesondere folgt

$$|g_z(\phi_z(w))| \leq |\phi_z(w)| \quad \text{auf } \mathbb{D}.$$

Wegen $\phi_{-z} \circ \phi_z = \text{id}_{\mathbb{D}}$ ist dies (nach Definition von g_z) äquivalent zu

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{1 - \overline{f(z)}f(w)} \right| \leq \left| \frac{w - z}{1 - \overline{z}w} \right|.$$

Damit ist (2.9) gezeigt. Nach Division durch $w - z$ erhält man hieraus für $w \rightarrow z$ auch die Ungleichung (2.10).

Genau dann gilt für ein $w \neq z$ ($z, w \in \mathbb{D}$) in (2.9) das Gleichheitszeichen, wenn in der linken Ungleichung von (2.11) das Gleichheitszeichen gilt. Nach dem Schwarzschen Lemma 2.18 ist dann $g_z = \rho_\varphi$ eine Drehung (für ein $\varphi \in \mathbb{R}$) und es folgt, daß $f = \phi_{-f(z)} \circ g_z \circ \phi_z$ ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ sein muß. Ist umgekehrt $f = \rho_\psi \circ \phi_a$ ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ mit einem $a \in \mathbb{D}$ und einem $\psi \in \mathbb{R}$, (vergl. Satz 2.20), so folgt durch Einsetzen von $z_0 := a$ und beliebige von a verschiedene Punkte $w_0 \in \mathbb{D}$:

$$\left| \frac{f(w_0) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(w_0)} \right| = |\phi_a(w_0)| = \left| \frac{w_0 - z_0}{1 - \overline{z_0}w_0} \right|.$$

Für alle $u, z \in \mathbb{D}$ hat man

$$\phi'_u(z) = \frac{\bar{u}(z - u)}{(1 - \bar{u}z)^2} + \frac{1}{1 - \bar{u}z} = \frac{1 - |u|^2}{(1 - \bar{u}z)^2}$$

und damit insbesondere

$$\phi'_u(u) = \frac{1}{1 - |u|^2} \quad \text{und} \quad \phi'_u(0) = 1 - |u|^2.$$

Mit der Kettenregel berechnet man hiermit:

$$\begin{aligned} |g'_z(0)| &= |\phi'_{f(z)}(f(\phi_{-z}(0)))| \cdot |f'(\phi_{-z}(0))| \cdot |\phi'_{-z}(0)| \\ &= \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \cdot (1 - |z|^2). \end{aligned}$$

Genau dann gilt also in (2.10) das Gleichheitszeichen, wenn in der rechten Ungleichung von (2.11) das Gleichheitszeichen gilt. Nach dem Schwarzschen Lemma 2.18 ist dann $g_z = \rho_\varphi$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$ und daher (wie oben) f ein Automorphismus von $\mathbb{D}$. Ist umgekehrt $f = \rho_\varphi \circ \phi_u \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, so folgt (wegen $f(u) = 0$)

$$\frac{|f'(u)|}{1 - |f(u)|^2} = |f'(u)| = |\phi'_u(u)| = \frac{1}{1 - |u|^2}.$$

□

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.

AUFGABE 2.1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (a) $\int_{\partial D(2i,1)} \frac{z^{2006} + 1}{z \exp(z)} dz,$
 (b) $\int_{\partial D(1,2)} \frac{z^{2006} + 1}{z \exp(z)} dz,$
 (c) $\int_{\partial D(1,3)} \frac{\sin(z)}{(1+z)^{2007}} dz.$

Was ist, wenn Sie in (a) den Kreisrand durch den Rand des von den Punkten 3 , $-1-i$ und $-1+2i$ aufgespannten Dreiecks ersetzen?

AUFGABE 2.2. Für offene und beschränkte Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $A(\Omega)$ die Menge aller auf $\bar{\Omega}$ stetigen und auf Ω holomorphen Funktionen.

Sei $R > 0$ und $f \in A(D(0, R))$. Zeigen Sie:

$$\forall z \in D(0, R) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Hinweis: Definieren Sie für $0 \leq r \leq 1$ die Funktion $f_r : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f_r(z) := f(rz)$ und wenden Sie auf f_r für $0 \leq r < 1$ die Cauchysche Integralformel an (wieso ist dies erlaubt?). Nutzen Sie dann die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $(r, z) \mapsto f(rz)$ aus. (Wieso liegt gleichmäßige Stetigkeit vor?)

AUFGABE 2.3. Sei $R > 0$ und sei $f \in A(D(0, R))$. Beweisen Sie die Poissonsche Integralformel

$$\forall z \in D(0, R) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \cdot \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\zeta$$

Hinweis: Definieren Sie für festes $w \in D(0, R)$ die Funktion $g \in A(D(0, R))$ durch

$$g(z) := \frac{f(z)}{R^2 - \bar{w}z} \quad \text{für alle } z \in D(0, R)$$

und wenden Sie auf diese Aufgabe 2.2 an. Setzen Sie anschließend $w := z$ für festes $z \in D(0, R)$.

AUFGABE 2.4. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und sei $p \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom vom Grad n . Zeigen Sie:

(a) Ist $C > 0$ und gilt

$$|f(z)| \leq C|p(z)| \tag{2.12}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f = \lambda p$.

(b) Gibt es Konstanten $R > 0$ und $C > 0$, so daß (2.12) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

AUFGABE 2.5. Sei f eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion und sei z_0 ein Punkt aus Ω . Beweisen Sie: z_0 ist genau dann eine lokale Minimumstelle von $|f|$, wenn $f(z_0) = 0$ gilt oder f in einer Umgebung von z_0 konstant ist.

AUFGABE 2.6. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $\lim_{|z| \rightarrow 1} f(z) = 0$. Zeigen Sie, daß $f \equiv 0$ auf $\mathbb{D}$ gilt.

AUFGABE 2.7. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und sei $z_0 \in \mathbb{D}$. Für alle $z \in \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$, setzt man

$$\varphi(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \cdot \frac{1 - \bar{z}_0 z}{z - z_0}.$$

Zeigen Sie:

- (a) z_0 ist eine hebbare Singularität von φ .
- (b) Für $z \in \mathbb{D}$ gilt $|\varphi(z)| \leq 1$.
- (c) Was können Sie über f aussagen, wenn $|\varphi(z)| = 1$ in einem Punkt $z \in \mathbb{D}$ gilt?

AUFGABE 2.8. Seien $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, so daß für zwei voneinander verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{D}$ gilt $f(a) = a, f(b) = b$. Zeigen Sie:

- (a) f ist ein Automorphismus von $\mathbb{D}$.
- (b) $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

AUFGABE 2.9. (a) Zeigen Sie, daß $\text{Aut}_0(\mathbb{D}) := \{\phi \in \text{Aut}(\mathbb{D}); \phi(0) = 0\}$ eine Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{D})$ ist.

- (b) Für $\lambda \in \mathbb{T}$ sei $\psi_\lambda : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ definiert durch $\psi_\lambda(z) := \lambda z$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\lambda \mapsto \psi_\lambda$ ein Gruppenisomorphismus ist.
- (c) Zeigen Sie, daß für jede Untergruppe H von $\text{Aut}(\mathbb{D})$ mit $\text{Aut}_0(\mathbb{D}) \subseteq H$ gilt: $H = \text{Aut}_0(\mathbb{D})$ oder $H = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $\phi_a \in H$ für ein $0 \neq a \in \mathbb{D}$, so folgt $\phi_b \in H$ für alle $b \in \mathbb{D}$ mit $|b| = |a|$ und $\phi_c \in H$ mit $c := \phi_{|a|}(\lambda|a|)$ für alle $\lambda \in \mathbb{T}$. Überlegen Sie sich weiter, daß dann ein $s \in (0, 1)$ existiert, so daß $\phi_d \in H$ für alle $d \in \mathbb{D}$ mit $0 < |d| < s$ gilt.

AUFGABE 2.10. Für $z, w \in \mathbb{D}$ sei $\phi_z(w) := \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$. Zeigen Sie:

- (a) $1 - |\phi_z(w)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \bar{z}w|^2}$.
- (b) Für die Determinante der Jacobi-Matrix von ϕ_z im Punkt w gilt:

$$\det(J_{\phi_z}) = \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \bar{z}w|^4}.$$

- (c) Durch

$$\rho(z, w) := |\phi_z(w)| = \frac{|w - z|}{|1 - \bar{z}w|} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{D}$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{D}$ gegeben. ρ heißt die *pseudo-hyperbolische Metrik* auf $\mathbb{D}$.

- (d) Alle Automorphismen von $\mathbb{D}$ sind Isometrien bezüglich der pseudo-hyperbolischen Metrik. Für alle $z, w \in \mathbb{D}$ und alle $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ gilt also $\rho(\phi(z), \phi(w)) = \rho(z, w)$.
- (e) Für alle $z \in \mathbb{D}$ und $0 < r < 1$ ist die pseudo-hyperbolische Kreisscheibe

$$\Delta(z, r) := \{w \in \mathbb{D}; \rho(z, w) < r\}$$

mit dem pseudo-hyperbolischen Mittelpunkt z und dem pseudo-hyperbolischen Radius r gleich der euklidischen Kreisscheibe $D(Z, R)$ ist mit dem euklidischen Mittelpunkt

$$Z := \frac{1 - r^2}{1 - r^2|z|^2} z$$

und dem euklidischen Radius

$$R := \frac{1 - |z|^2}{1 - r^2|z|^2} r.$$

AUFGABE 2.11. Wir definieren Funktionen $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\psi : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) := \frac{z - i}{z + i} \quad \text{und} \quad \psi(z) := i \frac{1 + z}{1 - z}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ bzw. $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie:

- (a) φ und ψ sind holomorph und invers zueinander.

- (b) $1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{4\operatorname{Im}z}{|z+i|^2}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.
 (c) $\operatorname{Im}\psi(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
 (d) $\psi(\mathbb{D}) = \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}z > 0\}$ und $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$.
 (e) Berechnen Sie $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$.

AUFGABE 2.12. Sei $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ ein Polynom vom Grad n mit dem Höchstkoeffizienten $a_n = 1$. Zeigen Sie:

- (a) $\max_{z \in \mathbb{D}} |p(z)| \geq 1$
 (b) Genau dann gilt in (a) das Gleichheitszeichen, wenn $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, d.h. wenn $p(z) = z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die durch $p^*(z) := z^n p(\frac{1}{z})$ für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ definierte Funktion.

AUFGABE 2.13. Zeigen Sie die folgende Variante der Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen für das ebene Lebesguemaß: Ist f auf der offenen Kreisscheibe $D(w, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$ holomorph und bezüglich des ebenen Lebesguemaßes λ_2 integrierbar, so gilt

$$f(w) = \frac{1}{\pi} \int_{D(w,r)} f(\zeta) d\lambda_2(z).$$

Hinweis: Polarkoordinaten und Verwendung der Mittelwerteigenschaft.

AUFGABE 2.14. Sei $a \in \mathbb{D}$, $\alpha > -1$ und sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist $z \mapsto f(z)(1 - |z|^2)^\alpha$ auf $\mathbb{D}$ integrierbar, so gilt:

- (a) $f(0) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(w)(1 - |w|^2)^\alpha d\lambda_2(w)$.
 (b) $f(a) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{(1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - \bar{z}a)^{\alpha+2}} d\lambda_2(z)$.

Hinweis: (a) zeigt man wie in Aufgabe 2.13.

Zu (b): Wenden Sie (a) an auf $f \circ \phi_{-a}$ statt f und führen Sie anschließend in dem Integral die Substitution $w = \phi_a(\zeta)$ durch. Dabei sind die Teile (a) und (b) von Aufgabe 2.10 nützlich. Die so gewonnene Formel für $f(a)$ wenden Sie sodann auf die Funktion $z \mapsto f(z)(1 - \bar{a}z)^{\alpha+2}$ statt f an und lösen nach $f(a)$ auf.

AUFGABE 2.15. Abgrenzende Beispiele zum Maximumprinzip:

- (a) Sei

$$f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

Zeigen Sie: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ mit

$$|f(z)| = 1 \quad (z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}),$$

wobei $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$. Ist f beschränkt auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$?

- (b) Die Menge

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}z > 0\}$$

ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$.

Geben Sie eine stetige, unbeschränkte Funktion $f: \mathbb{H}^- \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f|_{\mathbb{H}} \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ an, die auf $\partial\mathbb{H}$ beschränkt ist.

Lokale Existenz von Stammfunktionen

Wir hatten in Folgerung 2.6 gesehen, daß jede auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ stetige komplexwertige Funktion, die eine komplexe Stammfunktion besitzt, schon auf Ω holomorph ist. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß die holomorphen Funktionen gerade dadurch charakterisiert sind, daß sie lokal eine komplexe Stammfunktion besitzen. Wir beginnen mit einer Charakterisierung von komplexen Stammfunktionen.

SATZ 3.1. *Sei f eine auf einer offenen Menge Ω stetige, komplexwertige Funktion. Für eine Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

- (a) *F ist Stammfunktion von f auf Ω .*
- (b) *Für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

BEWEIS. Ist F Stammfunktion zu f auf Ω , d.h. ist F komplex differenzierbar mit $F' \equiv f$, und ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in Ω , so folgt nach Definition des Wegintegrals

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt (b) erfüllt und sei $z_0 \in \Omega$ beliebig. Wir fixieren ein $r > 0$ mit $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ und definieren eine Funktion $F_1 : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F_1(z) := \begin{cases} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z_0 \neq z \in D(z_0, r) \\ f(z_0) & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Nach Definition der komplexen Ableitung ist F genau dann in z_0 komplex differenzierbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$, wenn die Funktion F_1 in z_0 stetig ist. Sei daher $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von f gibt es dann ein $\delta \in (0, r)$, so daß für alle $z \in D(z_0, \delta)$ gilt: $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Damit folgt für alle $w \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ mit $\gamma(t) := z_0 + t(w - z_0)$ für $0 \leq t \leq 1$ unter Verwendung von (b):

$$\begin{aligned} |F_1(w) - F_1(z_0)| &= \left| \frac{F(w) - F(z_0)}{w - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{w - z_0} \int_{\gamma} f(z) dz - f(z_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{w - z_0} \int_{\gamma} (f(z) - f(z_0)) dz \right| \\ &\leq \frac{L(\gamma)}{|w - z_0|} \max_{z \in \text{Spur}(\gamma)} |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

F_1 ist also in z_0 stetig und daher F in z_0 komplex differenzierbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$. $\square$

Wir nennen einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Aus Satz 3.1 erhalten wir unmittelbar:

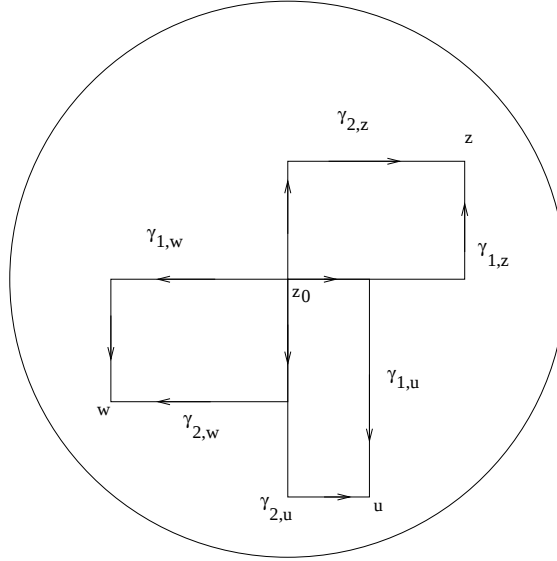


ABBILDUNG 1. Zum Beweis von Satz 3.3

FOLGERUNG 3.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Besitzt $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$ auf Ω eine komplexe Stammfunktion, so gilt für alle geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Wege γ in Ω :

$$\int_{\gamma} f(z) = 0.$$

Die Funktion $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(z) := 1/z$ für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph aber es gilt nach Lemma 1.19

$$\int_{\partial_+ D(0,1)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Wegen Folgerung 3.2 kann h keine komplexe Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ haben. Holomorphe Funktionen besitzen also im Allgemeinen keine globalen komplexen Stammfunktionen.

Es folgt ein Kriterium für die lokale Existenz von Stammfunktionen.

SATZ 3.3. Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f \in C(D(z_0, r), \mathbb{C})$. Gilt für jedes achsenparallele Rechteck $R = \overline{R} \subset D(z_0, r)$ die Aussage

$$\int_{\partial_+ R} f(z) dz = 0,$$

so besitzt f auf $D(z_0, r)$ eine komplexe Stammfunktion.

BEWEIS. Für $z = x + iy \in D(z_0, r)$ ist das von den Punkten z_0 und z aufgespannte abgeschlossene, achsenparallele Rechteck R_z ganz in $D(z_0, r)$ enthalten. Wir betrachten die beiden folgenden Wege $\gamma_{1,z}, \gamma_{2,z} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ von z_0 nach z mit

$$\gamma_{1,z}(t) := \begin{cases} z_0 + 2t(x - x_0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ x + i(y_0 + (2t - 1)(y - y_0)) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

und

$$\gamma_{2,z}(t) := \begin{cases} z_0 + 2it(y - y_0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ x_0 + (2t - 1)(x - x_0) + iy & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\gamma_{1,z} - \gamma_{2,z} = \pm \partial_+ R_z$ (je nach Lage des Punktes z , vergl. Abbildung 1). Nach Voraussetzung erhalten wir also

$$\int_{\gamma_{1,z}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{2,z}} f(\zeta) d\zeta = \pm \int_{\partial_+ R_z} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Wir definieren daher für alle $z \in D(z_0, r)$

$$F(z) := \int_{\gamma_{1,z}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_{2,z}} f(\zeta) d\zeta,$$

und zeigen, daß die so definierte Funktion $F : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ Stammfunktion zu f auf $D(z_0, r)$ ist. Für $z \in D(z_0, r)$ und $h \rightarrow 0$ (in $\mathbb{R}$) hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &= \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{2,z+h}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{2,z}} f(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h dt = \int_0^1 f(z+th) dt \rightarrow f(z). \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+ih) - F(z)) &= \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{1,z+ih}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{1,z}} f(\zeta) d\zeta \right) \\ &= i \int_0^1 f(z+ith) dt \rightarrow if(z). \end{aligned}$$

Die Funktion F ist also auf $D(z_0, r)$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y}(z) = f(z) \quad (3.1)$$

für alle $z \in D(z_0, r)$ und erfüllt $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, ist also holomorph. Wegen (3.1) folgt auch $F' \equiv f$ auf $D(z_0, r)$. $\square$

Als Folgerung erhalten wir nun:

SATZ 3.4 (von Morera). *Für eine auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ stetige komplexwertige Funktion f sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) *Für jedes $z \in \Omega$ und jedes $r > 0$ mit $D(z, r) \subseteq \Omega$ besitzt f auf $D(z, r)$ eine komplexe Stammfunktion.*
- (b) *Zu jedem $z \in \Omega$ gibt es ein $r > 0$ mit $D(z, r) \subseteq \Omega$, so daß f auf $D(z, r)$ eine komplexe Stammfunktion besitzt.*
- (c) *f ist auf Ω holomorph.*
- (d) *Für jedes achsenparallele Rechteck $R = \bar{R} \subset \Omega$ gilt*

$$\int_{\partial_+ R} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

BEWEIS. Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) ist trivial, (b) $\Rightarrow$ (c) gilt nach Folgerung 2.6, (c) $\Rightarrow$ (d) folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz 1.18 und (d) $\Rightarrow$ (a) aus dem eben gezeigten Satz 3.3 $\square$

SATZ 3.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *f ist auf Ω holomorph.*
- (b) *f ist auf Ω stetig komplex differenzierbar.*
- (c) *f ist auf Ω komplex differenzierbar.*

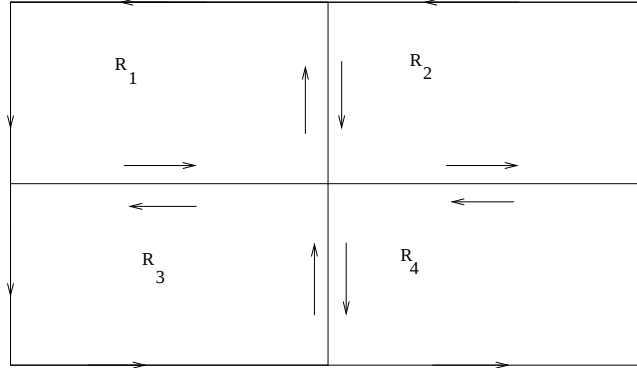


ABBILDUNG 2. Zum Beweis von Satz 3.5

BEWEIS. Die Äquivalenz von (a) und (b) haben wir bereits in Satz 1.6 bewiesen. Da (c) trivial aus (b) folgt bleibt also nur noch zu zeigen:

(c) $\Rightarrow$ (a) (Satz von Goursat): Sei also $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf Ω komplex differenzierbar. Dann ist f insbesondere stetig auf Ω . Wegen Satz 3.4 genügt es also zu zeigen, daß für jedes achsenparallele Rechteck $R = \overline{R} \subset \Omega$ gilt:

$$\alpha(R) := \int_{\partial_+ R} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (3.2)$$

Wir zerlegen hierzu R durch Halbierung der Seiten in vier achsenparallele Rechtecke R_1, R_2, R_3, R_4 , deren Inneres paarweise disjunkt ist, so daß $R = \bigcup_{j=1}^4 R_j$ und $\partial_+ R = \sum_{j=1}^4 \partial_+ R_j$ (vergl. Abbildung 2). Es gilt also

$$|\alpha(R)| = \left| \int_{\partial_+ R} f(\zeta) d\zeta \right| = \left| \sum_{j=1}^4 \int_{\partial_+ R_j} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \sum_{j=1}^4 |\alpha(R_j)|.$$

Unter den Rechtecken R_1, R_2, R_3, R_4 gibt es also wenigstens eines, welches wir mit $R^{(1)}$ bezeichnen, mit

$$|\alpha(R^{(1)})| \geq \frac{1}{4} |\alpha(R)|.$$

Wir unterteilen nun $R^{(1)}$ ebenfalls durch Halbierung der Seiten in vier achsenparallele Rechtecke $R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}, R_4^{(1)}$, unter denen wir dann wie oben eines (mit $R^{(2)}$ bezeichnet) finden, für das gilt:

$$|\alpha(R^{(2)})| \geq \frac{1}{4} |\alpha(R^{(1)})| \geq \frac{1}{4^2} |\alpha(R)|.$$

Für den Durchmesser erhält man

$$d(R^{(2)}) = \frac{1}{2} d(R^{(1)}) = \frac{1}{2^2} d(R)$$

und für den Umfang

$$L(\partial_+ R^{(2)}) = \frac{1}{2} L(\partial_+ R^{(1)}) = \frac{1}{2^2} L(\partial_+ R).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir induktiv eine Folge $(R^{(n)})_{n=1}^\infty$ von abgeschlossenen, achsenparallelen Rechtecken mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $R^{(n+1)} \subset R^{(n)}$,
- (b) $d(R^{(n)}) = 2^{-n} d(R)$,
- (c) $L(\partial_+ R^{(n)}) = 2^{-n} L(\partial_+ R)$ und
- (d) $|\alpha(R^{(n)})| \geq 4^{-n} |\alpha(R)|$.

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Cantorsche Durchschnitssatz (oder auch einfach dem Intervallschachtelungssatz) gibt es also genau einen Punkt $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} R^{(n)}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $z \in \Omega$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Zu δ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(R^{(n)}) < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Damit erhalten wir (unter Verwendung von (2) – (4)):

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha(R)|}{4^n} &\leq |\alpha(R^{(n)})| = \left| \int_{\partial_+ R^{(n)}} f(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \left| \int_{\partial_+ R^{(n)}} f(z_0) + (\zeta - z_0)f'(z_0) + \right. \\ &\quad \left. + (\zeta - z_0) \left(\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} - f'(z_0) \right) d\zeta \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \int_{\partial_+ R^{(n)}} f(z_0) + (\zeta - z_0)f'(z_0) d\zeta \right|}_{=0 \text{ nach Satz 1.18}} + \\ &\quad + \left| \int_{\partial_+ R^{(n)}} (\zeta - z_0) \left(\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} - f'(z_0) \right) d\zeta \right| \\ &\leq d(R^{(n)}) \varepsilon L(\partial_+ R^{(n)}) \\ &\leq \frac{\varepsilon d(R)}{4^n} L(\partial_+ R). \end{aligned}$$

Also folgt $|\alpha(R)| \leq \varepsilon d(R) L(\partial_+ R)$ für alle $\varepsilon > 0$. Damit ist (3.2) gezeigt und der Satz bewiesen. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.

AUFGABE 3.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes 3.4 von Morera: Ist f eine auf Ω stetige und auf $\Omega \setminus L$ holomorphe Funktion, so ist f schon auf ganz Ω holomorph.

AUFGABE 3.2 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und symmetrisch zur reellen Achse, d.h. es gilt $\bar{z} \in \Omega$ für alle $z \in \Omega$.

Zeigen Sie: Ist f eine auf $\Omega_+ := \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z \geq 0\}$ stetige, auf $\Omega \cap \mathbb{R}$ reellwertige und auf $\Omega_+^0 := \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z > 0\}$ holomorphe Funktion, so wird durch

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in \Omega_+ \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } \bar{z} \in \Omega_+^0 \end{cases}$$

eine auf ganz Ω holomorphe Funktion $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

Folgen und Reihen holomorpher Funktionen

Wir erinnern zunächst an einige Aussagen und Begriffe bzgl. der Konvergenz von Folgen stetiger Funktionen. Im folgenden sei $\mathbb{K}$ stets der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen.

DEFINITION 4.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{K}^N$ eine offene Menge. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n=0}^\infty$ in $C(\Omega, \mathbb{C})$ heißt *kompakt konvergent* (oder *Cauchy-Folge bezüglich der kompakten Konvergenz*) auf Ω , falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$, die Folge $(f_n|_K)_{n=0}^\infty$ der Restriktionen auf K eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist, d.h., falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \quad \|f_n - f_m\|_K = \max_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Die Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ heißt *kompakt konvergent gegen* eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, falls für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad \|f_n - f\|_K < \varepsilon.$$

Eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty g_n$ von stetigen Funktionen heißt *kompakt konvergent* auf Ω , falls die Folge ihrer Partialsummen auf Ω kompakt konvergent ist.

LEMMA 4.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{K}^N$ offen. Für eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ in $C(\Omega, \mathbb{C})$ gilt:

- (a) $(f_n)_{n=0}^\infty$ ist genau dann kompakt konvergent auf Ω , wenn es zu jedem $z \in \Omega$ ein $r > 0$ gibt mit $\overline{D(z, r)} \subset \Omega$, so daß $(f_n|_{\overline{D(z, r)}})_{n=0}^\infty$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $\overline{D(z, r)}$ ist.
- (b) Ist $(f_n)_{n=0}^\infty$ kompakt konvergent auf Ω , so konvergiert $(f_n)_{n=0}^\infty$ schon kompakt auf Ω gegen eine stetige Grenzfunktion $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$.

BEWEIS. (a) Die Beweisrichtung „ $\implies$ “ ist klar, da $\overline{D(z, r)}$ für jedes $z \in \Omega$ und jedes $r > 0$ kompakt ist.

Ist umgekehrt die Bedingung in (a) erfüllt und K eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω , so gibt es nach Voraussetzung zu jedem $z \in K$ ein $r(z) > 0$ mit $\overline{D(z, r(z))} \subset \Omega$, so daß $(f_n|_{\overline{D(z, r(z))}})_{n=0}^\infty$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $\overline{D(z, r(z))}$ ist. $(\overline{D(z, r(z))})_{z \in K}$ ist dann eine offene Überdeckung von K , aus der wir wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $(\overline{D(z_j, r(z_j))})_{j=1}^m$ auswählen können. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und $j = 1, \dots, m$ gibt es dann ein $n_j \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k, n \geq n_j$ gilt: $\|f_k - f_n\|_{\overline{D(z_j, r(z_j))}} < \varepsilon$. Für alle $w \in K$ gilt dann mit $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_m\}$:

$$\forall k, n \geq n_0 : \quad |f_k(w) - f_n(w)| < \varepsilon.$$

Also ist $(f_n|_K)_{n=0}^\infty$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf K .

(b) Aus der kompakt gleichmäßigen Konvergenz folgt insbesondere, daß für jedes $z \in \Omega$ die skalare Folge $(f_n(z))_{n=0}^\infty$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist und daher gegen ein $f(z) \in \mathbb{C}$ konvergiert. Sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $z \in K$ und alle $k, n \geq n_0$ gilt: $|f_k(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3$. Für $n \rightarrow \infty$ ergibt dies

$$\forall k \geq n_0 \forall z \in K : \quad |f_k(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für jedes $z \in K$ gibt es wegen der Stetigkeit von f_{n_0} ein $\delta > 0$ so daß $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(w)| < \varepsilon/3$ für alle $w \in D(z, \delta) \cap K$. Dann folgt für alle $w \in D(z, \delta) \cap K$:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &\leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(w)| + |f_{n_0}(w) - f(w)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

f ist also auf allen kompakten Teilmengen K von Ω und damit auf ganz Ω stetig und die Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gegen f . $\square$

BEMERKUNG 4.3. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{K}^N$ offen. Dann gibt es eine Folge $(K_n)_{n=1}^\infty$ von kompakten Teilmengen von Ω mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad K_n \subset \text{int}(K_{n+1}) \subset K_{n+1} \subset \Omega = \bigcup_{k=1}^\infty K_k \quad (4.1)$$

(z.B. $K_n := \{z \in \Omega; \text{dist}(z, \mathbb{K}^N \setminus \Omega) \geq 1/n\} \cap \overline{D(0, n)}$). Eine Folge $(K_n)_{n=1}^\infty$ wie in (4.1) nennt man auch eine *kompakte Ausschöpfung* von Ω . Durch

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} \quad \text{für } f, g \in C(\Omega, \mathbb{C})$$

wird eine Metrik auf $C(\Omega, \mathbb{C})$ definiert. Eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ ist genau dann eine Cauchy-Folge bezüglich dieser Metrik, wenn sie kompakt konvergent ist (Beweis als Übung). Nach Lemma 4.2 ist $(C(\Omega, \mathbb{C}), d)$ also ein vollständiger metrischer Raum.

SATZ 4.4 (Weierstraß). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(f_n)_{n=0}^\infty$ eine kompakt konvergente Folge aus $\mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt:

- (a) Die nach Lemma 4.2 stetige Grenzfunktion f dieser Folge ist auf Ω holomorph.
- (b) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ für $n \rightarrow \infty$ mit kompakter Konvergenz.

BEWEIS. (a) Nach dem Satz 3.4 von Morera genügt es zu zeigen, daß für jedes achsenparallele Rechteck $R = \overline{R} \subset \Omega$ gilt:

$$\int_{\partial_+ R} f(z) dz = 0. \quad (4.2)$$

Sei also R ein solches Rechteck. Wegen $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ folgt nach dem Satz von Morera $\int_{\partial_+ R} f_n(z) dz = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial_+ R} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial_+ R} f(z) - f_n(z) dz \right| \\ &\leq L(\partial R) \|f - f_n\|_{\partial R} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $(f_n)_{n=0}^\infty$ gegen f auf der kompakten Menge ∂R . Also ist (4.2) für jedes achsenparallele abgeschlossene Rechteck in Ω erfüllt und f ist nach dem Satz von Morera auf Ω holomorph.

(b) Sei w in Ω beliebig und sei $r > 0$ mit $\overline{D(w, 2r)} \subset \Omega$. Nach der Ungleichung (2.3) in Teil (c) des Satzes 2.3 über die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel erhalten wir für die k -ten komplexen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \|f^{(k)} - f_n^{(k)}\|_{\overline{D(w, r)}} &\leq \frac{k! L(\partial D(w, 2r))}{2\pi \cdot \text{dist}(\overline{D(w, r)}, \partial D(w, 2r))^{k+1}} \|f - f_n\|_{\partial D(w, 2r)} \\ &\leq \frac{2k!}{r^k} \|f - f_n\|_{\partial D(w, 2r)} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.2 ist also die Folge $(f_n^{(k)})_{n=0}^\infty$ kompakt konvergent auf Ω gegen f . $\square$

Satz 4.4 besagt also insbesondere, daß $\mathcal{O}(\Omega)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(\Omega, \mathbb{C})$ (versehen mit der Metrik aus Bemerkung 4.3) ist und daß die Abbildung $f \mapsto f'$ eine bezüglich dieser Metrik stetige Abbildung von $\mathcal{O}(\Omega)$ in sich ist.

Wir erinnern im folgenden an einige Grundtatsachen über Potenzreihen. Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{C}$, so nennt man die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ eine *Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt z_0* und den Koeffizienten a_n , $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 4.5. *Ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ für ein $z_1 \neq z_0$ konvergent, so ist sie auf $D(z_0, |z_1 - z_0|)$ kompakt konvergent, stellt also nach dem Satz 4.4 (a) auf $D(z_0, |z_1 - z_0|)$ eine holomorphe Funktion f dar,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Wegen Satz 4.4 (b) dürfen wir gliedweise differenzieren und erhalten für die k -te komplexe Ableitung:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (z - z_0)^{n-k} \quad \text{für } |z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

mit kompakter Konvergenz auf $D(z_0, |z_1 - z_0|)$. Speziell für $z = z_0$ hat man also

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

BEWEIS. Sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von $D(z_0, |z_1 - z_0|)$. Dann ist

$$q := \frac{1}{|z_1 - z_0|} \max_{z \in K} |z - z_0| < 1.$$

Da die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(z_1 - z_0)^n$ nach Voraussetzung konvergiert, muß die Folge der Reihenglieder $(a_n(z_1 - z_0)^n)_{n=0}^\infty$ beschränkt sein in $\mathbb{C}$. Es gibt also ein $M > 0$ mit $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sup_{z \in K} |a_n(z - z_0)^n| = \sup_{z \in K} |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \cdot q^n.$$

Wegen $0 \leq q < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ also gleichmäßig absolut konvergent auf K (da $\sum_{n=0}^\infty Mq^n$ eine konvergente Majorante ist). Damit folgen die Behauptungen. $\square$

Satz 4.6. *Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ mit komplexen Koeffizienten und Entwicklungspunkt z_0 .*

- (a) *Es gibt ein $R \in [0, \infty]$, Konvergenzradius der Potenzreihe genannt, so daß gilt:*
- (i) *Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ ist auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D(z_0, R)$ gleichmäßig absolut konvergent, stellt also nach dem Satz 4.4 (a) auf $D(z_0, R)$ eine holomorphe Funktion dar.*
 - (ii) *In $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, R)}$ ist die Reihe divergent.*
- (b) (Cauchy–Hadamard) *Mit*

$$\mu := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe:

$$R = R_1 := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu = \infty \\ \infty & \text{falls } \mu = 0 \\ \frac{1}{\mu} & \text{falls } 0 < \mu < \infty. \end{cases}$$

BEWEIS. (a) Wir setzen

$$R := \sup \left\{ |z - z_0|; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ ist konvergent in } \mathbb{C} \right\} \in [0, \infty].$$

Im Fall $R = 0$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Sei nun $R > 0$ und $\emptyset \neq K \subset \Omega$, K kompakt. Dann ist $r := \max_{z \in K} |z - z_0| < R$. Es gibt also ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $r < |z_1 - z_0| \leq R$, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert. Nach Satz 4.5 ist also die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ auf K gleichmäßig absolut konvergent, so daß also (i) erfüllt ist. Da für $|z - z_0| > R$ die gegebene Potenzreihe schon nach Definition von R nicht konvergent ist, ist auch (ii) erfüllt.

(b) Ist $z_1 \in \mathbb{C}$, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert, so muß die Folge der Reihenglieder beschränkt sein. Es gibt also ein $M > 0$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M.$$

Also folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$|z_1 - z_0| \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{M} \rightarrow 1.$$

Nach Definition von R folgt also $R\mu \leq 1$ und damit $R \leq R_1$. Ist umgekehrt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R_1$, so gilt $\mu|z - z_0| < 1$, d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|^n < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergent. Also muß auch $R_1 \leq R$ und damit $R = R_1$ gelten. $\square$

Für das Konvergenzverhalten auf dem Rande $\partial D(z_0, R)$ des Konvergenzkreises ist keine allgemeine Aussage möglich.

DEFINITION 4.7. Eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definierte Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf Ω (komplex) *analytisch*, falls es zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $r > 0$ mit $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ gibt, so daß f in $D(z_0, r)$ durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt wird.

Es gilt nun

SATZ 4.8. Für eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definierte Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist auf Ω analytisch.
- (b) f ist auf Ω holomorph.
- (c) Die Funktion f ist auf Ω beliebig oft stetig komplex differenzierbar und wird auf jeder offenen Kreisscheibe $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ durch ihre (komplexe) Taylorreihe dargestellt, d.h. es gilt für alle $z \in D(z_0, r)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (4.3)$$

Auf jeder kompakten Kreisscheibe $\overline{D(z_0, \rho)} \subset \Omega$ ist die Taylorreihe gleichmäßig absolut konvergent.

- (d) Für alle $z_0 \in \Omega$ wird f in der größten noch in Ω enthaltenen offenen Kreisscheibe $D(z_0, r)$ um z_0 durch eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \geq r$ dargestellt.

BEWEIS. Die Implikationen (c) $\implies$ (d) und (d) $\implies$ (a) sind offensichtlich und wegen Satz 4.5 folgt (b) aus (a). Sei nun (b) erfüllt, d.h. f ist auf Ω holomorph. Sei $z_0 \in \Omega$ beliebig, sei $0 < r \leq \infty$ maximal gewählt mit $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ und sei $\rho \in (0, r)$ beliebig. Wir fixieren ein ρ_1 mit $\rho < \rho_1 < r$. Nach der Ungleichung (2.2) in Satz 2.3 (mit $K := \{z_0\}$ und $E := \overline{D(z_0, \rho_1)}$) gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{1}{\rho_1^n} \|f\|_{\partial D(z_0, \rho_1)}$$

und damit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|} \leq \frac{1}{\rho_1}.$$

Nach Satz 4.6 (b) ist also der Konvergenzradius R der Potenzreihe (4.3) größer oder gleich ρ_1 . Insbesondere konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $\overline{D(z_0, \rho)}$. Für alle $(w, z) \in \partial D(z_0, \rho_1) \times \overline{D(z_0, \rho)}$ gilt ferner

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n,$$

wobei die Reihe wegen $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| \leq \frac{\rho}{\rho_1} < 1$ sogar gleichmäßig auf $(w, z) \in \partial D(z_0, \rho_1) \times \overline{D(z_0, \rho)}$ konvergiert. Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel und der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel erhalten wir für alle $z \in \overline{D(z_0, \rho)}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, \rho_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, \rho_1)} \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\partial_+ D(z_0, \rho_1)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Also gilt (c). □

Man hätte also die Theorie der holomorphen Funktionen auch ausgehend von dem Begriff der Analytizität also, der lokalen Entwickelbarkeit in konvergente Potenzreihen, aufbauen können. Diesen Zugang zur Funktionentheorie nennt man den *Weierstraßschen Zugang zur Funktionentheorie*.

Mit Hilfe des Satzes 4.8 erhalten wir nun leicht die verschiedenen Fassungen des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen.

FOLGERUNG 4.9. Sei f eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Gibt es ein $z_0 \in G$, so daß

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z_0) = 0, \tag{4.4}$$

so ist f schon identisch verschwindend auf G .

BEWEIS. Wir setzen

$$A := \bigcap_{k=0}^{\infty} (f^{(k)})^{-1}(\{0\}) = \{w \in \Omega; f^{(k)}(w) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}$$

Dann ist A abgeschlossen in $(G, d_{|\cdot|}|_{G \times G})$, da $f^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ stetig ist. Nach Satz 4.8 ist A aber auch offen, denn ist $z_0 \in A$, so folgt für alle z aus einer offenen in G enthaltenen Kreisscheibe $D(z_0, r)$ um z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0$$

und damit auch $f^{(k)} \equiv 0$ auf $D(z_0, r)$, d.h. $D(z_0, r) \subseteq A$. Da G zusammenhängend ist und A nach Voraussetzung, nicht leer ist, muß also $A = G$ gelten und damit $f \equiv 0$ auf G . $\square$

SATZ 4.10. *Sei f eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe, nicht identisch verschwindende Funktion. Dann gibt es zu jedem $w \in G$ ein $m(w)$ (Vielfachheit oder Ordnung von w als Nullstelle von f genannt) und genau eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g(w) \neq 0$ und*

$$\forall z \in G: f(z) = (z - w)^{m(w)} g(z).$$

BEWEIS. Da f nicht identisch verschwindet, gilt nach Folgerung 4.9 für jedes $w \in G$:

$$m(w) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0; f^{(n)}(w) \neq 0\} = \min\{n \in \mathbb{N}_0; f^{(n)}(w) \neq 0\} < \infty.$$

Es folgt $f^{(k)}(w) = 0$ für $0 \leq k < m(w)$ und damit nach (4.3) in Satz 4.8 in einer Kreisscheibe $D(w, r) \subseteq G$

$$\begin{aligned} \forall z \in D(w, r): f(z) &= \sum_{n=m(w)}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z - w)^n \\ &= (z - w)^{m(w)} \sum_{n=m(w)}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z - w)^{n-m(w)}, \end{aligned}$$

wobei die Reihe

$$h(z) := \sum_{n=m(w)}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z - w)^{n-m(w)}$$

kompakt in $D(w, r)$ konvergiert. Also ist die durch

$$g(z) := \begin{cases} h(z) & \text{für } z \in D(w, r) \\ (z - w)^{-m(w)} f(z) & \text{für } z \in G \setminus \{w\} \end{cases}$$

auf G definierte Funktion wohldefiniert und auf G holomorph und leistet wegen

$$g(w) = \frac{f^{(m(w))}(w)}{m(w)!} \neq 0$$

das Gewünschte. Ist umgekehrt $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g(w) \neq 0$ und $f(z) \equiv (z - w)^m g(w)$, so folgt mit der Produktregel für die komplexe Differentiation $f^{(n)}(w) = 0$ für $0 \leq n < m$ und $f^{(m)}(w) = m!g(w) \neq 0$, d.h. $m = m(w)$. Die Eindeutigkeit von g ist klar. $\square$

DEFINITION 4.11. Sei f eine auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{C}$. Ein Punkt $z \in \Omega$ heißt a -Stelle von f , falls $f(z) = a$.

SATZ 4.12 (von der Isoliertheit der a -Stellen). *Sei $a \in \mathbb{C}$ und sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die nicht identisch a ist. Dann hat die Menge M_a der a -Stellen von f keinen Häufungspunkt in G .*

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist die Funktion $z \mapsto f(z) - a$ nicht identisch verschwindend. Sei $w \in G$ beliebig. Nach Satz 4.10 gibt es ein $m(w) \in \mathbb{N}_0$ und $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g(w) \neq 0$ und $f(z) - a \equiv (z - w)^{m(w)} g(z)$ auf G . Aus Stetigkeitsgründen gibt es (wegen $g(w) \neq 0$) ein $\delta > 0$ mit $g(z) \neq 0$ und damit auch $f(z) - a \neq 0$ für alle $z \in D(w, \delta) \setminus \{w\}$. Also kann w kein Häufungspunkt von M_a sein. $\square$

Als Folgerung erhalten wir:

SATZ 4.13 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). *Seien f und g zwei auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge von G , die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat. Gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in A$, so ist schon $f \equiv g$ auf G .*

BEWEIS. Wir wenden Satz 4.12 an auf die Funktion $f - g$ mit $a = 0$. $\square$

Für die Charakterisierung der relativkompakten Teilmengen von $\mathcal{O}(\Omega)$ für offene Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ benötigen wir den Satz von Arzelà–Ascoli, der eine solche Charakterisierung im Raum der stetigen Funktionen angibt.

SATZ 4.14 (Arzelà–Ascoli). *Sei $K \subset \mathbb{K}^N$ kompakt. Für eine Teilmenge $H \subset C(K, \mathbb{C})$ des Raums der stetigen Funktionen auf K sind äquivalent:*

- (a) *H ist relativkompakt, d.h. jede Folge aus H besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.*
- (b) *H ist punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, d.h.*

$$\forall x \in K : \sup_{h \in H} |h(x)| < \infty$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in K \forall h \in H : |x - y| < \delta \implies |h(x) - h(y)| < \varepsilon.$$

Zum Beweis verweisen wir auf die Standardliteratur zur Analysis wie z.B. das Buch von Kaballo [25]

Wir benötigen hier die folgende Variante, die sich aus Satz 4.14 herleiten läßt:

SATZ 4.15. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{K}^N$ offen. Für eine Teilmenge H von $C(\Omega, \mathbb{C})$ sind äquivalent:*

- (a) *H ist relativ kompakt in $C(\Omega, \mathbb{C})$, d.h. jede Folge aus H hat eine auf Ω kompakt konvergente Teilfolge.*
- (b) *H ist punktweise beschränkt und auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichgradig stetig.*

BEWEIS. Ist (a) erfüllt, so hat nach Definition der kompakten Konvergenz jede Folge aus H eine auf jeder kompakten Teilmenge K von Ω gleichmäßig konvergente Teilfolge. Insbesondere ist also $H|K := \{h|K; h \in H\}$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$ relativkompakt in $C(K, \mathbb{C})$. Wir erhalten also (b) indem wir den Satz 4.14 von Arzelà–Ascoli auf jede kompakte Teilmenge von Ω anwenden.

Sei nun umgekehrt (b) erfüllt und sei $(h_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge aus H . Wir fixieren eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n=1}^\infty$ von Ω (Verg. Bemerkung 4.3). Nach Satz 4.14 hat also die Folge $(h_n)_{n=1}^\infty$ eine auf K_1 gleichmäßig konvergente Teilfolge $(h_{n_1(k)})_{k=1}^\infty$. Ebenfalls nach Satz 4.14 hat $(h_{n_1(k)})_{k=1}^\infty$ eine auf K_2 gleichmäßig konvergente Teilfolge $(h_{n_2(k)})_{k=1}^\infty$. Induktiv finden wir auf diese Weise für alle $j \in \mathbb{N}$ Teilfolgen $(h_{n_j(k)})_{k=1}^\infty$ von $(h_n)_{n=1}^\infty$ so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

- (a) $(h_{n_j(k)})_{k=1}^\infty$ ist eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf K_j .
 (b) $(h_{n_{j+1}(k)})_{k=1}^\infty$ ist Teilfolge von $(h_{n_j(k)})_{k=1}^\infty$.

Dann ist die Folge $(g_k)_{k=1}^\infty = (h_{n_k(k)})_{k=1}^\infty$ eine Teilfolge von $(h_n)_{n=1}^\infty$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ ist $(h_{n_k(k)})_{k=j}^\infty$ Teilfolge von $(h_{n_j(k)})_{k=1}^\infty$. Insbesondere ist $(g_k)_{k=1}^\infty$ auf allen K_n eine gleichmäßige Cauchyfolge. Ist nun K eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω , so gilt wegen $K \subset \Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \text{int}(K_n)$ und der Kompaktheit von K schon $K \subseteq K_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Also ist $(g_k)_{k=1}^\infty$ auf $K_n \supset K$ und damit auf K eine gleichmäßige Cauchyfolge. $(g_k)_{k=1}^\infty$ ist also eine kompakt konvergente Teilfolge von $(h_n)_{n=1}^\infty$. Damit ist gezeigt, daß H relativkompakt in $C(\Omega, \mathbb{C})$ ist. $\square$

Wir kommen nun zu der angekündigten Charakterisierung der relativkompakten Teilmengen von $\mathcal{O}(\Omega)$.

SATZ 4.16 (von Montel). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine Teilmenge H von $\mathcal{O}(\Omega)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *H ist relativkompakt in $\mathcal{O}(\Omega)$ (bezüglich der von $C(\Omega, \mathbb{C})$ induzierten, in Bemerkung 4.3 definierten Metrik), d.h. jede Folge aus H besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge, welche nach dem Satz 4.4 von Weierstraß kompakt gegen eine auf Ω holomorphe Funktion konvergiert.*
 (b) *H ist lokalbeschränkt, d.h. für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ ist*

$$\sup_{h \in H} \|h\|_K < \infty.$$

BEWEIS. Ist (b) nicht erfüllt, so gibt es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ und eine Folge $(h_n)_{n=1}^\infty$ in H mit $\|h_n\|_K \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann kann aber die Folge $(h_n)_{n=1}^\infty$ keine Teilfolge besitzen die auf K eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_K$ ist. Also kann auch (a) nicht gelten. Damit ist die Implikation (a) $\implies$ (b) gezeigt.

Sei nun $H \subset \mathcal{O}(\Omega)$ lokalbeschränkt. Dann ist für alle $z \in \Omega$ die Menge $H(z) := \{h(z); h \in H\}$ (mit $K := \{z\}$) in $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach der Variante 4.15 des Satzes von Arzelà–Ascoli genügt es also zu zeigen, daß H auf jeder kompakten Teilmenge K von Ω gleichgradig stetig ist. Sei also K eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω . Dann gibt es nach Aufgabe 1.10 einen Greenschen Bereich $E \subset \Omega$ mit $K \subset \text{int}(E)$. Da E kompakt ist, folgt nach Voraussetzung:

$$M := \sup_{h \in H} \|h\|_E < \infty.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Mit $d := \text{dist}(K, \partial E) > 0$ und

$$\delta := \frac{2\pi d^2 \varepsilon}{L(\partial E)M + 1}$$

gilt für alle $z, w \in K$ mit $|z - w| < \delta$ und alle $h \in H$ unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel 2.2:

$$\begin{aligned} |h(z) - h(w)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial_+ E} h(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{L(\partial E)M}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial E} \left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \frac{L(\partial E)M}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial E} \frac{|z - w|}{|\zeta - z||\zeta - w|} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist H auf K gleichgradig stetig für alle kompakten $K \subset \Omega$ und punktwise beschränkt, hat also nach Satz 4.15 eine auf Ω kompakt konvergente Teilfolge, die dann nach Satz 4.4 auf Ω kompakt gegen eine auf Ω holomorphe Funktion konvergiert. $\square$

Als ein Anwendungsbeispiel zeigen wir:

FOLGERUNG 4.17. Sei $f \in L^1(\mathbb{D}, \lambda)$, λ das ebene Lebesgue-Maß. Dann gibt es eine Funktion $h_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $|h_0(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und

$$\left| \int_{\mathbb{D}} f(z) h_0(z) d\lambda(z) \right| = \sup_{h \in H} \left| \int_{\mathbb{D}} f(z) h(z) d\lambda(z) \right|,$$

wobei

$$H := \{h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}); \sup_{z \in \mathbb{D}} |h(z)| \leq 1\}$$

BEWEIS. Zur Abkürzung sei für alle $h \in H$:

$$L(h) := \int_{\mathbb{D}} f(z) h(z) d\lambda(z).$$

Sei nun $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus H mit $|L(h_n)| \rightarrow \sup_{h \in H} |L(h)|$ für $n \rightarrow \infty$. Da H sogar auf ganz $\mathbb{D}$ gleichmäßig beschränkt ist, hat die Folge $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ nach dem Satz von Montel eine Teilfolge $(h_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ welche gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}$ gegen eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion h_0 konvergiert. Wegen $|h_0(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |h_{n_k}(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$ folgt $h_0 \in H$. Ferner haben wir nach dem Satz von der dominanten Konvergenz:

$$|L(h_0)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{D}} f(z) h_{n_k}(z) d\lambda(z) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |L(h_{n_k})| = \sup_{h \in H} |L(h)|.$$

□

Übungsaufgaben zu Kapitel 4.

AUFGABE 4.1. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ offen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und sei $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω . Ferner sei d definiert durch

$$d(f, g) := \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} \text{ für } f, g \in C(\Omega, \mathbb{C}).$$

- (a) Zeigen Sie, daß d eine Metrik auf $C(\Omega, \mathbb{C})$ ist.
- (b) Zeigen Sie, daß die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ aus $C(\Omega, \mathbb{C})$ genau dann eine Cauchy-Folge bezüglich d ist, wenn sie kompakt konvergent ist.

AUFGABE 4.2. Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n. \quad (b) \sum_{n=0}^{+\infty} n^p z^n \text{ mit } 0 \leq p \in \mathbb{R}. \quad (c) \sum_{n=0}^{+\infty} 5^n \frac{n!}{n^n} z^n.$$

AUFGABE 4.3. Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen:

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}. \quad (b) \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2 z^n.$$

AUFGABE 4.4. Sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \text{ kompakt konvergent in } \Omega \text{ ist.}$$

AUFGABE 4.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in \Omega$. Untersuchen Sie, ob es Funktionen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- (a) $f(n^{-2007}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{-2007} \in \Omega$, aber $f \not\equiv 0$.
- (b) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (c) $f(n^{-1}) = f(-n^{-1}) = n^{-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\pm n^{-1} \in \Omega$.
- (d) $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \in \Omega$.
- (e) $\Omega = \mathbb{D}$ und $f^{(n)}(0) = n \cdot n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (f) $\Omega = \mathbb{C}$ und $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m} = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

AUFGABE 4.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei H eine lokalbeschränkte Teilmenge von $\mathcal{O}(\Omega)$. Zeigen Sie, daß dann für alle $k \in \mathbb{N}$ auch die Menge $H^{(k)} := \{h^{(k)}; h \in H\}$ lokalbeschränkt ist.

AUFGABE 4.7. Zeigen Sie, daß die Menge H aller $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, die eine Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \text{mit } |a_n| \leq n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

besitzen, in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ relativkompakt ist.

- AUFGABE 4.8. (a) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $f_n(z) := z^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ lokalbeschränkt auf $\mathbb{D}$ ist, aber nicht auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ und auf Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$, die einen Punkt von $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ enthalten.
- (b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei H eine *nicht* relativkompakte Teilmenge von $\mathcal{O}(\Omega)$. Zeigen Sie, daß ein $z_0 \in \Omega$ existiert, so daß H in keiner Umgebung von z_0 lokalbeschränkt ist.

AUFGABE 4.9. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{O}(G)$, so daß gilt:

- (a) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ist lokalbeschränkt.
- (b) Es gibt eine Menge $A \subseteq G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat, so daß für alle $z \in A$ die Folge $(f_n(z))_n$ in $\mathbb{C}$ konvergent ist.

Zeigen Sie, daß die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dann kompakt auf G gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert.

Windungszahlen und eine allgemeinere Fassung des Cauchyschen Integralsatzes

Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$, d.h. eine stetige Abbildung von einem Intervall $I = [a, b]$ nach $\mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Sei ferner ein Punkt $u \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ gegeben. Dann ist $\rho := \text{dist}(u, \gamma(I)) > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von γ auf I gibt es eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

von I mit

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \forall s, t \in [t_{j-1}, t_j] : \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| < \rho. \quad (5.1)$$

Wir setzen für $j = 1, \dots, n$:

$$w_j := \frac{\gamma(t_j) - u}{\gamma(t_{j-1}) - u}.$$

Dann folgt

$$|w_j - 1| = \left| \frac{\gamma(t_j) - u - (\gamma(t_{j-1}) - u)}{\gamma(t_{j-1}) - u} \right| < \frac{\rho}{|\gamma(t_{j-1}) - u|} \leq 1.$$

Also folgt $\text{Re } w_j > 0$. Es gibt daher genau ein $\varphi_j \in (-\pi/2, \pi/2)$ mit $w_j = |w_j|e^{i\varphi_j}$. Wegen $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist

$$\prod_{j=1}^n w_j = \prod_{j=1}^n \frac{\gamma(t_j) - u}{\gamma(t_{j-1}) - u} = \frac{\gamma(t_n) - u}{\gamma(t_0) - u} = 1.$$

Also gilt:

$$1 = \prod_{j=1}^n w_j = \prod_{j=1}^n (|w_j|e^{i\varphi_j}) = \left(\prod_{j=1}^n |w_j| \right) e^{i \sum_{j=1}^n \varphi_j}.$$

Da die linke Seite reell ist, ist dies nur möglich, wenn $\sum_{j=1}^n \varphi_j$ ein ganzes Vielfaches von 2π ist. Die hierdurch definierte ganze Zahl

$$n(\gamma, u) := n(\gamma, u, \mathfrak{Z}) := \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \varphi_j \quad (5.2)$$

heißt die *Windungszahl* oder *Umlaufzahl* von γ um u . Wir zeigen, daß diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl von $\mathfrak{Z}$ ist:

LEMMA 5.1. *$n(\gamma, u)$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der speziellen Wahl der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit (5.1).*

BEWEIS. Seien also $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ zwei Zerlegungen des Intervalls I , die der Bedingung (5.1) genügen. Um $n(\gamma, u, \mathfrak{Z}_1) = n(\gamma, u, \mathfrak{Z}_2)$ zu zeigen, genügt es zu beweisen, daß

$$n(\gamma, u, \mathfrak{Z}_j) = n(\gamma, u, \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2) \quad (5.3)$$

für $j = 1, 2$ gilt. $\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$ entsteht aus $\mathfrak{Z}_j$ durch Hinzunahme von endlich vielen Punkten. Es genügt daher, die folgende Aussage zu beweisen (aus der man (5.3) durch vollständige Induktion herleiten kann): Für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a, b]$ mit (5.1) und jedes $\tau \in (a, b)$ gilt $n(\gamma, u, \mathfrak{Z}) = n(\gamma, u, \mathfrak{Z} \cup \{\tau\})$.

Sei also $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ eine beliebige Zerlegung von $I = [a, b]$ mit (5.1) und $\tau \in (a, b)$ gegeben mit (0.B.d.A. $\tau \neq t_j$ für $j = 0, 1, \dots, n$). Dann ist $\tau \in (t_{k-1}, t_k)$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ und (5.1) ist auch für $\mathfrak{Z} \cup \{\tau\}$ erfüllt. Wir setzen wie zuvor

$$w_j := \frac{\gamma(t_j) - u}{\gamma(t_{j-1}) - u} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

und zusätzlich

$$w'_k := \frac{\gamma(\tau) - u}{\gamma(t_{k-1}) - u}, \quad w''_k := \frac{\gamma(t_k) - u}{\gamma(\tau) - u}.$$

Wie oben folgt $\operatorname{Re} w'_k > 0$ und $\operatorname{Re} w''_k > 0$ und damit $w'_k = |w'_k|e^{i\varphi'_k}$ sowie $w''_k = |w''_k|e^{i\varphi''_k}$ mit eindeutig bestimmten $\varphi'_k, \varphi''_k \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aus $w''_k = w_k/w'_k$ folgt $\varphi''_k = \varphi_k - \varphi'_k + m2\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Wegen $\varphi_k, \varphi'_k, \varphi''_k \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist also $|m2\pi| \leq 3\pi/2$, woraus $m = 0$ folgt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} n(\gamma, u, \mathfrak{Z}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \varphi_j = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j + \varphi'_k + \varphi''_k + \sum_{j=k+1}^n \varphi_j \right) \\ &= n(\gamma, u, \mathfrak{Z} \cup \{\tau\}). \end{aligned}$$

Wie oben schon vermerkt wurde, genügt dies zum Beweis des Lemmas. $\square$

FOLGERUNG 5.2. *Sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Dann gibt es zu jedem $u \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ einen γ einbeschriebenen Polygonzug π_0 mit $n(\pi_0, u) = n(\gamma, u)$.*

BEWEIS. Sei $\rho := \operatorname{dist}(u, \gamma(I))$. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ von I mit

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \forall s, t \in [t_{j-1}, t_j] : \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{\rho}{2}.$$

Sei nun $\pi_0 := \sum_{j=1}^n [\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)]$ der Polygonzug, der die Punkte $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ in dieser Reihenfolge durchläuft,

$$\pi_0(s) = \gamma(t_{j-1}) + (s - j + 1)(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

für $j-1 \leq s \leq j$, $j = 1, \dots, n$. Man rechnet unmittelbar nach, daß $\operatorname{dist}(u, \operatorname{Spur}(\pi_0)) \geq \rho/2$ gilt. Insbesondere ist für π_0 und die Zerlegung $\{0, 1, \dots, n\}$ von $[0, n]$ die Bedingung (5.1) erfüllt. Es folgt $n(\pi_0, u) = n(\gamma, u)$, da die Punkte $w_1, \dots, w_n$ für beide Wege und die angegebenen Zerlegungen ihrer Definitionsintervalle gleich sind. $\square$

SATZ 5.3. *Sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Dann ist die Abbildung $u \mapsto n(\gamma, u)$ stetig auf $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.*

BEWEIS. Sei $u \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\rho := \operatorname{dist}(u, \gamma(I))$ und wählen eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

von I mit

$$\forall s, t \in [t_{j-1}, t_j] : \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{\rho}{2}$$

für $j = 1, \dots, n$. Für alle $v \in D(u, \rho/2)$ setzen wir

$$w_j(v) := \frac{\gamma(t_j) - v}{\gamma(t_{j-1}) - v}.$$

Wir haben dann wieder $w_j(v) = |w_j(v)|e^{i\varphi_j(v)}$ für $j = 1, \dots, n$ mit $\varphi_j(v) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Sei nun $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ beliebig mit $|u - \zeta| < \rho/2$. Für die Punkte

$$v_j := \frac{\gamma(t_j) - \zeta}{\gamma(t_j) - u} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

gilt ebenfalls

$$|v_j - 1| = \frac{|u - \zeta|}{|\gamma(t_j) - u|} < 1$$

und daher $v_j = |v_j|e^{i\alpha_j}$ mit eindeutig bestimmten $\alpha_j \in (-\pi/2, \pi/2)$ für $j = 0, 1, \dots, n$. Ferner gilt für $j = 1, \dots, n$

$$\frac{v_j}{v_{j-1}} = \frac{\gamma(t_j) - \zeta}{\gamma(t_j) - u} \cdot \frac{\gamma(t_{j-1}) - u}{\gamma(t_{j-1}) - \zeta} = \frac{w_j(\zeta)}{w_j(u)}$$

und damit

$$\alpha_j - \alpha_{j-1} = \varphi_j(\zeta) - \varphi_j(u) + 2k_j\pi$$

für ein $k_j \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$2|k_j|\pi \leq |\alpha_j| + |\alpha_{j-1}| + |\varphi_j(\zeta)| + |\varphi_j(u)| < 2\pi$$

und daher $k_j = 0$ für $j = 1, \dots, n$. Wir erhalten

$$2\pi n(\gamma, \zeta) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\zeta) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(u) + \alpha_j - \alpha_{j-1} = 2\pi n(\gamma, u) + \alpha_n - \alpha_0 = 2\pi n(\gamma, u)$$

(wegen $v_0 = v_n$). Für alle $\zeta \in D(u, \rho/2)$ gilt also

$$|n(\gamma, \zeta) - n(\gamma, u)| = 0 < \varepsilon.$$

$n(\gamma, \cdot)$ ist also in u stetig, sogar in einer kleinen Umgebung von u konstant. $\square$

SATZ 5.4. *Sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Dann ist die Windungszahl $n(\gamma, \cdot)$ auf jeder Zusammenhangskomponente G von $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ konstant. Für alle u in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente G_∞ von $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ gilt $n(\gamma, u) = 0$.*

BEWEIS. Seien $z, w \in G$ beliebig. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Polygonzug $\pi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\pi(c) = z, \pi(d) = w$ und $\pi([c, d]) \subset G$. Als Hintereinanderausführung von stetigen Abbildungen ist dann die Abbildung $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := n(\gamma, \pi(t))$ für $t \in [c, d]$ stetig. Da das Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen reellwertigen Funktion ein Intervall sein muß und φ seine Werte schon in $\mathbb{Z}$ annimmt, muß φ konstant sein und somit auch $n(\gamma, z) = \varphi(c) = \varphi(d) = n(\gamma, w)$ gelten. Also ist $n(\gamma, \cdot)$ auf G konstant.

Sei nun $u \in \mathbb{C}$ beliebig mit $|u| > 3\|\gamma\|_I$. Mit $\rho := \text{dist}(u, \gamma(I))$ folgt $\rho > 2\|\gamma\|_I$ und für alle $s, t \in I$ gilt $|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq 2\|\gamma\|_I < \rho$. Die Bedingung (5.1) ist also für die spezielle Zerlegung $\mathfrak{Z} := \{a = t_0 < t_1 = b\}$ erfüllt und es folgt $w_1 := \frac{\gamma(t_1) - u}{\gamma(t_0) - u} = 1$, also $\varphi_1 = 0$. Nach der Definition der Windungszahl in (5.2) hat man also $2\pi n(\gamma, u) = \sum_{j=1}^1 \varphi_j = \varphi_1 = 0$. Da $n(\gamma, \cdot)$ auf G_∞ konstant ist, folgt $n(\gamma, v) = 0$ für alle $v \in G_\infty$. $\square$

Wir wollen nun den Begriff der Windungszahl auch für Ketten von geschlossenen Wegen einführen.

DEFINITION 5.5. Sei $\Gamma = \sum_{j=1}^k m_j \gamma_j$ eine Kette von geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Wegen in $\mathbb{C}$. Für $u \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ heißt die ganze Zahl

$$n(\Gamma, u) := \sum_{j=1}^k m_j n(\gamma_j, u)$$

die *Windungszahl* von Γ bezüglich u .

Man überlegt sich unmittelbar, daß die Aussagen 5.3 und 5.4 auch für Windungszahlen von solchen Wegketten Γ gelten, d.h. $n(\Gamma, \cdot)$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ stetig, auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ konstant und auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ identisch verschwindend.

Wir hatten gesehen, daß die Funktion $z \mapsto 1/z$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt. Wir zeigen nun:

SATZ 5.6. Es gibt genau eine auf $\Omega_- := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ holomorphe Funktion $\text{Log} : \Omega_- \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\text{Log}(1) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Log}'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \Omega_-.$$

Für diese Funktion gilt:

- (a) $\exp(\text{Log}(z)) = z$ für alle $z \in \Omega_-$ und $\text{Log}(\exp(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\text{Im}(z)| < \pi$.
- (b) Für alle $z \in \Omega_-$ gilt $\text{Log}(z) = \log(|z|) + i\varphi$, wobei $\varphi := \text{Arg}(z)$ der eindeutig bestimmte Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi)$ mit $z = |z|e^{i\varphi}$ sei.
- (c) Jede Stammfunktion L von $z \mapsto 1/z$ auf Ω_- ist von der Form $L(z) = \text{Log}(z) + c$ für alle $z \in \Omega_-$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$.
- (d) An den Schnittekanten hat man für reelles $x < 0$:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \text{Im}(z) > 0}} \text{Log}(z) = \log(|x|) + i\pi$$

und

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \text{Im}(z) < 0}} \text{Log}(z) = \log(|x|) - i\pi.$$

BEWEIS. Wir definieren für alle $z \in \Omega_-$:

$$\text{Log}(z) := \int_{[1,z]} \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

wobei $[1, z]$ die durch $t \mapsto 1 + t(z - 1)$ über $[0, 1]$ parametrisierte Strecke von 1 nach z bezeichne. Man rechnet unmittelbar nach, daß die Spur dieses Weges ganz in Ω_- enthalten ist. Sei $z \in \Omega_-$ beliebig. Für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \text{dist}(z, \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\})$ folgt dann bei $h \rightarrow 0$:

$$\frac{\text{Log}(z+h) - \text{Log}(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{z+th} dt \rightarrow \frac{1}{z}.$$

Die Funktion Log ist also Stammfunktion zu $z \mapsto 1/z$ auf Ω_- und erfüllt auch $\text{Log}(1) = 0$. Ist $L : \Omega_- \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Stammfunktion zu $z \mapsto 1/z$ auf Ω_- , so folgt $(L - \text{Log})' \equiv 0$ auf Ω_- . Zu jedem Punkt aus Ω_- gibt es daher eine offene Umgebung auf der $L - \text{Log}$ konstant ist. Da Ω_- ein Gebiet ist, muß $L - \text{Log}$ schon auf ganz Ω_- konstant sein. Damit haben wir also die Existenzaussage und die Eindeutigkeit von Log sowie (c) bewiesen.

Für alle $x > 0$ aus $\mathbb{R}$ gilt $\exp(\operatorname{Log}(x)) = e^{\log(x)} = x$. Nach dem Identitätssatz folgt also $\exp(\operatorname{Log}(z)) = z$ für alle $z \in \Omega_-$. Ebenso zeigt man unter Verwendung des Identitätssatzes auch die zweite Beziehung in (a). Insbesondere sind also die Abbildungen

$$\operatorname{Log} : \Omega_- \rightarrow \{z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im}(z)| < \pi\}, \quad \exp : \{z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im}(z)| < \pi\} \rightarrow \Omega_-$$

bijektiv. Ist $z \in \Omega_-$ gegeben und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ der eindeutig bestimmte Winkel mit $z = |z|e^{i\varphi}$, so folgt also wegen $\exp(\log|z| + i\varphi) = |z|e^{i\varphi} = z = \exp(\operatorname{Log}(z))$ schon $\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\varphi$ und damit (b).

Die Aussage (d) folgt nun leicht mit der in (b) gegebenen Darstellung von Log . $\square$

BEMERKUNG 5.7. Natürlich hätten wir auch längs eines anderen Strahls von 0 nach ∞ die komplexe Ebene aufschneiden können. Sei z.B. $\Omega_+ := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\}$ und $\widetilde{\operatorname{Log}} : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\widetilde{\operatorname{Log}}(z) := \int_{[-1, z]} \frac{1}{\zeta} d\zeta + i\pi \quad \text{für alle } z \in \Omega_+.$$

Wie im Beweis zu Satz 5.6 sieht man, daß $\widetilde{\operatorname{Log}}$ die eindeutig bestimmte Stammfunktion zu $z \mapsto 1/z$ auf Ω_+ mit $\widetilde{\operatorname{Log}}(-1) = i\pi$ ist. Auf $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) > 0\}$ sind also sowohl Log als auch $\widetilde{\operatorname{Log}}$ Stammfunktionen zu $z \mapsto 1/z$. Da $\mathbb{H}_+$ ein Gebiet ist, muß also $\operatorname{Log} - \widetilde{\operatorname{Log}} \equiv c_+$ konstant auf $\mathbb{H}_+$ sein. Wegen

$$\lim_{\substack{z \rightarrow -1 \\ \operatorname{Im}(z) > 0}} \operatorname{Log}(z) = i\pi = \widetilde{\operatorname{Log}}(-1)$$

folgt also $c_+ = 0$ und damit $\operatorname{Log} \equiv \widetilde{\operatorname{Log}}$ auf $\mathbb{H}_+$. Auch auf dem Gebiet $\mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) < 0\}$ sind sowohl Log als auch $\widetilde{\operatorname{Log}}$ Stammfunktionen zu $z \mapsto 1/z$ und es gilt $\operatorname{Log} - \widetilde{\operatorname{Log}} \equiv c_-$ für eine Konstante c_- . Wegen

$$\lim_{\substack{z \rightarrow -1 \\ \operatorname{Im}(z) < 0}} \operatorname{Log}(z) = -i\pi = -\widetilde{\operatorname{Log}}(-1)$$

folgt $c_- = -2\pi i$ und damit $\widetilde{\operatorname{Log}} \equiv \operatorname{Log} - 2\pi i$ auf $\mathbb{H}_-$. Der Hauptzweig Log läßt sich also nach oben und nach unten über den Schnitt hinweg holomorph fortsetzen. Die holomorphe Fortsetzung stimmt aber nicht mehr mit der Ausgangsfunktion überein.

Man nennt die durch Satz 5.6 gegebene Funktion Log den *Hauptzweig der Logarithmusfunktion*.

LEMMA 5.8. Sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $u \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$. Dann gilt für alle $t \in I$:

$$\gamma(t) = u + |\gamma(t) - u|e^{i\phi(t)} \quad (5.4)$$

mit einer stetigen Funktion $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ist auch $\tilde{\phi} : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit (5.4), so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\phi - \tilde{\phi} \equiv 2k\pi$ auf I . Es gilt

$$n(\gamma, u) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi}. \quad (5.5)$$

Ist γ stückweise stetig differenzierbar, so gilt dies auch für ϕ .

BEWEIS. Die Funktion $z \mapsto z/|z|$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Also sind auch die Funktionen $z \mapsto \text{Arg}(z) := -i\text{Log}(z/|z|)$ auf $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ und $z \mapsto \widetilde{\text{Arg}}(z) := -i\widetilde{\text{Log}}(z/|z|)$ auf $\Omega_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ von der Klasse C^∞ . Die Funktion Arg nennt man auch den *Hauptzweig des Arguments*. Wir setzen wieder $\rho := \text{dist}(u, \gamma([a, b]))$ und wählen eine hinreichend feine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ von $[a, b]$, so daß für $j = 1, \dots, n$ gilt:

- (a) $\forall s, t \in [t_{j-1}, t_j]: |\gamma(t) - \gamma(s)| < \rho$, d.h. (5.1) ist erfüllt,
- (b) $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \in C^1([t_{j-1}, t_j], \mathbb{C})$, falls γ stückweise stetig differenzierbar ist, und
- (c) $\gamma([t_{j-1}, t_j]) - u \subset \Omega_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ oder
- (d) $\gamma([t_{j-1}, t_j]) - u \subset \Omega_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$.

Im Fall (c) setzen wir $\varphi_j(t) := \text{Arg}(\gamma(t) - u)$ für $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Ist (c) nicht erfüllt, so daß also (d) gilt, so definieren wir $\varphi_j(t) := \widetilde{\text{Arg}}(\gamma(t) - u)$ für $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Dann folgt $\varphi_j(t_j) = \varphi_{j+1}(t_j) + 2k_j\pi$ mit einem $k_j \in \{-1, 0, 1\}$. Die durch

$$\phi(t) := \varphi_j(t) + 2\pi \sum_{\nu=1}^{j-1} k_\nu \quad \text{für } t \in [t_{j-1}, t_j], j = 1, \dots, n$$

definierte Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann auf $[a, b]$ stetig (und stückweise stetig differenzierbar falls γ stückweise stetig differenzierbar ist). Für die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ ist die Bedingung (5.1) erfüllt. Wir haben für $j = 1, \dots, n$

$$w_j = \frac{\gamma(t_j) - u}{\gamma(t_{j-1}) - u} = \left| \frac{\gamma(t_j) - u}{\gamma(t_{j-1}) - u} \right| e^{i(\phi(t_j) - \phi(t_{j-1}))}$$

also nach Definition der Windungszahl

$$n(\gamma, u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n (\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi}.$$

Damit ist (5.5) gezeigt. Ist auch $\tilde{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit (5.4), so folgt wegen $\phi(t) - \tilde{\phi}(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ für alle $t \in [a, b]$ und wegen der Stetigkeit von ϕ und $\tilde{\phi}$ schon $\phi(t) - \tilde{\phi}(t) \equiv 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas erhalten wir nun eine Integraldarstellung für die Windungszahl:

SATZ 5.9. Sei Γ eine Kette von stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Wegen in $\mathbb{C}$. Dann gilt für alle $u \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$:

$$n(\Gamma, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - u} dz.$$

BEWEIS. Aufgrund der Definition der Windungszahl für Wegketten und der Definition der Integrale über Wegketten genügt es, die Behauptung für stückweise stetig differenzierbare geschlossene Wege zu beweisen. Sei also $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein solcher Weg und sei $u \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ beliebig. Nach Lemma 5.8 gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit (5.4) und (5.5). Unter Verwendung von (5.4) sieht man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - u} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{|\gamma(t) - u| e^{i\phi(t)}} \frac{d}{dt} (|\gamma(t) - u| e^{i\phi(t)}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{d}{dt} (\log(|\gamma(t) - u|)) dt + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \phi'(t) dt \\ &= \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Wegen (5.5) folgt die Behauptung. $\square$

Wir zeigen nun eine Fassung der Cauchyschen Integralformel für Ketten von geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Wegen:

SATZ 5.10 (Cauchysche Integralformel). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\Gamma = \sum_{j=1}^k m_j \gamma_j$ (mit $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$) eine Kette von stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Wegen in Ω , so daß $n(\Gamma, u) = 0$ für alle $u \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und alle $z \in \Omega \setminus \text{Spur}(\Gamma)$:*

$$n(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

BEWEIS. Wir setzen $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma); n(\Gamma, z) = 0\}$. Da die Funktion $n(\Gamma, \cdot) : \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ nach Satz 5.3 stetig ist, ist Ω_0 und damit auch $\Omega \cap \Omega_0$ offen. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \Omega_0$. Wir definieren eine Funktion $h : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{für } z, w \in \Omega \text{ mit } z \neq w \\ f'(z) & \text{für } z = w \in \Omega. \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst:

- (a) $h \in C^\infty(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$ und
- (b) $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ und $\frac{\partial h}{\partial \bar{w}} \equiv 0$ auf $\Omega \times \Omega$.

Daß h auf $\Omega \times \Omega \setminus \{(z, z); z \in \Omega\}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist und $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ sowie $\frac{\partial h}{\partial \bar{w}} \equiv 0$ erfüllt, ist unmittelbar klar. Sei nun $z_0 \in \Omega$ beliebig und $r > 0$ mit $D(z_0, r) \subset \Omega$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel in der Form von Satz 2.2 für alle $z, w \in D(z_0, r)$ mit $z \neq w$:

$$h(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{z - w} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta$$

und damit auch

$$h(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)} d\zeta \quad (5.6)$$

was nach der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel (Satz 2.3) auch noch für $z = w \in D(z_0, r)$ gültig bleibt. Aus der Darstellung (5.6) von h folgt nun mit Hilfe von Lemma 1.10 und den anschließenden Bemerkungen 1.11

$$h|_{D(z_0, r) \times D(z_0, r)} \in C^\infty(D(z_0, r) \times D(z_0, r))$$

und

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \text{ sowie } \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} \equiv 0 \text{ auf } D(z_0, r) \times D(z_0, r).$$

Damit sind die Aussagen (a) und (b) bewiesen.

Wir definieren nun eine Hilfsfunktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & \text{für } z \in \Omega_0 \\ F_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\zeta, z) d\zeta & \text{für } z \in \Omega \end{cases}$$

und zeigen, daß hierdurch eine wohldefinierte ganze Funktion auf $\mathbb{C}$ gegeben ist. Nach 1.10, 1.11 und den oben bewiesenen Aussagen (a) und (b) ist F_1 auf Ω_0 und F_2 auf Ω holomorph. Für alle $z \in \Omega_0 \cap \Omega$ gilt wegen $n(\Gamma, z) = 0$ und Satz 5.9:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - n(\Gamma, z)f(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\zeta, z) d\zeta \\ &= F_2(z). \end{aligned}$$

Also ist F eine wohldefinierte auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Liegt z in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$, so gilt nach Satz 5.4 für die Windungszahl: $n(\Gamma, z) = 0$, d.h. $z \in \Omega_0$. Es folgt daher für $|z| \rightarrow \infty$:

$$|F(z)| = |F_1(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{L(\Gamma) \|f\|_{\text{Spur}(\Gamma)}}{2\pi \text{dist}(z, \text{Spur}(\Gamma))} \rightarrow 0.$$

Die Funktion F ist also eine beschränkte auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion und daher nach dem Satz von Liouville (Satz 2.7) konstant. Wegen $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = 0$ folgt $F \equiv 0$. Insbesondere folgt für alle $z \in \Omega \setminus \text{Spur}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} 0 = F(z) &= F_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - n(\Gamma, z)f(z) \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Mit Hilfe von 1.10 und 1.11 erhält man aus der Cauchyschen Integralformel 5.10 leicht die entsprechende verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

FOLGERUNG 5.11 (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei Γ eine Kette von stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Wegen in Ω , so daß $n(\Gamma, u) = 0$ für alle $u \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und alle $z \in \Omega \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$:*

$$n(\Gamma, z)f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta.$$

Wir erhalten auch eine entsprechende Fassung des Cauchyschen Integralsatzes:

FOLGERUNG 5.12 (Cauchyscher Integralsatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei Γ eine Kette von stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Wegen in Ω , so daß $n(\Gamma, u) = 0$ für alle $u \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:*

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

BEWEIS. Sei z_0 ein beliebiger Punkt aus $\Omega \setminus \text{Spur}(\Gamma)$. Wir wenden die Cauchysche Integralformel 5.10 auf die durch

$$g(z) := (z - z_0)f(z) \quad \text{für } z \in \Omega$$

definierte Funktion $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ im Punkt z_0 an und erhalten

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i n(\Gamma, z_0)g(z_0) = 0$$

und damit die Behauptung. $\square$

DEFINITION 5.13. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Kette Γ von geschlossenen Wegen in Ω heißt *nullhomolog* in Ω , falls für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt: $n(\Gamma, z) = 0$. Zwei Ketten Γ_1, Γ_2 von Wegen in Ω heißen *homolog* in Ω , falls die Kette $\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog in Ω ist.

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls für jede Kette Γ von geschlossenen Wegen in G gilt: $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$, d.h. wenn alle Ketten von geschlossenen Wegen in G nullhomolog in G sind.

Mit dieser Definition und dem Cauchyschen Integralsatz erhalten wir:

FOLGERUNG 5.14. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien Γ_1, Γ_2 zwei in Ω homologe Ketten von stückweise stetig differenzierbaren Wegen in Ω . Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:

$$\int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_2} f(\zeta) d\zeta.$$

Die einfach zusammenhängenden Gebiete in $\mathbb{C}$ können wir wie folgt charakterisieren:

SATZ 5.15. Für ein Gebiet G in $\mathbb{C}$ sind äquivalent:

- (a) G ist einfach zusammenhängend.
- (b) Für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ und alle Ketten Γ von stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Wege in G gilt

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

- (c) Jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ besitzt eine komplexe Stammfunktion.

BEWEIS. Die Implikation (a) $\implies$ (b) folgt unmittelbar nach dem Cauchyschen Integralsatz 5.12 aus der Definition des einfachen Zusammenhangs in 5.13.

Sei nun (b) erfüllt und sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und $z_0 \in G$ beliebig. Zu jedem $z \in G$ gibt es, da G polygonzugzusammenhängend ist (vergl. Satz 0.6), einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma_z : [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma_z(a) = z_0$ und $\gamma_z(b) = z$. Ist $\tilde{\gamma}_z : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow G$ ein weitere stückweise stetig differenzierbarer Weg in G mit $\tilde{\gamma}_z(\tilde{a}) = z_0$ und $\tilde{\gamma}_z(\tilde{b}) = z$, so ist die Kette $\gamma_z - \tilde{\gamma}_z$ als geschlossener Weg parametrisierbar und wir erhalten nach Voraussetzung

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Definieren wir also für $z \in G$:

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta,$$

so ist hierdurch eine wohldefinierte Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Für $z \in G$ und $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus G)$ erhalten wir, da die Kette $\gamma_{z+h} - \gamma_z - [z, z+h]$ als geschlossener stückweise stetiger Weg parametrisiert werden kann, unter nochmaliger Verwendung der Voraussetzung (b):

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f(z+th) dt \rightarrow f(z)$$

bei $h \rightarrow 0$. Also ist F auf G komplex differenzierbar und es gilt $F' \equiv f$ auf G , d.h. es gilt (c).

Sei schließlich (c) erfüllt und sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow G$ ein beliebiger geschlossener Weg in G . Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ beliebig. Dann ist

$$\text{dist}(z_0, \gamma(I)) \geq \rho_0 := \text{dist}(\gamma(I), \mathbb{C} \setminus G) > 0.$$

Wir fixieren nun eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ von I , so daß für $j = 1, \dots, n$ gilt

$$\forall s, t \in [t_{j-1}, t_j] : |\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{\rho_0}{2}.$$

Sei $\pi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ der Polygonzug, der die Punkte $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ in dieser Reihenfolge durchläuft. Dann ist $\text{Spur}(\pi) \subset G$ und nach dem Beweis zu Folgerung 5.2 ist $n(\gamma, z_0) = n(\pi, z_0)$. Da π stückweise stetig differenzierbar ist, gilt also mit Satz 5.9

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (5.7)$$

Nach Voraussetzung hat die Funktion $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z_0)$ eine Stammfunktion F . Also hat man nach Folgerung 3.2 und (5.7) schon $n(\gamma, z_0) = 0$. $\square$

Als Anwendung zeigen wir:

SATZ 5.16. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und sei $h \in \mathcal{O}(G)$ ohne Nullstelle in G . Dann gibt es eine Funktion $H \in \mathcal{O}(G)$ mit $e^H \equiv h$ auf G .

BEWEIS. Die Funktion h'/h hat nach Satz 5.15 eine Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(G)$. Es folgt

$$\left(\frac{e^F}{h}\right)' = \frac{hF'e^F - h'e^F}{h^2} = \frac{e^F}{h^2} \left(h\frac{h'}{h} - h'\right) \equiv 0$$

auf G . Da G zusammenhängend ist folgt $e^F/h \equiv c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$. Da die Exponentialfunktion keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat, ist $c \neq 0$, hat also die Form $c = re^{i\varphi}$ für ein $r > 0$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$. Es folgt $h(z) = c^{-1}e^{F(z)} = \exp(F(z) - \log(r) - i\varphi)$. Die Funktion $z \mapsto H(z) := F(z) - \log(r) - i\varphi$ leistet also das Gewünschte. $\square$

Eine naheliegende Zusatzüberlegung zeigt, daß die Funktion H aus Satz 5.16 bis auf additive ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ eindeutig bestimmt ist.

Übungsaufgaben zu Kapitel 5.

AUFGABE 5.1. Sei X ein metrischer Raum. Zwei stetige, geschlossene Wege

$$\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$$

heißen *homotop* in X , falls eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow X$ - eine *Homotopie* - existiert mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0, 1]$,
- (ii) $\gamma(1, t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0, 1]$,
- (iii) $\gamma(s, 1) = \gamma(s, 0)$ für alle $s \in [0, 1]$.

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und seien γ_0 und γ_1 zwei stetige, geschlossene, in Ω homotope Wege. Zeigen Sie:

$$n(\gamma_0, z) = n(\gamma_1, z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Hinweis: Für eine zugehörige Homotopie $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow X$ sei $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$. Überlegen Sie, daß für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ die Funktion $[0, 1] \ni s \mapsto n(\gamma_s, z)$ lokal konstant ist.

AUFGABE 5.2. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie: Jede nullstellenfreie, holomorphe Funktion auf G hat eine Wurzel, d.h. zu jedem nullstellenfreien $f \in \mathcal{O}(G)$ existiert $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $f = g^2$.

Geben Sie ein Beispiel eines nicht einfach zusammenhängenden Gebiets G und einer nullstellenfreien Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ an, derart daß $f \neq g^2$ für alle $g \in \mathcal{O}(G)$.

AUFGABE 5.3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft, daß zu jeder Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ eine Folge von Polynomen existiert, die auf G kompakt gegen f konvergiert. Zeigen Sie: G ist einfach zusammenhängend.

AUFGABE 5.4. Seien Ω_1, Ω_2 zwei nicht leere, offene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ heißt *biholomorph*, falls sie eine holomorphe und bijektive Funktion ist, deren Umkehrabbildung ebenfalls holomorph ist. Gibt es eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, so nennen wir Ω_1 und Ω_2 *biholomorph äquivalent*.

- (a) Zeigen Sie: Sind zwei Gebiete biholomorph äquivalent, so sind entweder beide einfach zusammenhängend oder beide nicht einfach zusammenhängend.
- (b) Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sind nicht biholomorph äquivalent.
- (c) Geben Sie ein unbeschränktes zu $\mathbb{D}$ biholomorph äquivalentes Gebiet an.

Laurentreihen, isolierte Singularitäten und der Residuenkalkül

Eine unendliche Reihe der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ heißt konvergent (bzw. absolut konvergent), falls die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ in $\mathbb{C}$ konvergieren (bzw. absolut konvergieren). Ihr Reihengrenzwert ist dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$. Eine Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ von auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definierten komplexwertigen Funktionen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt punktweise (bzw. kompakt) konvergent auf Ω , falls die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}$ punktweise (bzw. kompakt) auf Ω konvergieren.

DEFINITION 6.1. Sei z_0 ein Punkt in $\mathbb{C}$. Eine Funktionenreihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ heißt *Laurentreihe mit dem Entwicklungspunkt z_0 und den Koeffizienten a_n , $n \in \mathbb{Z}$* . Man nennt

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

den *Hauptteil* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

den *Nebenteil* der gegebenen Laurentreihe.

Für $r_1, r_2 \in [0, \infty]$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ werden wir mit

$$R_{r_1, r_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} ; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

den offenen Kreisring um z_0 mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 bezeichnen. Offensichtlich ist $R_{r_1, r_2}(z_0)$ genau dann nicht leer, wenn $r_1 < r_2$ ist.

SATZ 6.2. Gegeben sei die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit dem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Sei

$$r_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

und sei r_2 der Konvergenzradius des Nebenteils $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Dann ist die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ in dem Kreisring $R_{r_1, r_2}(z_0)$ kompakt und absolut konvergent gegen eine auf $R_{r_1, r_2}(z_0)$ holomorphe Funktion und in

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} ; r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$$

divergent. Wir nennen $R_{r_1, r_2}(z_0)$ den *Konvergenzring* der Laurentreihe.

BEWEIS. Nach der Definition von r_2 und Satz 4.6 ist der Nebenteil $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ kompakt und absolut konvergent in $D(z_0, r_2) \supseteq R_{r_1, r_2}(z_0)$ und divergent für alle z mit $|z - z_0| > r_2$. Ebenfalls nach Satz 4.6 ist der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ gegeben durch $R = 1/r_1$ (mit den Vereinbarungen $1/\infty = 0$ und $1/0 = \infty$). Für $|z - z_0| < r_1$ ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ divergent. Ist $K \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, r_1)}$

kompakt, so ist auch die Menge $\tilde{K} := \{(z - z_0)^{-1}; z \in K\} \subset D(0, R)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt. Nach Satz 4.6 ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ gleichmäßig und absolut konvergent auf $\tilde{K}$. Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ gleichmäßig und absolut konvergent auf K . Nach dem Satz von Weierstraß ist die durch die Laurentreihe auf $R_{r_1, r_2}(z_0)$ definierte Funktion auf $R_{r_1, r_2}(z_0)$ holomorph. $\square$

Wie im Potenzreihenfall läßt sich keine einheitliche Aussage über das Konvergenzverhalten auf den Kreislinien $\{z; |z - z_0| = r_j\}$, $j = 1, 2$, machen.

Wir zeigen nun, daß sich umgekehrt jede in einem offenen Kreisring $R_{r_1, r_2}(z_0)$ holomorphe Funktion in eine Laurentreihe um z_0 entwickeln läßt, deren Konvergenzbereich den Kreisring $R_{r_1, r_2}(z_0)$ enthält.

SATZ 6.3 (Laurent). *Sei $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ und sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Jede Funktion $f \in \mathcal{O}(R_{r_1, r_2}(z_0))$ läßt sich in eine in $R_{r_1, r_2}(z_0)$ kompakt und absolut konvergente Laurentreihe um z_0 entwickeln. Es gilt für alle $z \in R_{r_1, r_2}(z_0)$*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (6.1)$$

wobei $r_1 < r < r_2$ sei. Die Laurentreihenentwicklung ist eindeutig, d.h. gilt auch $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ für alle $z \in R_{r_1, r_2}(z_0)$, so ist schon $b_n = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von $R_{r_1, r_2}(z_0)$ und sei $r \in (r_1, r_2)$ beliebig. Dann hat man

$$\rho_1 := \min_{z \in K} |z - z_0| > r_1 \quad \text{und} \quad \rho_2 := \max_{z \in K} |z - z_0| < r_2.$$

Wir fixieren $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 < s_1 < \rho_1 \leq \rho_2 < s_2 < r_2$ und $s_1 < r < s_2$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt für alle $z \in R_{s_1, s_2}(z_0)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ R_{s_1, s_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, s_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, s_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= F_2(z) - F_1(z) \end{aligned}$$

mit

$$F_j(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, s_j)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Nach Folgerung 1.12 ist $F_2 \in \mathcal{O}(D(z_0, s_2))$ und $F_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, s_1)})$.

Wir geben zunächst eine Reihenentwicklung für F_2 an. Es ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n,$$

wobei die Reihe wegen

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq \frac{\rho_2}{s_2} < 1 \quad \text{für } z \in \overline{D(z_0, \rho_2)}, \zeta \in \partial D(z_0, s_2)$$

gleichmäßig und absolut konvergiert. Setzen wir dies in die Definition von F_2 ein, so können wir anschließend wegen der Stetigkeit des Integrals Integration und Summation vertauschen und erhalten mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\overline{D(z_0, \rho_2)} \supset K$

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, s_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Hierbei gilt das zweite Gleichheitszeichen nach Folgerung 5.14, da die geschlossenen Wege $\partial_+ D(z_0, s_2)$ und $\partial_+ D(z_0, r)$ in $R_{r_1, r_2}(z_0)$ homolog sind.

Für die Betrachtung von F_1 beachten wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{-1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

mit wegen

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| \leq \frac{s_1}{\rho_1} < 1 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus D(z_0, \rho_1), \zeta \in \partial D(z_0, s_1)$$

gleichmäßiger und absoluter Konvergenz. Wie oben können wir Summation und Integration vertauschen und erhalten unter Verwendung von Folgerung 5.14

$$\begin{aligned} -F_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, s_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} d\zeta (z - z_0)^{-n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, s_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta (z - z_0)^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta (z - z_0)^{-n} \end{aligned}$$

mit gleichmäßiger und absoluter Konvergenz auf $\mathbb{C} \setminus D(z_0, \rho_1) \supset K$. Insgesamt folgt also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit a_n wie in (6.1), wobei die Konvergenz kompakt in R_{r_1, r_2} erfolgt.

Hat f auch eine Darstellung der Form

$$\forall z \in R_{r_1, r_2}(z_0) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

so muß die Konvergenz nach Definition der Konvergenz von Laurentreihen und Satz 4.5 schon kompakt in $R_{r_1, r_2}(z_0)$ erfolgen. Für $r_1 < r < r_2$ gilt dann nach (6.1) und Lemma 1.19:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \frac{(\zeta - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = b_n. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Eindeutigkeitsaussage bewiesen. □

Die Laurentreihenentwicklung einer Funktion f kann in verschiedenen konzentrischen Ringgebieten, in denen f holomorph ist verschiedene Gestalt haben. Hierzu ein einfaches Beispiel:

BEISPIEL 6.4. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$$

ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ holomorph. Für $z \in R_{0,1}(0)$ hat man

$$f(z) = \frac{-1}{z(1-z)} = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = - \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

und für $z \in R_{1,\infty}(0)$ gilt die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n.$$

Wir wollen uns nun der Untersuchung isolierter Singularitäten zuwenden.

DEFINITION 6.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, z_0 ein Punkt aus Ω und sei f eine auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ holomorphe Funktion. Für die isolierte Singularität z_0 von f bestehen drei Möglichkeiten:

- (a) z_0 ist *hebbare Singularität*, d.h. es gibt eine Funktion $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f(z) = F(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.
- (b) z_0 ist *Polstelle* von f , d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = g(z)(z - z_0)^{-n}$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Die natürliche Zahl n heißt die *Ordnung der Polstelle* z_0 .
- (c) Liegt weder (a) noch (b) vor, so nennt man z_0 eine *wesentliche Singularität* von f .

Im folgenden Satz zeigen wir, wie man die Art einer isolierten Singularität z_0 aus der Laurentreihenentwicklung in einer punktierten Umgebung von z_0 ablesen kann.

SATZ 6.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Sei $r > 0$ mit $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

die Laurentreihenentwicklung von f in $R_{0,r}(z_0)$ gemäß Satz 6.3. Dann gilt:

- (a) z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität von f , wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt.
- (b) z_0 ist genau dann eine Polstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von f , wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$ gilt.
- (c) z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität von f , wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$ gilt.

BEWEIS. (a) Ist $a_n = 0$ für alle $n < 0$, so ist die Laurentreihe von f sogar eine Potenzreihe und stellt eine in $D(z_0, r)$ holomorphe Funktion dar. Die Singularität z_0 ist also hebbar. Ist umgekehrt z_0 eine hebbare Singularität von f , so daß also eine Funktion $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ existiert mit $f \equiv F$ auf $\Omega \setminus \{z_0\}$, so hat F eine Potenzreihenentwicklung um z_0 mit Konvergenzradius $\geq r$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 6.3 muß diese aber schon mit der Laurentreihendarstellung von f in $R_{0,r}(z_0)$ übereinstimmen.

(b) Genau dann ist z_0 eine Polstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von f , wenn eine in $D(z_0, r)$ holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ existiert, so daß $f(z) \equiv (z - z_0)^{-m}g(z)$ auf $R_{0,r}(z_0)$

gilt. Nach Satz 4.8 ist dies genau dann der Fall, wenn eine in $D(z_0, r)$ konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ existiert mit $b_0 \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ auf $R_{0,r}(z)$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 6.3 folgt also die Behauptung.

(c) folgt aus (a), (b) und der Definition der wesentlichen Singularität. $\square$

DEFINITION 6.7. Sei $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen mit $\infty \in \Omega$. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *in ∞ holomorph*, falls die Funktion $g_f : \tilde{\Omega} := \{1/z; z \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g_f(z) := \begin{cases} f(\frac{1}{z}) & \text{für } 0 \neq z \in \tilde{\Omega} \\ f(\infty) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

in einer Umgebung von 0 holomorph ist. f heißt *auf Ω holomorph*, falls f auf $\Omega \cap \mathbb{C}$ und in ∞ holomorph ist. Mit $\mathcal{O}(\Omega)$ bezeichnen wir wieder die Menge aller auf Ω holomorphen Funktionen.

DEFINITION 6.8. Sei $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen mit $\infty \in \Omega$ und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C})$. Dann heißt der Punkt ∞ eine

- *hebbare Singularität* von f , falls 0 eine hebbare Singularität von g_f ist (g_f wie in Definition 6.7),
- *Polstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$* von f , falls 0 eine Polstelle der Ordnung m von g_f ist,
- *wesentliche Singularität* von f , falls 0 eine wesentliche Singularität von g_f ist.

Durch Anwenden von Satz 6.6 auf g_f im Punkte 0 erhalten wir:

SATZ 6.9. Sei $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen mit $\infty \in \Omega$ und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C})$. Sei $r \geq 0$ mit $R_{r,\infty}(0) \subseteq \Omega$ und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

die Laurentreihenentwicklung von f in $R_{r,\infty}(0)$ gemäß Satz 6.3. Dann gilt:

- (a $_{\infty}$) ∞ ist genau dann eine hebbare Singularität von f , wenn $a_n = 0$ für alle $n > 0$.
- (b $_{\infty}$) ∞ ist genau dann eine Polstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von f , wenn $a_n = 0$ für alle $n > m$ und $a_m \neq 0$ gilt.
- (c $_{\infty}$) ∞ ist genau dann eine wesentliche Singularität von f , wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n > 0$ gilt.

FOLGERUNG 6.10. Für ganze Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Potenzreihenentwicklung um 0 auch die Laurentreihenentwicklung um 0. Wir erhalten also:

- (a' $_{\infty}$) ∞ ist genau dann eine hebbare Singularität von f , wenn f konstant ist.
- (b' $_{\infty}$) ∞ ist genau dann eine Polstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von f , wenn f ein Polynom vom Grad m ist.
- (c' $_{\infty}$) ∞ ist genau dann eine wesentliche Singularität von f , wenn f keine Polynomfunktion ist.

Für das Werteverhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer wesentlichen Singularität gilt:

SATZ 6.11 (Casorati–Weierstraß). Sei $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen und sei $z_0 \in \Omega$ eine wesentliche Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Dann gilt für jede in $\widehat{\mathbb{C}}$ offene Umgebung $U \subseteq \Omega$ von z_0 :

$$\overline{f(U \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}.$$

BEWEIS. Da der Fall $z_0 = \infty$ sich durch Betrachtung der oben eingeführten Funktion g_f auf den Fall $z_0 = 0$ zurückführen läßt, genügt es den Beweis für den Fall $z_0 \in \mathbb{C}$ zu führen. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen also an, daß es eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von z_0 gibt mit $\overline{f(U \setminus \{z_0\})} \neq \mathbb{C}$, etwa $w \notin \overline{f(U \setminus \{z_0\})}$ für ein $w \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $h : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(z) := (f(z) - w)^{-1}$ für $z_0 \neq z \in U$ auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph und wegen $\sup_{z_0 \neq z \in U} |h(z)| \leq \text{dist}(w, \overline{f(U \setminus \{z_0\})})^{-1} < \infty$ auch beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 2.12 ist h also in z_0 holomorph ergänzbar. Nach Satz 4.10 gibt es also eine Funktion $h_1 \in \mathcal{O}(U)$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $h_1(z_0) \neq 0$ und

$$\forall z \in U \setminus \{z_0\} : \quad h(z) = (z - z_0)^m h_1(z).$$

Mit der Definition von h folgt hieraus

$$f(z) = w + \frac{1}{h(z)} = w + (z - z_0)^{-m} \cdot \frac{1}{h_1(z)}.$$

Da $h_1(z) \neq 0$ auf U gilt, ist also z_0 eine hebbare Singularität oder eine Polstelle von f , im Widerspruch dazu, daß z_0 nach Voraussetzung eine wesentliche Singularität ist. Also muß doch die Behauptung gelten. $\square$

BEISPIEL 6.12. Für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ∞ eine wesentliche Singularität. Da die Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt gilt für jede Umgebung U von ∞ , daß $0 \notin \exp(U \setminus \{\infty\})$. Dies zeigt daß auf die Abschließung in dem Satz von Casorati–Weierstraß nicht verzichtet werden kann.

Eine sehr viel schärfere Aussage als der Satz von Casorati und Weierstraß ist der *große Picardsche Satz*, der besagt, daß eine holomorphe Funktion in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität alle bis auf höchstens einen komplexen Zahlenwert annimmt. Den Beweis dieses Satzes findet man z.B. in dem Kapitel IV von [31].

DEFINITION 6.13. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Sei weiter $r > 0$ mit $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurentreihenentwicklung von f um z_0 in $R_{0,r}(z_0)$. Dann heißt

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, \rho)} f(\zeta) d\zeta \quad (6.2)$$

(mit $0 < \rho < r$, vergl. (6.1)) das *Residuum von f in z_0* .

Der folgende Residuensatz hat viele interessante Anwendungen, z.B. auf die Berechnung von reellen eigentlichen und uneigentlichen Integralen und das Zählen von Nullstellen und Polen entsprechend ihrer Vielfachheit.

SATZ 6.14 (Residuensatz). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei f eine Funktion die auf Ω holomorph ist bis auf isolierte Singularitäten. Dann gilt für jede in Ω nullhomologe Kette Γ von geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Wegen in Ω , auf deren Spur keine Singularitäten liegen:

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{z \in \Omega \setminus \text{Spur}(\Gamma)} n(\Gamma, z) \text{Res}(f, z). \quad (6.3)$$

BEWEIS. Sei Ω_0 die Menge aller $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ mit $n(\Gamma, z) = 0$. Da die Windungszahl stets eine ganze Zahl ist und stetig in Abhängigkeit von z ist, ist Ω_0 offen. Ferner ist die unbeschränkte Zusammenhangskomponente G_∞ von $\mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\Gamma)$ in Ω_0 enthalten und es gilt $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \Omega_0$ da Γ nullhomolog in Ω ist. Daher ist $K := \mathbb{C} \setminus \Omega_0$ eine kompakte Teilmenge von Ω . Nach Voraussetzung gilt für alle $z \in \Omega$: Es gibt ein $\varepsilon_z > 0$ mit $D(z, \varepsilon_z) \subseteq \Omega$ so daß f auf $D(z, \varepsilon_z) \setminus \{z_0\}$ definiert und holomorph ist. Die Familie $(D(z, \varepsilon_z))_{z \in K}$ ist dann eine offene Überdeckung von K , aus der wir wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $D(z_1, \varepsilon_{z_1}), \dots, D(z_k, \varepsilon_{z_k})$ auswählen können. Insbesondere ist die Funktion f daher auf

$$\left(\bigcup_{j=1}^k D(z_j, \varepsilon_{z_j}) \right) \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$$

definiert und holomorph. Da f auf $\text{Spur}(\Gamma)$ keine Singularitäten hat, sind $z_1, \dots, z_k$ die einzigen isolierten Singularitäten von f in $\Omega \setminus \text{Spur}(\Gamma)$, für die von 0 verschiedene Windungszahlen auftreten können. Die rechte Seite in (6.3) ist also gleich der endlichen Summe

$$2\pi i \sum_{j=1}^k n(\Gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j).$$

Bezeichne S_0 die Menge der isolierten Singularitäten w von f in Ω mit $n(\Gamma, w) = 0$. Dann ist $\Omega \setminus S_0$ offen und die Kette Γ ist auch in $\Omega \setminus S_0$ nullhomolog. Zu den Punkten z_j gibt es $\delta_j > 0$ mit $\overline{D(z_j, \delta_j)} \subset \Omega$ für $j = 1, \dots, k$, so daß die Kreisscheiben $\overline{D(z_1, \delta_1)}, \dots, \overline{D(z_k, \delta_k)}$ paarweise disjunkt sind. Dann ist die Kette

$$\Gamma - \sum_{j=1}^k n(\Gamma, z_j) \partial_+ D(z_j, \delta_j)$$

nullhomolog in $\Omega \setminus (S_0 \cup \{z_1, \dots, z_k\})$. Nach Folgerung 5.14 folgt mit (6.2)

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^k n(\Gamma, z_j) \int_{\partial_+ D(z_j, \delta_j)} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^k n(\Gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j)$$

und damit die Behauptung. $\square$

Wir werden den Residuensatz häufig in der folgenden Variante anwenden:

FOLGERUNG 6.15. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $E \subset \Omega$ ein Greenscher Bereich im Sinne von Definition 1.15. Seien $z_1, \dots, z_k \in \text{int}(E)$ gegeben und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$. Dann gilt

$$\int_{\partial_+ E} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j).$$

BEWEIS. Für alle $z \in \text{int}(E)$ gilt nach Satz 5.9 und der Cauchyschen Integralformel

$$n(\partial_+ E, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1$$

also auch $n(\partial_+ E, z_j) = 1$ für $j = 1, \dots, k$. Mit dem Residuensatz folgt die Behauptung. $\square$

Wie bereits bemerkt, wollen wir den Residuensatz zur Berechnung gewisser bestimmter und uneigentlicher Integrale verwenden. Der Trick dabei ist, daß man die Residuen auf

andere Weise als mit der Formel (6.2) berechnet. Hierzu dienen insbesondere die folgenden Rechenregeln zur Berechnung des Residuums in Polstellen.

LEMMA 6.16. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $z_0 \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$.*

(a) *Ist z_0 eine Polstelle erster Ordnung, so ist*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

(b) *Ist $f(z) = g(z)/h(z)$ auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit auf Ω holomorphen Funktionen, für die gilt $g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$ (d.h. g hat in z_0 keine Nullstelle und h hat eine erster Ordnung in z_0), so gilt:*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(c) *Ist z_0 eine Polstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von f , so gilt*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m).$$

BEWEIS. (c) Sei z_0 Polstelle der Ordnung m von f und sei $r > 0$ mit $D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Dann hat f nach Satz 6.6 eine Laurentreihendarstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } 0 < |z - z_0| < r.$$

Die Funktion $g : z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ ist dann in z_0 holomorph ergänzbar und hat in $D(z_0, r)$ die Potenzreihendarstellung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| < r.$$

Hieraus erhalten wir für den zu berechnenden Koeffizienten a_{-1} :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

woraus die Behauptung folgt.

(a) folgt aus (c) mit $m = 1$ und aus (a) folgt in der Situation von (b)

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} g(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

wegen $h(z_0) = 0$. □

Wir geben nun, wie angekündigt einige Methoden zur Berechnung bestimmter und uneigentlicher Integrale mit Hilfe des Residuensatzes an. Das folgende Lemma zeigt, wie man Integrale über ein volles Periodenintervall berechnet, deren Integranden holomorphe Funktionen von $t \mapsto e^{t2\pi i/T}$ mit endlich vielen isolierten Singularitäten in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ sind.

LEMMA 6.17. *Seien $z_0 := 0, z_1, \dots, z_k \in \mathbb{D}$, $r > 1$ und sei f eine in $D(0, r) \setminus \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt mit $g(z) := z^{-1}f(z)$ für $z \in D(0, r) \setminus \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ für $T > 0$ und alle $s \in \mathbb{R}$:*

$$\int_s^{s+T} f\left(\exp\left(\frac{2\pi it}{T}\right)\right) dt = T \sum_{j=0}^k \operatorname{Res}(g, z_j).$$

BEWEIS. Der positiv orientierte Rand $\partial_+ \mathbb{D}$ von $\mathbb{D}$ wird über $[s, s+T]$ durch die Funktion $t \mapsto \exp(2\pi it/T)$ parametrisiert. Daher folgt unter Verwendung von Folgerung 6.15:

$$\int_s^{s+T} f\left(\exp\left(\frac{2\pi it}{T}\right)\right) dt = \frac{T}{2\pi i} \int_{\partial_+ \mathbb{D}} \frac{f(z)}{z} dz = T \sum_{j=0}^k \text{Res}(g, z_j).$$

□

BEISPIEL 6.18. Um für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < |b| < |a|$ das Integral

$$I := \int_0^\pi \frac{1}{a + b \cos(t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos(t)} dt$$

zu berechnen beachten wir $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$ und erhalten

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt$$

mit

$$f(z) = \frac{1}{a + \frac{b}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{2z}{2az + b(z^2 + 1)}.$$

Die rationale Funktion g mit

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = \frac{2}{2az + b(z^2 + 1)}$$

ist also in $z_0 = 0$ holomorph ergänzbar, so daß $\text{Res}(g, z_0) = 0$ gilt. Die einzigen Singularitäten von g liegen in den Nullstellen des Nenners von g vor. Für diese errechnet man

$$z_1 = -\frac{a}{b} + \text{sgn}\left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \quad z_2 = -\frac{a}{b} - \text{sgn}\left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}.$$

Wegen $|a|/|b| > 1$ liegt nur z_1 in der offenen Einheitskreisscheibe. Für das Residuum gilt nach Lemma 6.16 (a):

$$\begin{aligned} \text{Res}(g, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2(z - z_1)}{2az + b(z^2 + 1)} = \frac{2}{b(z_1 - z_2)} = \\ &= \frac{1}{\text{sgn}(b) \text{sgn}(a/b) \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\text{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 6.17 erhalten wir also schließlich das Ergebnis:

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + b \cos(t)} dt = \frac{2\pi}{2} (\text{Res}(g, z_0) + \text{Res}(g, z_1)) = \frac{\text{sgn}(a)\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Zur Berechnung gewisser uneigentlicher Integrale ist das folgende Lemma nützlich.

LEMMA 6.19. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, die die Abschließung der oberen Halbebene $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$ enthält und seien $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{H}_+$. Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$ mit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \|f\|_{\partial D(0,R) \cap \overline{\mathbb{H}_+}} = 0 \quad (6.4)$$

und existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j).$$

BEWEIS. Für $R > 0$ sei $E_R := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) \geq 0 \text{ und } |z| \leq R\}$ die abgeschlossene Halbkreisfläche mit Radius R und Mittelpunkt 0 in der abgeschlossenen oberen Halbebene. Nach der Voraussetzung (6.4) gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $R_0 > 0$, so daß $\pi R \|f\|_{\partial D(0,R) \cap \overline{\mathbb{H}_+}} < \varepsilon$ für alle $R \geq R_0$. Hierbei können wir R_0 so groß wählen, daß für $R \geq R_0$ alle Punkte $z_1, \dots, z_k$ in $\operatorname{int} E_R$ enthalten sind. Nach dem Residuensatz in der Fassung von Folgerung 6.15 gilt dann für alle $R \geq R_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R}^R f(x) dx - 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, z_j) \right| &= \left| \int_{-R}^R f(x) dx - \int_{\partial_+ E_R} f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right|, \end{aligned}$$

wobei γ_R der von R nach $-R$ durchlaufene obere Halbkreisbogen um 0 sei. Durch Abschätzung des letzten Integrals erhalten wir:

$$\left| \int_{-R}^R f(x) dx - 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, z_j) \right| \leq \pi R \|f\|_{\partial D(0,R) \cap \overline{\mathbb{H}_+}} < \varepsilon,$$

woraus wegen der Existenz des uneigentlichen Integrals folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, z_j).$$

□

BEMERKUNG 6.20. Lemma 6.19 ist insbesondere dann anwendbar, wenn $f = p/q$ eine rationale Funktion ist mit Polynomen p, q , wobei $\operatorname{Grad}(q) \geq \operatorname{Grad}(p) + 2$ gelte und q keine reellen Nullstellen habe. Man rechnet leicht nach, daß dann die Bedingung (6.4) erfüllt ist und das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)/q(x) dx$ existiert.

BEISPIEL 6.21. Wir wollen das Integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

berechnen. Gemäß Bemerkung 6.20 ist Lemma 6.19 anwendbar. Die isolierten Singularitäten der rationalen Funktion f mit

$$f(z) := \frac{z^2}{z^4 + 1}$$

sind genau die vier Nullstellen des Nenners also $z_j := \exp(i(\frac{\pi}{4} + j\frac{\pi}{2}))$, $j = 0, 1, 2, 3$. Von diesen liegen z_0 und z_1 in der oberen und z_2 und z_3 in der unteren Halbebene. Gemäß Lemma 6.19 erhalten wir also mit Hilfe von Lemma 6.16 (b) (wobei $g(z) \equiv z^2$ und $h(z) \equiv z^4 + 1$):

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)) = 2\pi i \left(\frac{z_0^2}{4z_0^3} + \frac{z_1^2}{4z_1^3} \right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{2} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

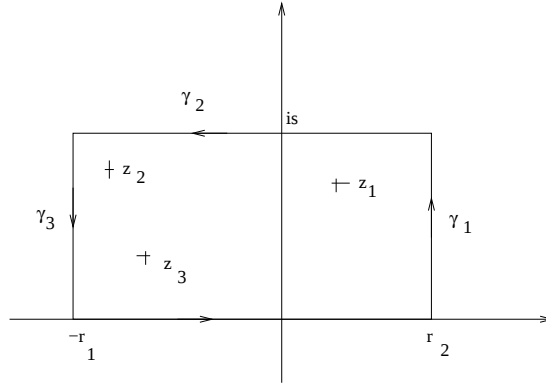


ABBILDUNG 1. Zum Beweis zu Lemma 6.22

LEMMA 6.22. Sei $f = p/q$ eine rationale Funktion mit Polynomen p, q , wobei keine reellen Nullstellen habe und $\text{Grad}(q) > \text{Grad}(p)$ gelte. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix) dx$ und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix) dx = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}_+} \text{Res}(f(z) \exp(iz), z), \quad (6.5)$$

wobei $\mathbb{H}_+$ wieder die obere Halbebene bezeichne.

BEWEIS. Das Polynom q hat nur endlich viele Nullstellen $z_1, \dots, z_k$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H}_+$. Sei R das Rechteck mit den Ecken $-r_1, r_2, r_2 + is, -r_1 + is$, wobei $r_1, r_2, s \in (0, \infty)$ so groß seien, daß alle Polstellen $z_1, \dots, z_k$ in $\text{int}(R)$ enthalten sind (vergl. Abb. 1). Nach Folgerung 6.15 gilt:

$$\int_{-r_1}^{r_2} f(x) e^{ix} dx - 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z) \exp(iz), z_j) = -I_1 - I_2 - I_3$$

mit $I_j := \int_{\gamma_j} f(z) \exp(iz) dz$ für $j = 1, 2, 3$, wobei $\gamma_1 := [r_2, r_2 + is]$, $\gamma_2 := [r_2 + is, -r_1 + is]$ und $\gamma_3 := [-r_1 + is, -r_1]$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es wegen $\text{Grad}(q) > \text{Grad}(p)$ und wegen $|e^{iz}| = e^{-\text{Im}(z)} < 1$ für $\text{Im}(z) > 0$ ein $R > 0$, so daß für alle $z \in \mathbb{H}_+$ mit $|z| > R$ gilt $|f(z)| < \varepsilon/3$. Durch Vergrößern können wir erreichen, daß $R > 1 + \max_{j=1, \dots, k} |z_j|$. Seien nun $r_1, r_2 > R$ beliebig. Für I_1 erhalten wir dann (wegen $|r_2 + its| > R$ für alle $t \in [0, 1]$)

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_0^1 f(r_2 + its) e^{i(r_2 + its)} is dt \right| \leq \int_0^1 |f(r_2 + its)| e^{-ts} s dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \int_0^1 e^{-ts} s dt \leq \frac{\varepsilon}{3} (1 - e^{-s}) < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Analog sieht man $|I_3| < \varepsilon/3$. Um auch $|I_2| < \varepsilon/3$ zu erhalten wählen wir $s := R + \log(r_1 + r_2)$. Dann gilt wegen $|r_2 - t(r_2 + r_1) + is| \geq s > R$ für I_2 :

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_0^1 f(r_2 - t(r_2 + r_1) + is) e^{i(r_2 - t(r_2 + r_1) + is)} (-r_1 - r_2) dt \right| \leq \\ &\leq (r_1 + r_2) \int_0^1 |f(r_2 - t(r_2 + r_1) + is)| e^{-s} dt \leq (r_1 + r_2) e^{-s} \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Damit folgt also für alle $r_1, r_2 > R$ bei obiger Wahl von $s = s(r_1, r_2)$:

$$\left| \int_{-r_1}^{r_2} f(x) e^{ix} dx - 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f(z) \exp(iz), z_j) \right| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < \varepsilon.$$

Also gilt:

$$\lim_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \int_{-r_1}^{r_2} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f(z) \exp(iz), z_j).$$

Insbesondere existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix) dx$ und es gilt (6.5). $\square$

Gehen wir in Lemma 6.22 zum Real und Imaginärteil über, so erhalten wir:

FOLGERUNG 6.23. *Sei $f = p/q$ eine rationale, auf $\mathbb{R}$ reellwertigen Funktion mit Polynomen p, q , wobei $\operatorname{Grad}(q) > \operatorname{Grad}(p)$ gelte und q keine reellen Nullstellen habe. Dann existieren die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(x) dx$ und es gilt*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx &= -2\pi \operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f(z) \exp(iz), z_j) \right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(x) dx &= 2\pi \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f(z) \exp(iz), z_j) \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

wobei $z_1, \dots, z_k$ die Nullstellen von q mit positiven Imaginärteilen seien.

BEISPIEL 6.24. Für $\omega > 0, a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{a^2 + (t - b)^2} dt.$$

Mit der Variablensubstitution $x = \omega t$ überführen wir I in die Gestalt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\omega(a^2 + (x/\omega - b)^2)} dx$$

so daß wir Folgerung 6.23 anwenden können. Die rationale Funktion f mit

$$f(z) = \frac{1}{\omega(a^2 + (z/\omega - b)^2)}$$

hat die Polstellen (beide von der Ordnung 1)

$$z_1 = \omega(b + ia), \quad z_2 = \omega(b - ia),$$

wobei nur z_1 positiven Imaginärteil besitzt. Gemäß Folgerung 6.23 gilt also (unter Verwendung von Lemma 6.16 (b)):

$$\begin{aligned} I &= -2\pi \operatorname{Im} (\operatorname{Res}(f(z) e^{iz}, z_1)) = -2\pi \operatorname{Im} \left(\frac{e^{iz_1}}{2(z_1/\omega - b)} \right) = \\ &= -\pi \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\omega(b+ia)}}{ia} \right) = \frac{\pi}{a} \operatorname{Im}(ie^{-\omega a} e^{i\omega b}) = \\ &= \frac{\pi}{a} e^{-\omega a} \cos(\omega b). \end{aligned}$$

Den Residuensatz kann man auch zum Zählen von Nullstellen und Polstellen verwenden.

SATZ 6.25 (Argumentprinzip). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $E \subset \Omega$ ein Greenscher Bereich und $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. Die Punkte $z_1, \dots, z_k \in \text{int}(E)$ seien Polstellen der Ordnung $n_1, \dots, n_k$ einer auf $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ holomorphen Funktion f . f habe auf ∂E keine Nullstelle. Dann hat f (nach dem Satz von der Isoliertheit der Nullstellen 4.12) höchstens endlich viele Nullstellen $w_1, \dots, w_j$ der Ordnung $m_1, \dots, m_j$ in $\text{int}(E)$. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p=1}^j m_p F(w_p) - \sum_{q=1}^k n_q F(z_q).$$

Insbesondere folgt im Fall $F \equiv 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p=1}^j m_p - \sum_{q=1}^k n_q.$$

BEWEIS. Nach Der Fassung 6.15 des Residuensatzes für Greensche Bereiche gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p=1}^j \text{Res}\left(F \frac{f'}{f}, w_p\right) + \sum_{q=1}^k \text{Res}\left(F \frac{f'}{f}, z_q\right). \quad (6.7)$$

Wir berechnen zunächst die Residuen an den Polstellen $z_1, \dots, z_k$ von f : Für diese hat man

$$f(z) = (z - z_q)^{-n_q} g_q(z) \quad \text{für } z \in \Omega \setminus \{z_r; 1 \leq r \leq k, r \neq q\}$$

mit auf $\Omega \setminus \{z_r; 1 \leq r \leq k, r \neq q\}$ holomorphen Funktionen g_q mit $g_q(z_q) \neq 0$ für $q = 1, \dots, k$. Mit der Produktregel für die komplexe Ableitung erhält man

$$F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = F(z) \left(\frac{g'_q(z)}{g_q(z)} - n_q \cdot \frac{1}{z - z_q} \right).$$

In z_q liegt also eine Polstelle der Ordnung 1 des Integranden vor und wir erhalten nach Lemma 6.16 (b):

$$\text{Res}\left(F \frac{f'}{f}, z_q\right) = -n_q F(z_q) \quad \text{für } q = 1, \dots, k.$$

Analog erhält man an den Nullstellen w_p von f

$$f(z) = (z - w_p)^{m_p} h_p(z) \quad \text{mit } h_p \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}), h_p(w_p) \neq 0.$$

Auch in diesem Fall liegt wegen

$$F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = F(z) \left(\frac{h'_p(z)}{h_p(z)} + m_p \cdot \frac{1}{z - w_p} \right)$$

in w_p eine Polstelle erster Ordnung des Integranden vor. Für das Residuum in w_p ergibt sich also:

$$\text{Res}\left(F \frac{f'}{f}, w_p\right) = m_p F(w_p) \quad \text{für } p = 1, \dots, j.$$

Durch Einsetzen der berechneten Residuen in (6.7) erhält man nun die Behauptung. $\square$

Als Anwendung beweisen wir folgende häufig sehr nützliche Vergleichsaussage:

SATZ 6.26 (Rouché). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Sind $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ gegeben mit

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial K, \quad (6.8)$$

so haben f und g gleich viele Nullstellen in K (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt).

BEWEIS. Aus der Voraussetzung folgt zunächst, daß die Funktionen f und g auf dem Rand von K keine Nullstellen haben. Auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω , die mit K nicht leeren Durchschnitt hat sind also f und g beide nicht identisch verschwindend. Nach dem Identitätssatz können beide Funktionen nur endlich viele Nullstellen in K haben. Die Menge $K_0 := \{z \in K; |f(z) + g(z)| = |f(z)| + |g(z)|\}$ ist wegen der Stetigkeit von f und g kompakt und wegen (6.8) in $\text{int}(K)$ enthalten und enthält alle Nullstellen von f und von g , die in K liegen. Nach Aufgabe 1.10 gibt es einen Greenschen Bereich E mit $K_0 \subset \text{int}(E) \subset E \subset \text{int}(K)$. Für die Anzahlen n_f und n_g der Nullstellen von f und von g in K gilt also nach dem Argumentprinzip 6.25:

$$n_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{und} \quad n_g = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{g'(z)}{g(z)} dz. \quad (6.9)$$

Auf der offenen Menge

$$\Omega_0 := \{z \in \Omega; |f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|\} \quad (6.10)$$

betrachten wir die Hilfsfunktion h mit $h(z) = f(z)/g(z)$ für alle $z \in \Omega_0$. Für alle $z \in \Omega_0$ gilt (wie man nach Division der die Menge Ω_0 in (6.10) definierenden Ungleichung durch $|g(z)|$ sieht)

$$|h(z) + 1| < 1 + |h(z)|.$$

Hieraus folgt insbesondere $h(\Omega_0) \subset \Omega_+ := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$. Nun hat die Funktion $z \mapsto 1/z$ auf Ω_+ , wie wir in Bemerkung 5.7 festgestellt hatten, eine Stammfunktion $\widetilde{\text{Log}}$. Setzen wir

$$H(z) := \widetilde{\text{Log}}(h(z)) \quad \text{für alle } z \in \Omega_0,$$

so folgt mit der Kettenregel und der Quotientenregel:

$$H'(z) \equiv \frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)},$$

d.h. H ist eine Stammfunktion zu $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$ auf Ω_0 . Da $\partial_+ E$ eine Kette von endlich vielen geschlossenen Wegen in Ω_0 ist folgt also aus Folgerung 3.2 und (6.9)

$$n_f - n_g = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$$

und damit die Behauptung. □

Mit Hilfe des Satzes von Rouché läßt sich auch ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Satz 2.9) angeben:

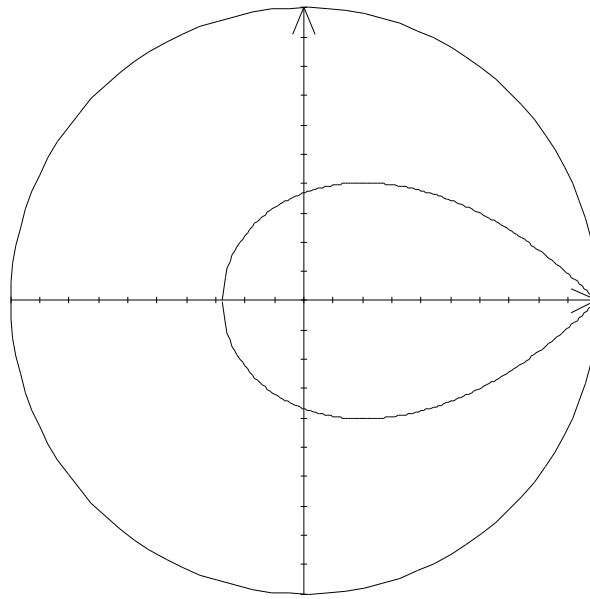
Sei also $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Insbesondere ist $a_n \neq 0$ und man hat mit $q(z) := -a_n z^n$

$$\frac{|p(z) + q(z)|}{|q(z)|} = \frac{\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|}{|a_n| \cdot |z|^n} \rightarrow 0 \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty.$$

Also gibt es ein $r > 0$ mit $|p(z) + q(z)| < \frac{1}{2}|q(z)| < |p(z)| + |q(z)|$ für alle $z \in \partial D(0, r)$. Nach dem Satz von Rouché haben daher p und q gleich viele Nullstellen in $D(0, r)$ (entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführt). Die einzige Nullstelle von q ist in 0 und hat die Vielfachheit n . Somit hat p wenigstens n Nullstellen (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt).

Es folgen nun einige Beispiele von Aussagen über das Nullstellenverhalten von gewissen holomorphen Polynomen. Mit

$$T_n(z) := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ABBILDUNG 2. Der Bereich $\mathbb{E}$

gilt bekanntlich $T_n \rightarrow \exp$ für $n \rightarrow \infty$ auf $\mathbb{C}$ mit kompakter Konvergenz. Als Polynom vom Grad n hat T_n wenigstens n Nullstellen in $\mathbb{C}$, während die Exponentialfunktion nirgends verschwindet. Wir wollen uns überlegen, wie sich die Nullstellenmenge von T_n für $n \rightarrow \infty$ verhält. Als Hilfsmittel zeigen wir den folgenden Satz, der auch von unabhängigem Interesse ist.

SATZ 6.27 (Eneström (1893), Kakeya (1912)). *Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten für die gilt: $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$. Dann hat p keine Nullstelle in $\mathbb{D}$.*

BEWEIS. Das Polynom q mit $q(z) := (1 - z)p(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ hat die gleichen Nullstellen wie p und zusätzlich eine Nullstelle in $z = 1$. Für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt

$$\begin{aligned} |q(z)| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=0}^n a_k z^{k+1} \right| \\ &\geq a_0 - |z| \cdot \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) z^{k-1} - a_n z^n \right| \\ &\geq a_0 - |z| \left(\sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) + a_n \right) = (1 - |z|) a_0 > 0. \end{aligned}$$

Also hat q und damit auch p keine Nullstelle in $\mathbb{D}$. □

Statt der Taylorpolynome T_n der Exponentialfunktion betrachten wir die skalierten Polynome p_n mit

$$p_n(z) := T_n(nz) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} z^k.$$

Es gilt nun:

SATZ 6.28 (Szegő (1924)). *Alle Nullstellen von p_n liegen in der Menge*

$$\mathbb{E} := \{z \in \overline{\mathbb{D}}; |ze^{1-z}| > 1\}.$$

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß die Nullstellen von p_n stets in $\overline{\mathbb{D}}$ liegen. Hierzu definieren wir:

$$p_n^*(z) := z^n p_n\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} z^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} z^k.$$

Wegen

$$\frac{n^{n-k}}{(n-k)!} - \frac{n^{n-k-1}}{(n-k-1)!} = \frac{n^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \left(\frac{n}{n-k} - 1\right) > 0$$

für $k = 0, 1, \dots, n-1$ ist die Voraussetzung zu Satz 6.27 für das Polynom p_n^* erfüllt. p_n^* hat daher keine Nullstelle in $\mathbb{D}$. Da die Nullstellen von p_n gerade die inversen zu den Nullstellen von p_n^* sind, müssen also alle Nullstellen von p_n in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe liegen.

Sei nun $z \in \overline{\mathbb{D}}$ mit $|ze^{1-z}| \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |1 - e^{-nz} p_n(z)| &= |e^{-nz} (e^{nz} - T_n(nz))| \\ &= \left| (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} \right| \\ &\leq |ze^{1-z}|^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} < 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß z keine Nullstelle von p_n sein kann. $\square$

FOLGERUNG 6.29. *Ist z Nullstelle des n -ten Taylorpolynoms T_n der Exponentialfunktion, so gilt $n/4 < |z| \leq n$.*

BEWEIS. Der Radius ρ des größten in $\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{E}$ enthaltenen Kreises um 0 erfüllt

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \min\{x^2 + y^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } (x^2 + y^2)e^{2-2x} = 1\} \\ &= \min\{x^2 + y^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } (x^2 + y^2) = e^{2x-2}\} \end{aligned}$$

Das Minimum wird angenommen für $x = -\rho$ mit $\rho^2 = e^{-2\rho-2}$, d.h. $\rho = e^{-(\rho+1)}$. Numerische Rechnungen zeigen $\rho \approx 0.278465 > 1/4$. $\square$

Der folgende Abschätzungssatz für die Lage der Eigenwerte einer quadratischen Matrix wird in der numerischen linearen Algebra häufig verwendet.

SATZ 6.30 (Kreisesatz von Gerschgorin). *Sei $A := [a_{j,k}]_{j,k=1,\dots,N} \in M_{N \times N}(\mathbb{C})$ eine $(N \times N)$ -Matrix. Für $j = 1, \dots, N$ sei $r_j := \sum_{k \neq j}^N |a_{j,k}|$ und $K_j := \overline{D(a_{j,j}, r_j)}$. Dann gilt:*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\} \subset \bigcup_{j=1}^N K_j. \quad (6.11)$$

Ist $K = K_{j_1} \cup \dots \cup K_{j_r}$ und $K \cap K_j = \emptyset$ für alle $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$, $j_1, \dots, j_r$ paarweise verschieden, so hat die Matrix A in K genau r Eigenwerte (entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführt).

BEWEIS. (a) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^N K_j$ und sei $u = [u_j]_{j=1,\dots,N} \in \mathbb{C}^N$ beliebig mit $(\lambda I - A)u = 0$. Sei $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ mit $|u_{j_0}| = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j|$. Durch Betrachtung der j_0 -ten Komponente der Gleichung $(\lambda I - A)u = 0$ sieht man

$$(\lambda - a_{j_0,j_0})u_{j_0} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^N a_{j_0,k}u_k = 0$$

und daher

$$|u_{j_0}| = \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^N a_{j_0,k}u_k \right| \cdot \frac{1}{|\lambda - a_{j_0,j_0}|} \leq \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^N a_{j_0,k} \right| \cdot \frac{|u_{j_0}|}{|\lambda - a_{j_0,j_0}|}.$$

Wegen $|\lambda - a_{j_0,j_0}| > r_{j_0}$ ist dies nur möglich, wenn $u_{j_0} = 0$ ist. Nach Definition von $u_{j_0} =$ folgt $u = 0$, d.h. λ kann kein Eigenwert von A sein.

(b) Ist $K \cap K_j = \emptyset$ für alle $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$, so gilt für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ auch noch $K_\varepsilon \cap K_{j,\varepsilon} = \emptyset$ für alle $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$ mit

$$K_{j,\varepsilon} := \overline{D(a_{j,j}, r_j + \varepsilon)} \quad \text{für } j = 1, \dots, N$$

und $K_\varepsilon := K_{j_1,\varepsilon} \cup \dots \cup K_{j_r,\varepsilon}$. Als endliche Vereinigung von Kreisen ist K_ε ein Greenscher Bereich. Nach (a) gilt

$$\forall \lambda \in \partial K_\varepsilon : \quad 0 \neq p_A(\lambda) := \det(\lambda I - A)$$

Wir bezeichnen nun mit D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $a_{j,j}$ auf der Diagonalen und mit C die Matrix $C := A - D$. Ebenfalls aus (a) folgt für $0 \leq t \leq 1$

$$\sigma(D + tC) \subset \bigcup_{j=1}^N K_j.$$

Die Funktion $(t, \lambda) \mapsto p_{D+tC}(\lambda)$ ist auf $[0, 1] \times \partial K_\varepsilon$ stetig und ohne Nullstelle. Auch die Funktion $(t, \lambda) \mapsto p'_{D+tC}(\lambda)$ ist auf $[0, 1] \times \partial K_\varepsilon$ stetig. Nach dem Argumentprinzip 6.25 gilt für die Anzahl N_t der Nullstellen von $p_{D+tC}(\lambda)$ in $\text{int}(K_\varepsilon)$:

$$N_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ K_\varepsilon} \frac{p'_{D+tC}(\lambda)}{p_{D+tC}(\lambda)} d\lambda$$

und dies hängt nach Lemma 1.10 stetig von dem Parameter t ab. Da die Werte N_t ganze Zahlen sind, muß also die Abbildung $t \mapsto N_t$ auf $[0, 1]$ konstant sein. Insbesondere gilt $N_1 = N_0$, d.h. die Matrix $A = D + C$ hat in K_ε genauso viele Eigenwerte wie die Matrix D . Die Eigenwerte von D in K_ε sind aber genau die Werte $a_{j_1,j_1}, \dots, a_{j_r,j_r}$. Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt also, daß A genau r Eigenwerte in K besitzt (entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführt). $\square$

Eine Verfeinerung der Abschätzung für das Spektrum von A erhält man, indem man den Gerschgorinschen Kreisesatz zusätzlich auf die zu A transponierte Matrix anwendet.

Weitere Aussagen zur Lage der Nullstellen holomorpher Polynome findet man in der Monographie [35] von Rahman und Schmeisser.

Übungsaufgaben zu Kapitel 6.

AUFGABE 6.1. Entwickeln Sie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{1, 2\})$ mit

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\})$$

in eine Laurent-Reihe auf den Kreisringen $R_{1,2}(0)$, $R_{2,\infty}(0)$, $R_{0,1}(1)$ und $R_{0,1}(2)$.

AUFGABE 6.2. (a) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, seien $r_1, r_2 \in [0, \infty]$ mit $r_1 < r_2$, und seien f und g zwei auf $R_{r_1, r_2}(z_0)$ holomorphe Funktionen mit den Laurentreihendarstellungen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

für alle $z \in R_{r_1, r_2}(z_0)$. Zeigen Sie:

$$(fg)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

für alle $z \in R_{r_1, r_2}(z_0)$, wobei

$$c_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Gleichung (6.1) aus Satz 6.3 für die Funktion fg .

(b) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ mit

$$f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

auf $R_{0,\infty}(0)$.

AUFGABE 6.3. Entwickeln Sie die Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ mit

$$f(z) := \frac{\exp(\pi z)}{(z-1)^{2004}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

in eine Laurent-Reihe auf dem Kreisring $R_{0,\infty}(1)$.

AUFGABE 6.4. Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in ihren Polstellen:

$$(a) \quad f_n(z) := \frac{1}{(z^n - 1)^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$(b) \quad g_a(z) := \frac{2z+1}{1 - \cos(z-a)} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

AUFGABE 6.5. Bestimmen Sie sämtliche Singularitäten der folgenden Funktionen f , bestimmen Sie ihre Art und berechnen Sie jeweils das Residuum.

$$(a) \quad f(z) := \frac{\sin(z)}{z^n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},$$

$$(b) \quad f(z) := \exp\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$(c) \quad f(z) := \frac{z^2 + z + 5}{z(z^2 + 1)^2}.$$

AUFGABE 6.6. Berechnen Sie die folgenden Integrale

- (a) $\int_{\partial_+ \mathbb{D}} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta^4(\zeta^2 + 2)} d\zeta,$
 (b) $\int_{\gamma_j} \frac{z^2 + z + 5}{z(z^2 + 1)^2} dz$ für $j = 1, 2, 3$ mit
 $\gamma_1(t) := e^{2\pi it-1}$ für $t \in [0, 1],$
 $\gamma_2(t) := i + \frac{1}{\pi} e^{it}$ für $t \in [0, 4\pi],$
 $\gamma_3(t) := \partial_+ D(42, 2004).$

AUFGABE 6.7. Berechnen Sie für alle $a, b > 0$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a)(x^2 + b)} dx.$$

AUFGABE 6.8. Berechnen Sie die folgenden Integrale

- (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + x + 5}{(x^2 + 1)^2} dx,$
 (b) $\int_0^{\pi} \frac{a}{a^2 + \sin^2(\theta)} d\theta,$ wobei $a \in (0, +\infty).$

AUFGABE 6.9. Berechnen Sie die folgenden Integrale

- (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 - 2x + 2} dx,$
 (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(x)}{(1 + x^2)^3} dx.$

AUFGABE 6.10. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $A \subset G$ eine diskrete Teilmenge von G . Beweisen Sie die folgende Aussage: Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G \setminus A)$ besitzt genau dann auf $G \setminus A$ eine komplexe Stammfunktion, wenn $\text{Res}(f, z) = 0$ für alle $z \in A$ gilt.

AUFGABE 6.11. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial_+ D(0, \pi)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

mit

- (a) $f(z) = \sin(\pi z),$
 (b) $f(z) = \cos(\pi z),$
 (c) $f(z) = \tan(\pi z).$

AUFGABE 6.12. Berechnen Sie das uneigentliche Riemannintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Hinweis: Betrachten Sie für die Funktion

$$z \mapsto \frac{\exp(iz)}{z}$$

und $r_1, r_2, s > 0$ sowie $0 < \delta < \min\{r_1, r_2, s\}$ die Wegkette

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + [-r_1, -\delta] + \gamma_\delta + [\delta, r_2]$$

mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ wie im Beweis zu Lemma 6.22 und mit $\gamma_\delta(t) := \delta \exp(i(\pi - t))$ für $0 \leq t \leq \pi$. Ändern Sie anschließend die Beweise zu Lemma 6.22 und der anschließenden Folgerung geeignet ab.

AUFGABE 6.13. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der folgenden Funktionen in den jeweils angegebenen Bereichen:

- (a) $f(z) := z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3}$ in $\mathbb{D}$ und in $D(0, \frac{1}{3})$.
- (b) $f(z) := z^5 + 3z^4 + 9z^3 + 10$ in $\overline{D(0, 2)}$.
- (c) $f(z) := 9z^5 + 5z - 24$ in $R_{\frac{1}{2}, 5}(0)$.

AUFGABE 6.14. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine kompakt konvergente Folge von auf G holomorphen, nullstellenfreien Funktionen. Zeigen Sie, daß die nach dem Satz von Weierstraß auf G holomorphe Grenzfunktion f dann entweder identisch auf G verschwindet oder ebenfalls keine Nullstelle besitzt.

AUFGABE 6.15. Sei $a \in (e, \infty)$. Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung

$$e^z = az^n$$

in der Einheitskreisscheibe?

AUFGABE 6.16. Sei f in einer Umgebung von $\mathbb{D}$ holomorph mit $f(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Zeigen Sie: f besitzt in $\mathbb{D}$ genau einen Fixpunkt.

Der Approximationssatz von Runge

Für $u \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir in diesem Abschnitt mit $h_u : \mathbb{C} \setminus \{u\} \rightarrow \mathbb{C}$ die durch

$$h_u(z) := \frac{1}{z - u} \quad \text{für } u \neq z \in \mathbb{C}$$

definierte rationale Funktion. Für kompaktes $K \subset \mathbb{C}$ und $u \in \mathbb{C} \setminus K$ sei $\mathcal{P}_u(K)$ die Abschließung von $\{p \circ h_u; p \text{ ist holomorphe Polynomfunktion}\}$ in $C(K, \mathbb{C})$ bezüglich der sup-Norm $\|\cdot\|_K$. $\mathcal{P}_u(K)$ ist also die Menge aller derjenigen stetigen Funktionen auf K , die sich gleichmäßig auf K durch Polynome in h_u approximieren lassen. Weiter sei $\mathcal{P}(K)$ der Abschluß der holomorphen Polynomfunktionen in $(C(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_K)$.

LEMMA 7.1. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei Ω eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Ist u ein Punkt aus Ω , so ist für alle $\omega \in \Omega$ die Funktion h_ω in $\mathcal{P}_u(K)$.*

BEWEIS. Wir setzen $S := \{\omega \in \Omega; h_\omega \in \mathcal{P}_u(K)\}$. Wegen $u \in S$ ist $S \neq \emptyset$. Sei nun $\omega_0 \in S$ beliebig und sei $r > 0$ mit $D(\omega_0, r) \subseteq \Omega$. Dann gilt für alle $\omega \in D(\omega_0, r)$ und alle $z \in K$

$$\left| \frac{\omega - \omega_0}{z - \omega_0} \right| \leq \frac{|\omega - \omega_0|}{r} < 1$$

und daher

$$\begin{aligned} h_\omega(z) &= \frac{1}{z - \omega} = \frac{1}{z - \omega_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega - \omega_0}{z - \omega_0}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\omega - \omega_0)^k (z - \omega_0)^{-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\omega - \omega_0)^k h_{\omega_0}(z)^{k+1} \end{aligned}$$

mit auf K gleichmäßiger Konvergenz. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\| h_\omega - \sum_{k=0}^n (\omega - \omega_0)^k h_{\omega_0}^{k+1} \right\|_K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da sich nach Voraussetzung an ω_0 die Funktion h_{ω_0} gleichmäßig auf K durch Polynome in h_u approximieren läßt, gibt es ein Polynom p mit

$$\left\| \sum_{k=0}^n (\omega - \omega_0)^k h_{\omega_0}^{k+1} - \sum_{k=0}^n (\omega - \omega_0)^k p(h_u)^{k+1} \right\|_K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt folgt $\|h_\omega - q(h_u)\|_K < \varepsilon$, wobei q das Polynom mit

$$q(z) := \sum_{k=0}^n (\omega - \omega_0)^k p(z)^{k+1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

sei. Damit ist gezeigt, daß h_ω gleichmäßig auf K durch Polynome in h_u approximierbar ist, d.h. es ist $\omega \in S$. Die Menge S ist also offen. Da die Abbildung $\omega \mapsto h_\omega|_K$ stetig von Ω nach $(C(K, \mathbb{C}); \|\cdot\|_K)$ ist, ist $S := \{\omega \in \Omega; h_\omega \in \mathcal{P}_u(K)\}$ als Urbild der in $C(K, \mathbb{C})$

abgeschlossenen Menge $\mathcal{P}_u(K)$ unter dieser stetigen Abbildung abgeschlossen in Ω (bzgl. der von der Betragsmetrik auf Ω induzierten Metrik). Als Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ ist aber Ω ein Gebiet. Also muß $S = \Omega$ gelten. $\square$

LEMMA 7.2. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $S_\infty := \{\omega \in \mathbb{C} \setminus K; h_\omega \in \mathcal{P}(K)\}$. Dann stimmt S_∞ mit der unbeschränkten Zusammenhangskomponente Ω_∞ von $\mathbb{C} \setminus K$ überein.*

BEWEIS. Annahme: Es gibt einen Punkt $\omega \in S_\infty \setminus \Omega_\infty$. Dann liegt ω in einer beschränkten Zusammenhangskomponente Ω von $\mathbb{C} \setminus K$. Wir setzen $d := \max_{z \in K} |z - \omega|$. Wegen $\omega \in S_\infty$ gibt es eine holomorphe Polynomfunktion p mit $\|h_\omega - p\|_K < (1 + d)^{-1}$. Da die Polynomfunktion $z \mapsto (z - \omega)p(z) - 1$ auf Ω holomorph und auf $\bar{\Omega}$ stetig ist, gilt nach dem Maximumprinzip 2.16 unter Beachtung von $\partial\Omega \subset K$:

$$\begin{aligned} \forall z \in \Omega : \quad |(z - \omega)p(z) - 1| &\leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |(\zeta - \omega)p(\zeta) - 1| \\ &\leq d \max_{\zeta \in K} |p(\zeta) - h_\omega(\zeta)| = d \|h_\omega - p\|_K \\ &\leq \frac{d}{1 + d} < 1. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für $z = \omega$ verletzt ist, war die obige Annahme falsch. Es gilt also $S_\infty \subseteq \Omega_\infty$.

Sei nun $r := \max_{z \in K} |z|$ und $u := 1 + r$. Dann ist $u \in \Omega_\infty$ und für alle $z \in K$ folgt

$$h_u(z) = \frac{-1}{u} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{u}} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{u^{k+1}}$$

mit wegen $|z/u| \leq r(1+r)^{-1} < 1$ gleichmäßiger Konvergenz auf K . Daher folgt $h_u \in \mathcal{P}(K)$. Ist nun $\omega \in \Omega_\infty$ beliebig, so ist h_ω nach Lemma 7.1 gleichmäßig auf K durch Polynome in h_u approximierbar. Da h_u seinerseits gleichmäßig auf K durch holomorphe Polynome approximierbar ist, folgt $h_\omega \in \mathcal{P}(K)$ und damit $\omega \in S_\infty$. $\square$

Ist $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\mathfrak{Z} := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ eine endliche Zerlegung von I , so heißt bekanntlich

$$\delta(\mathfrak{Z}) := \max_{1 \leq j \leq m} |t_j - t_{j-1}|$$

die *Feinheit* der Zerlegung $\mathfrak{Z}$. Für $f \in C(I, \mathbb{C})$ setzen wir

$$S_{\mathfrak{Z}}(f) := \sum_{j=1}^m f(t_j)(t_j - t_{j-1}).$$

LEMMA 7.3. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und sei $F \in C(I \times K; \mathbb{C})$. Dann konvergiert für jede Folge $(\mathfrak{Z}_n)_{n=1}^\infty$ von Zerlegungen des Intervalls I mit $\delta(\mathfrak{Z}_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ die Folge f_n der durch die Riemannschen Summen definierten Funktionen $z \mapsto S_{\mathfrak{Z}_n}(F(\cdot, z))$ gleichmäßig auf K gegen die nach Lemma 1.10 stetige Funktion $z \mapsto \int_a^b F(t, z) dt$.*

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von F auf der kompakten Menge $I \times K$ gibt es ein $\delta > 0$ so daß $|F(t, z) - F(s, w)| < \varepsilon/(b - a)$ für alle $(t, z), (s, w) \in I \times K$ mit $|(t, z) - (s, w)| < \delta$. Zu δ gibt es wegen $\delta(\mathfrak{Z}_n) \rightarrow 0$ für

$n \rightarrow \infty$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\delta(\mathfrak{Z}_n) < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Ist nun $n \geq n_0$ beliebig und $\mathfrak{Z}_n := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$, so folgt für alle $z \in K$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(t, z) dt - S_{\mathfrak{Z}_n}(F(\cdot, z)) \right| &\leq \sum_{j=1}^m \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (F(t, z) - F(t_j, z)) dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

□

SATZ 7.4 (Satz von Runge über rationale Approximation). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Ist $A \subset \mathbb{C} \setminus K$ eine Menge, so daß für jede beschränkte Zusammenhangskomponente Ω_0 von $\mathbb{C} \setminus K$ gilt $\Omega_0 \cap A \neq \emptyset$, so ist jede auf einer offenen Obermenge Ω von K holomorphe Funktion f gleichmäßig auf K durch rationale Funktionen mit Polen höchstens in A approximierbar.*

BEWEIS. Nach Aufgabe 1.10, gibt es einen Greenschen Bereich E mit $K \subset \text{int}(E) \subset E \subset \Omega$. Der positiv orientierte Rand von E besteht also aus endlich vielen stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Wegen. Wir zerlegen diese wiederum in endlich viele stetig differenzierbare Teilwege, die o.B.d.A. über $[0, 1]$ parametrisiert sind und erhalten so eine Darstellung

$$\partial_+ E = \sum_{j=1}^n \gamma_j \quad \text{mit } \gamma_1, \dots, \gamma_n \in C^1([0, 1], \mathbb{C}).$$

Nach der Cauchyschen Integralformel 2.2 gilt für alle $z \in K$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t) - z} \gamma_j'(t) dt.$$

Nach Lemma 7.3 läßt sich jedes der hierbei auftretenden Integrale gleichmäßig auf K durch Riemannsche Zwischensummen approximieren. Diese sind wiederum Linearkombinationen von Funktionen der Form h_u mit $u = \gamma_j(t_k) \in \partial E \subset \Omega \setminus K$. Damit folgt: Es gibt zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $u_1, \dots, u_m \in \Omega \setminus K$ und $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ mit

$$\left\| f - \sum_{j=1}^m a_j h_{u_j} \right\|_K < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.1)$$

Ist u_j in einer beschränkten Zusammenhangskomponente G von $\mathbb{C} \setminus K$, so gibt es nach Voraussetzung ein $v_j \in A \cap G$ und nach Lemma 7.1 ein holomorphes Polynom p_j mit

$$\|a_j h_{u_j} - p_j \circ h_{v_j}\|_K < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Liegt u_j in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente G_∞ von $\mathbb{C} \setminus K$, so gibt es nach Lemma 7.2 ein holomorphes Polynom q_j mit

$$\|a_j h_{u_j} - q_j\|_K < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Damit haben wir zu jedem j eine rationale Funktion g_j mit Polen höchstens in A gefunden, so daß

$$\|a_j h_{u_j} - g_j\|_K < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Wegen (7.1) erhalten wir

$$\left\| f - \sum_{j=1}^m g_j \right\|_K < \varepsilon.$$

f ist also gleichmäßig auf K durch rationale Funktionen mit Polen höchstens in A approximierbar. $\square$

Als Folgerung erhalten wir zwei Sätze über polynomiale Approximation.

FOLGERUNG 7.5 (Satz von Runge über polynomiale Approximation). *Sei K kompakt, so daß $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend ist. Dann läßt sich jede auf einer offenen Menge $\Omega \supset K$ holomorphe Funktion f gleichmäßig auf K durch holomorphe Polynome approximieren.*

BEWEIS. Da $\mathbb{C} \setminus K$ nur aus der unbeschränkten Zusammenhangskomponente besteht, können wir in Satz 7.4 für A die leere Menge nehmen. f läßt sich also gleichmäßig auf K durch rationale Funktionen ohne Pole, also durch holomorphe Polynome approximieren. $\square$

Zum Beweis der nächsten Folgerung benötigen wir:

LEMMA 7.6. *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, $K \subset G$ eine kompakte Menge und bezeichnet $\hat{K}$ die Vereinigung von K mit allen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$, so ist $\hat{K}$ ebenfalls eine kompakte Teilmenge von G .*

BEWEIS. Da $\mathbb{C} \setminus \hat{K}$ gerade die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ ist, ist $\hat{K}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Die Vereinigung Ω von G mit allen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$ ist offen man hat $\hat{K} \subset \Omega$. Nach Aufgabe 1.10, gibt es einen Greenschen Bereich E mit $\hat{K} \subset \text{int}(E) \subset E \subset \Omega$. Da $\hat{K}$ alle beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$ enthält muß $\partial E \subset G$ gelten. Für alle $z \in \hat{K}$ folgt man nach der Cauchyschen Integralformel und Satz 5.9

$$n(\partial_+ E, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1.$$

Nach Definition des einfachen Zusammenhangs muß also $\hat{K} \subset G$ gelten. $\square$

FOLGERUNG 7.7. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es zu jeder auf G holomorphen Funktion f eine kompakt gegen f konvergente Folge holomorpher Polynome. Die Menge der holomorphen Polynome liegt also dicht in $\mathcal{O}(G)$.*

BEWEIS. Sei $(K_n)_{n=1}^\infty$ eine kompakte Ausschöpfung von G . Es genügt zu zeigen, daß es eine Folge von holomorphen Polynomen $(p_n)_{n=1}^\infty$ gibt mit $\|f - p_n\|_{K_n} < n^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert diese Folge kompakt gegen f . Sei also nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Lemma 7.6 ist $\hat{K}_n$ eine kompakte Teilmenge von G , deren Komplement in $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist. Wegen Folgerung 7.5 gibt es daher ein holomorphes Polynom p_n mit $\|f - p_n\|_{K_n} \leq \|f - p_n\|_{\hat{K}_n} < n^{-1}$. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 7.

AUFGABE 7.1. Sei $G := \{z \in \mathbb{D} \mid |ze^{1-z}| > 1\}$ (vergl. Satz 6.29). Zeigen Sie :

- Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ gibt es eine Folge von Polynomen, die auf G kompakt gegen f konvergiert.
- Geben Sie eine auf einer Umgebung von $\overline{G}$ holomorphe Funktion an, die *nicht* gleichmäßig auf $\overline{G}$ durch Polynome approximierbar ist.

AUFGABE 7.2. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gibt es eine Folge von rationalen Funktionen mit Polen höchstens in $\mathbb{C} \setminus \Omega$, die kompakt auf Ω gegen f konvergiert.

Meromorphe Funktionen und der Satz von Mittag-Leffler

DEFINITION 8.1. Sei $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen. Eine *meromorphe Funktion* f auf Ω ist eine Funktion $f : \Omega \setminus P_f \rightarrow \mathbb{C}$, wobei

- (a) $P_f \subset \Omega$ diskret (also ohne Häufungspunkte) in Ω ist und
- (b) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus P_f)$ und die Punkte aus P_f Polstellen von f seien.

Die Menge der auf Ω meromorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Omega)$.

DEFINITION 8.2 (Rechenoperationen in $\mathcal{M}(\Omega)$). Sei $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen. Wir führen eine *Multiplikation mit Skalaren* in $\mathcal{M}(\Omega)$ ein, indem wir für $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ und $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ die Funktion $\alpha f : \Omega \setminus P_{\alpha f} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren durch $(\alpha f)(z) := \alpha f(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus P_{\alpha f}$ wobei $P_{\alpha f} := P_f$ sei. Wir setzen noch $(0f)(z) \equiv 0$ auf Ω .

Die Addition und Multiplikation von zwei meromorphen Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ definieren wir wie folgt: Mit P_f und P_g ist auch $P_f \cup P_g$ eine in Ω diskrete Menge. Die Funktionen $f + g, fg$ sind auf $\Omega \setminus (P_f \cup P_g)$ holomorph und die Punkte aus $P_f \cup P_g$ sind Polstellen oder hebbare Singularitäten von $f + g$ bzw. fg . Die Menge P_{f+g} bzw. P_{fg} von $f + g$ bzw. fg ist als Teilmenge der diskreten Menge $P_f \cup P_g$ wieder diskret und $f + g$ bzw. fg hat eine eindeutig bestimmte (wieder mit $f + g$ bzw. fg bezeichnete) Fortsetzung auf $\Omega \setminus (P_{f+g})$ bzw. $\Omega \setminus (P_{fg})$. Die hierdurch definierten Funktionen $f + g : \Omega \setminus (P_{f+g})$ und $fg : \Omega \setminus (P_{fg})$ sind dann wieder auf Ω meromorphe Funktionen.

LEMMA 8.3. (a) Sei $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen. Dann ist $\mathcal{M}(\Omega)$ versehen mit den in Definition 8.2 eingeführten Rechenoperationen eine Algebra über $\mathbb{C}$.

(b) Ist $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, so ist $(\mathcal{M}(G), +, \cdot)$ ein Körper.

BEWEIS. (a) rechnet man elementar nach.

(b) Wir zeigen nur die Existenz des Inversen bezüglich der Multiplikation. Sei also f eine von der Nullfunktion verschiedene Funktion aus $\mathcal{M}(G)$. Die Polstellenmenge P_f ist also diskret in G . Dann ist auch $G \setminus P_f$ ein Gebiet. Nach dem Satz von der Isoliertheit der Nullstellen (Satz 4.12) ist die Nullstellenmenge $N_f = f^{-1}(\{0\})$ von f diskret in G . Wir definieren nun

$$\frac{1}{f}(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in P_f \\ \frac{1}{f(z)} & \text{für } z \in G \setminus (P_f \cup N_f). \end{cases}$$

Dann ist $1/f \in \mathcal{O}(G \setminus N_f)$ (nach Lemma 1.3 und dem Riemannschen Hebbarkeitssatz) und die Punkte aus N_f sind nach Satz 4.10 und Definition 6.5 Polstellen von $1/f$. Also ist $1/f \in \mathcal{M}(G)$ und im Sinne von Definition 8.2 gilt $f \cdot 1/f = 1$. $\square$

Insbesondere ist also jede rationale Funktion $f = p/q$ mit teilerfremden holomorphen Polynomen p, q und $q \neq 0$ eine auf $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion mit Polstellenmenge $P_f \subseteq N_q \cup \{\infty\}$. Nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung besitzt eine solche rationale

Funktion f eine eindeutige Darstellung der Form

$$f(z) = p_0(z) + \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} \frac{a_{j,m}}{(z - z_j)^m}$$

mit $a_{j,m} \in \mathbb{C}$ wobei $z_1, \dots, z_k$ die Nullstellen von q seinen und $n_1, \dots, n_k$ die Ordnungen der Polstellen $z_1, \dots, z_k$ seien. Ziel dieses Abschnittes ist nun die Herleitung einer entsprechenden Aussage für meromorphe Funktionen.

DEFINITION 8.4. Unter einem *Hauptteil mit dem Entwicklungspunkt* $w \in \mathbb{C}$ verstehen wir jede rationale Funktion der Form

$$h_w(z) := \sum_{j=1}^n \frac{a_{-j}}{(z - w)^j} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, a_{-1}, \dots, a_{-n} \in \mathbb{C}.$$

Eine *Hauptverteilung* H auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Menge $H = \{h_w; w \in A\}$ von Hauptteilen mit Entwicklungspunkten in einer in Ω diskreten Teilmenge A von Ω .

Jede auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ meromorphe Funktion f definiert eine Hauptverteilung $H_f = \{h_{f,w}; w \in P_f\}$ wie folgt: Für jede Polstelle w von f gibt es ein $r_w > 0$ mit $D(w, r_w) \subseteq \Omega$ und $D(w, r_w) \cap P_f = \{w\}$. Für alle Polstellen $w \in P_f$ sei $h_{f,w}$ der Hauptteil

$$\sum_{j=1}^{m_w} \frac{a_{-j}}{(z - w)^j}$$

der Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-m_w}^{\infty} a_n(z - w)^n$$

in $R_{0,r_w}(w)$. m_w bezeichne hierbei die Ordnung der Polstelle w von f . Offensichtlich gilt für jede auf ganz Ω holomorphe Funktion g : $H_{f+g} = H_f$.

DEFINITION 8.5. Eine Hauptverteilung H auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt *lösbare Hauptverteilung*, falls es eine auf Ω meromorphe Funktion f mit $H_f = H$ gibt.

Ist f mit $H_f = H$ eine Lösung der Hauptverteilung H in Ω , so ist für jede auf Ω holomorphe Funktion g auch $H_{f+g} = H$ und somit auch $f + g$ eine Lösung der Hauptverteilung H .

Wir zeigen nun, daß jede Hauptverteilung lösbar ist.

SATZ 8.6 (Mittag-Leffler). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, A eine in Ω diskrete Menge und sei $H = \{h_w; w \in A\}$ eine Hauptverteilung in Ω . Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $H_f = H$. f ist hierdurch bis auf eine additive Abänderung durch eine auf ganz Ω holomorphe Funktion eindeutig bestimmt. Ist also auch $F \in \mathcal{M}(\Omega)$ eine meromorphe Funktion mit $H_F = H$ so ist $g := F - f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

BEWEIS. Zu Ω gibt es eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n=1}^{\infty}$. Da nach Voraussetzung A keine Häufungspunkte in Ω hat ist nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß $A \cap K_n$ endlich für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt: Die Menge A ist höchstens abzählbar unendlich.

Ist $A = \emptyset$, also auch $H = \emptyset$, so gilt $H_f = H$ für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Ist A endlich, etwa $A = \{w_1, \dots, w_k\}$, so löst die durch

$$f(z) = \sum_{j=1}^k h_{w_j}(z) \quad \text{für } z \in \Omega \setminus A$$

definierte rationale Funktion die Hauptverteilung H .

Sei also nun A abzählbar unendlich, also $A = \{w_n; n \in \mathbb{N}\}$ mit paarweise verschiedenen Punkten aus Ω und $(w_n)_{n=1}^\infty$ ohne Häufungswerte in Ω . Man ist natürlich nun versucht, den für endliches A erfolgreichen Ansatz zu übernehmen und $f(z) = \sum_{n=1}^\infty h_{w_n}$ zu bilden. Im allgemeinen ist diese Reihe aber nicht konvergent. Der Trick besteht nun darin, daß man sich *konvergenzerzeugende Summanden* $g_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ so konstruiert, daß die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty (h_{w_n}(z) + g_n(z))$$

kompakt in $\Omega \setminus A$ konvergiert, und man zeigt, daß dann $H_f = H$ erfüllt ist.

Wir fixieren einen Punkt $z_0 \in \Omega \setminus A$ und definieren eine stetige Hilfsfunktion $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\rho(z) := \max\{|z - z_0|, \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)^{-1}\}.$$

Für alle $r > 0$ ist dann $B_r := \{z \in \Omega; \rho(z) \leq r\}$ eine kompakte Teilmenge von Ω , enthält also (wie oben) höchstens endlich viele Punkte aus A , da A diskret in Ω ist. Wir numerieren die Elemente von $A = \{w_n; n \in \mathbb{N}\}$ so durch, daß die Folge $(\rho(w_n))_{n=1}^\infty$ monoton wachsend ist. Dann gilt

$$\rho(w_n) \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty, \quad (8.1)$$

denn für jedes $r > 0$ enthält B_r ja nur endlich viele Elemente von A . Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $r_n := \rho(w_n)/2$. Es folgt dann $w_n \notin B_{r_n}$ nach Definition der Funktion ρ und der Mengen B_r .

Wir zeigen nun, daß für jede beschränkte Zusammenhangskomponente G von $\mathbb{C} \setminus B_{r_n}$ der Durchschnitt $G \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$ nicht leer ist. Nach Definition von B_{r_n} ist zunächst $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| > r_n\}$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus B_{r_n}$ enthalten, so daß $G \subset D(z_0, r_n)$ gelten muß. Ist nun $z \in G$, so folgt wegen $|z - z_0| < r_n$ und $G \subset \mathbb{C} \setminus B_{r_n}$ aus der Definition von B_{r_n} , daß $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) < r_n^{-1}$ gilt. Zu z gibt es ein $\zeta \in \partial\Omega$ mit $|\zeta - z| = \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) < r_n^{-1}$. Für alle $t \in [0, 1]$ ist dann $z + t(\zeta - z) \in \mathbb{C} \setminus B_{r_n}$ (wegen $\text{dist}(z + t(\zeta - z), \mathbb{C} \setminus \Omega) < r_n^{-1}$ für $0 \leq t < 1$ und $\zeta \notin \Omega$). Da G eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus B_{r_n}$ ist folgt $\zeta \in G \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$. Für B_{r_n} ist also die Voraussetzung zum Satz 7.4 von Runge erfüllt. Da die Funktion h_{w_n} (wegen $w_n \notin B_{r_n}$) auf $\mathbb{C} \setminus \{w_n\} \supset B_{r_n}$ holomorph ist gibt es daher zu vorgegebenem $\varepsilon_n := 2^{-n} > 0$ eine rationale Funktion g_n mit Polen höchstens in $(\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap (\mathbb{C} \setminus B_{r_n})$ und mit

$$\|h_{w_n} - g_n\|_{B_{r_n}} < \varepsilon_n = 2^{-n}.$$

Insbesondere ist $g_n \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Wir zeigen nun, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty (h_{w_k}(z) - g_k(z))$$

auf $\Omega \setminus A$ kompakt gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$ konvergiert, die in allen w_n die vorgegebenen Hauptteile h_{w_n} besitzt. Sei hierzu $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben und sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von $(\Omega \setminus A) \cup \{w_n\}$. Wegen $r_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{z \in K} |z - z_0| < r_k \quad \text{und} \quad \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{r_k}$$

für alle $k \geq k_0$. Insbesondere ist also $K \subset B_{r_k}$ für alle $k \geq k_0$ und wir erhalten für $k \geq k_0$:

$$\|h_{w_k} - g_k\|_K \leq \|h_{w_k} - g_k\|_{B_{r_k}} < \varepsilon_k = 2^{-k}.$$

Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ ist daher die Reihe

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} (h_{w_k} - g_k)$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf jeder kompakten Teilmenge K von $(\Omega \setminus A) \cup \{w_n\}$ gegen eine auf $(\Omega \setminus A) \cup \{w_n\}$ holomorphe Funktion f_n . Insbesondere ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} (h_{w_k} - g_k)$ auf $\Omega \setminus A$ kompakt konvergent gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$ und es gilt $f = f_n + h_{w_n} - g_n$ auf $\Omega \setminus A$. Da die Funktion $f_n - g_n$ in einer Umgebung von w_n holomorph ist, stimmt der Hauptteil von f in w_n mit h_{w_n} überein. f ist daher eine Lösung der gegebenen Hauptverteilung. Die Eindeutigkeitsaussage ist offensichtlich. $\square$

BEMERKUNG 8.7. Bei der Konstruktion von f im Beweis des vorangehenden Satzes von Mittag-Leffler hätten wir statt der Folge $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} = (2^{-n})_{n=1}^{\infty}$ auch jede andere Folge $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ positiver Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ wählen können.

BEMERKUNG 8.8. In dem (wichtigen) Spezialfall $\Omega = \mathbb{C}$ können die konvergenzerzeugenden Summanden g_k z.B. als Taylorpolynome hinreichend hoher Ordnung von h_{w_k} mit dem Entwicklungspunkt z_0 gewählt werden. In diesem Fall ist $\text{dist}(w_k, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \infty$ und damit $\rho(z) = |z - z_0|$ und $B_{r_k} = \overline{D}(z_0, r_k)$. Im Fall $0 \notin A$ kann man $z_0 = 0$ wählen. Ist $0 \in A$, so löst man einfach die Hauptverteilung $H \setminus \{h_0\}$.

BEISPIELE 8.9. (a) Gegeben sei eine Folge $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ von komplexen Zahlen und eine diskrete Folge $(w_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ von paarweise verschiedenen Punkten in $\mathbb{C}$ mit $w_0 = 0$. Gesucht ist eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f , die für alle $j \in \mathbb{Z}$ in den Punkten w_j Pole erster Ordnung mit den Residuen c_j hat und keine weiteren Singularitäten besitzt. Sei $(\varepsilon_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Die Taylorreihendarstellung von $h_{w_j} = c_j(\cdot - w_j)^{-1}$ mit dem Entwicklungspunkt $w_0 = 0$ lautet

$$h_{w_j}(z) = \frac{c_j}{z - w_j} = -\frac{c_j}{w_j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w_j}\right)^k$$

und hat den Konvergenzradius $|w_j|$. Wir wählen $k_j \in \mathbb{N}_0$ so groß, daß für $|z| < |w_j|/2$ gilt:

$$\left| \frac{c_j}{z - w_j} + \frac{c_j}{w_j} \sum_{k=0}^{k_j} \left(\frac{z}{w_j}\right)^k \right| < \varepsilon_j$$

Dann ist die Funktion f mit

$$f(z) := \frac{c_0}{z} + \sum_{0 \neq j \in \mathbb{Z}} c_j \left(\frac{1}{z - w_j} + \frac{1}{w_j} \sum_{k=0}^{k_j} \left(\frac{z}{w_j}\right)^k \right)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{w_j; j \in \mathbb{Z}\}$ eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.

(b) Sei nun speziell $w_j := j$ und $c_j = 1$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall können wir $k_j := 0$ wählen, denn für alle $r > 0$ und alle $z \in \overline{D}(0, r)$ sowie für $j \in \mathbb{Z}$ mit $|j| > 2r$ gilt:

$$\left| \frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right| = \frac{|z|}{|j| \cdot |z - j|} \leq \frac{2r}{j^2}$$

und die Reihe

$$\sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} 2rj^{-2}$$

ist konvergent. Also konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right)$$

kompakt und absolut auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$, welche in den Punkten $n \in \mathbb{Z}$ Polstellen der Ordnung 1 mit dem Residuum 1 besitzt. Man erhält

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} + \frac{1}{z+j} + \frac{1}{-j} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2}. \end{aligned}$$

Auch die Funktion $z \mapsto \pi \cot(\pi z)$ ist eine meromorphe Funktion mit Polstellen erster Ordnung in den Punkten aus $\mathbb{Z}$ als einzige Singularitäten. Für die Residuen in Punkten $j \in \mathbb{Z}$ erhalten wir gemäß Lemma 6.16 (b):

$$\text{Res}(\pi \cot(\pi z), j) = \pi \frac{\cos(\pi j)}{\frac{d}{dz} \sin(\pi z)|_{z=j}} = 1.$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Mittag-Leffler gibt es also eine ganze Funktion g mit

$$\pi \cot(\pi z) = g(z) + f(z) = g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) \quad (8.2)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Differentiation auf beiden Seiten ergibt, da wir wegen der kompakten Konvergenz nach Satz 4.4 gliedweise differenzieren dürfen:

$$\begin{aligned} \frac{-\pi^2}{(\sin(\pi z))^2} &= g'(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} = g'(z) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} \\ &= g'(z) - h(z) \end{aligned} \quad (8.3)$$

mit ebenfalls kompakter Konvergenz in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Die hierbei auftretende Funktion h mit

$$h(z) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2}$$

ist wieder eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ und besitzt in den Punkten aus $\mathbb{Z}$ Polstellen zweiter Ordnung. h ist eine gerade Funktion (d.h. mit $h(-z) = h(z)$) und periodisch von der Periode 1. Da auch $z \mapsto -\pi^2(\sin(\pi z))^{-2}$ eine gerade und mit der Periode 1 periodische

Funktion ist, muß g' eine ganze, gerade Funktion sein, die periodisch von der Periode 1 ist. Für alle $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ und alle $z \in S := \{w \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re}(w) \leq 1\}$ gilt:

$$\frac{1}{|z-j|^2} \leq \max \left\{ \frac{1}{j^2}, \frac{1}{(j-1)^2} \right\}.$$

Die Reihe $\sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}} (z-j)^{-2}$ konvergiert also gleichmäßig und absolut auf $S \setminus \{0, 1\}$ gegen die Funktion $z \mapsto h(z) - z^{-2} - (z-1)^{-2}$. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $z \in S$, $z \neq 0, 1$ gilt

$$\left| h(z) - \sum_{|j| \leq n_0} \frac{1}{(z-j)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner gilt für $z = x + iy \in S \setminus \{0, 1\}$:

$$\left| \sum_{|j| \leq n_0} \frac{1}{(z-j)^2} \right| \leq \sum_{|j| \leq n_0} \frac{1}{(x-j)^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } |\operatorname{Im}(z)| = |y| \rightarrow \infty.$$

Es gibt daher ein $R > 0$ so daß für alle $z \in S$ mit $|\operatorname{Im}(z)| > R$ gilt:

$$|h(z)| \leq \left| h(z) - \sum_{|j| \leq n_0} \frac{1}{(z-j)^2} \right| + \left| \sum_{|j| \leq n_0} \frac{1}{(z-j)^2} \right| < \varepsilon.$$

Entsprechend hat man für die Funktion $z \mapsto \pi^2 (\sin(\pi z))^{-2}$ und $z = x + iy \in S \setminus \{0, 1\}$ und $|y| \rightarrow \infty$:

$$\frac{\pi^2}{|\sin(\pi z)|^2} = \frac{4\pi^2}{|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}|^2} \leq \frac{4\pi^2}{(|e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|)^2} = \frac{4\pi^2}{(e^{-\pi y} - e^{\pi y})^2} = \frac{\pi^2}{(\sinh(\pi y))^2} \rightarrow 0.$$

Wir erhalten für g' also insgesamt: g' ist eine von der Periode 1 periodische Funktion, die auf S beschränkt ist und für die gilt: $|g'(z)| \rightarrow 0$ für $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$. Nach dem Satz von Liouville ist g' konstant und wegen $|g'(z)| \rightarrow 0$ für $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$ sogar identisch verschwindend. Insbesondere ist $g \equiv c$ konstant und mit (8.3) folgt

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} \quad (8.4)$$

mit kompakter Konvergenz auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Mit (8.2) erhalten wir ferner

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) + c = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2} + c.$$

Da die Cotangensfunktion und die Funktion $f : z \mapsto \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2}$ beide ungerade sind, ist dies nur möglich, wenn $c = 0$. Damit haben wir erhalten:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2}. \quad (8.5)$$

Verwendet man noch $\cos(\pi z) = \sin(\pi(z + 1/2))$ so folgt aus (8.4) eine Mittag-Leffler-Entwicklung für $\pi^2 (\cos(\pi z))^2$:

$$\frac{\pi^2}{(\cos(\pi z))^2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j+\frac{1}{2})^2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j-\frac{1}{2})^2}.$$

Aus (8.5) erhalten wir wegen $\cot(\pi(z + 1/2)) = -\tan(\pi z)$:

$$-\pi \tan(\pi z) = \frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z + \frac{1}{2} - j} + \frac{1}{j} \right)$$

Geht man analog wie oben vor und löst direkt die Hauptverteilung zur Funktion $z \mapsto \pi \tan(\pi z)$, so erhält man

$$\pi \tan(\pi z) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \frac{1}{2} - j} + \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right).$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Identität $\cot(\pi z) + \tan(\pi z/2) = (\sin(\pi z))^{-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{z-1}{2} - j} + \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{z - 2j - 1} + \frac{2}{2j + 1} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - 2j} + \frac{1}{2j} \right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - 2j - 1} + \frac{1}{2j + 1} \right) \end{aligned}$$

woraus man nach einfacher Umformung erhält:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2z}{z^2 - k^2}.$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 8.

- AUFGABE 8.1. (a) Leiten Sie eine Partialbruchzerlegung für $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ her.
 (b) Zeigen Sie:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(1 - 2n)(1 + 2n)}.$$

AUFGABE 8.2. Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ und sei

$$\Omega := \{n_1 w_1 + n_2 w_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

- (a) Zeigen Sie: Die *Weierstraßsche $\wp$ -Funktion*

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

konvergiert kompakt auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

- (b) Berechnen Sie $\wp'$ und folgern Sie, daß

$$\wp'(z + w) = \wp'(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, w \in \Omega).$$

- (c) Schließen Sie aus (b), daß

$$\wp(z + w) = \wp(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, w \in \Omega).$$

AUFGABE 8.3. Seien f, g zwei ganze Funktionen, deren Nullstellenmengen N_f und N_g zueinander disjunkt sind. Zeigen Sie, daß es zwei ganze Funktionen $u, v \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gibt mit

$$uf + vg \equiv 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Satzes von Mittag-Leffler die Existenz einer meromorphen Funktion m mit $P_m \subseteq N_g$, deren der Hauptteil $h_{m,w}$ in allen Nullstellen w von g mit dem Hauptteil $h_{\frac{1}{fg},w}$ von $\frac{1}{fg}$ übereinstimmt. Dann ist die Funktion $m - \frac{1}{fg}$ in allen Punkten $w \in N_g$ holomorph ergänzbar. Setzen Sie sodann $u = mg$.

KAPITEL 9

Der Produktsatz von Weierstraß

In diesem Abschnitt geht es um die Konstruktion von holomorphen Funktionen mit vorgegebenem Nullstellenverhalten. Sind paarweise verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ und natürliche Zahlen $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}$ gegeben, so ist durch

$$p(z) := \prod_{j=1}^N (z - z_j)^{m_j} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ein (holomorphes) Polynom p definiert, welches in den Punkten $z_1, \dots, z_N$ Nullstellen der Ordnungen $m_1, \dots, m_N$ besitzt und in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ nullstellenfrei ist. Ist umgekehrt q ein holomorphes Polynom mit Nullstellen der Ordnungen $m_1, \dots, m_N$ in $z_1, \dots, z_N$ und ist q in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ nullstellenfrei, so ist schon $q(z) = c \cdot \prod_{j=1}^N (z - z_j)^{m_j}$ mit einer von Null verschiedenen Konstanten $c \in \mathbb{C}$. Der Produktsatz von Weierstraß ist ein Analogon für holomorphe Funktionen zu dieser Aussage. Es ist klar, daß wir in der Situation beliebiger holomorpher Funktionen nicht mehr mit endlichen Nullstellenmengen auskommen werden. Dementsprechend werden in den Produktdarstellungen auch unendliche Produkte auftreten. Wir stellen zunächst die hierfür erforderlichen Grundlagen bereit.

DEFINITION 9.1. Sei $(c_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $p_n := \prod_{j=1}^n (1 + c_j)$. Existiert der Grenzwert $p := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ in $\mathbb{C}$, so schreiben wir

$$p = \prod_{j=1}^\infty (1 + c_j)$$

und sagen, das unendliche Produkt $\prod_{j=1}^\infty (1 + c_j)$ ist *konvergent* (gegen p). Ein nicht konvergentes unendliches Produkt heißt *divergent*. Wir nennen das endliche Produkt p_n das *n-te Partialprodukt des unendlichen Produktes* $\prod_{j=1}^\infty (1 + c_j)$.

Wir benötigen einige einfache Abschätzungen, die wir im folgenden Lemma zusammenstellen:

LEMMA 9.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ gilt mit $p_n := \prod_{j=1}^n (1 + c_j)$ und $\tilde{p}_n := \prod_{j=1}^n (1 + |c_j|)$:

- (a) $\tilde{p}_n \leq \exp\left(\sum_{j=1}^n |c_j|\right)$.
- (b) $|p_n - 1| \leq \tilde{p}_n - 1$.

BEWEIS. (a) Für $j = 1, \dots, n$ gilt: $1 + |c_j| \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{|c_j|^k}{k!} = \exp(|c_j|)$. Hieraus folgt

$$\tilde{p}_n := \prod_{j=1}^n (1 + |c_j|) \leq \prod_{j=1}^n \exp(|c_j|) = \exp\left(\sum_{j=1}^n |c_j|\right).$$

(b) Im Fall $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Ist die Aussage für $1 \leq m \leq n$ und ein $n \in \mathbb{N}$ schon gezeigt, so gilt

$$p_{n+1} - 1 = p_n(1 + c_{n+1}) - 1 = (p_n - 1)(1 + c_{n+1}) + c_{n+1}$$

und daher nach Induktionsvoraussetzung

$$|p_{n+1} - 1| \leq (\tilde{p}_n - 1)(1 + |c_{n+1}|) + |c_{n+1}| = \tilde{p}_{n+1} - 1$$

□

DEFINITION 9.3. Sei X eine nicht leere Menge und sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von komplexwertigen Funktionen auf X . Das unendliche Produkt $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_j)$ heißt *in einem Punkt* $x_0 \in X$ *konvergent*, falls $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_j(x_0))$ im Sinne von Definition 9.1 konvergiert. Es heißt *punktweise* (bzw. *gleichmäßig*) *konvergent* auf X , falls die Folge der Partialprodukte punktweise (bzw. gleichmäßig) auf X konvergent ist. Ist speziell $X = \Omega \subseteq \mathbb{K}^N$ offen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge aus $C(\Omega, \mathbb{C})$, so heißt das unendliche Produkt $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_j)$ *kompakt konvergent* in Ω , falls die Folge der Partialprodukte kompakt in Ω konvergiert. Nach Lemma 4.2 ist in diesem Fall die Grenzfunktion schon wieder stetig und nach dem Satz 4.4 von Weierstraß im Fall $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sogar holomorph, falls alle f_j , $j \in \mathbb{N}$, auf Ω holomorph sind.

BEISPIEL 9.4. Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1 - z} = \prod_{j=0}^{\infty} (1 + z^{2^j})$$

mit kompakter Konvergenz auf $\mathbb{D}$. Für $|z| > 1$ ist das unendliche Produkt $\prod_{j=0}^{\infty} (1 + z^{2^j})$ divergent.

BEWEIS. Wir zeigen durch vollständige Induktion für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \neq z \in \mathbb{C}$:

$$p_k(z) := \prod_{j=0}^k (1 + z^{2^j}) = \frac{1 - z^{2^{k+1}}}{1 - z}. \quad (9.1)$$

Für $k = 0$ ist dies offensichtlich. Ist (9.1) schon gezeigt für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so folgt aus dieser Induktionsvoraussetzung

$$\prod_{j=0}^{k+1} (1 + z^{2^j}) = (1 + z^{2^{k+1}}) \prod_{j=0}^k (1 + z^{2^j}) = (1 + z^{2^{k+1}}) \frac{1 - z^{2^{k+1}}}{1 - z} = \frac{1 - z^{2^{k+2}}}{1 - z}.$$

Damit ist die Gültigkeit von (9.1) für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \neq z \in \mathbb{C}$, gezeigt. Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert aber die rechte Seite von (9.1) kompakt auf $\mathbb{D}$ gegen $(1 - z)^{-1}$. Für $|z| \geq 1$, $z^{2^k} \neq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, ist die rechte Seite von (9.1) und damit auch das unendliche Produkt divergent (vergl. Aufgabe 9.1). Für $z = 1$ ist die Divergenz trivial. Ist schließlich $1 \neq z \in \mathbb{T}$ und $z^{2^{k_0}} = 1$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so folgt aus (9.1) $p_k = 0$ für alle $k \geq k_0$ und somit $p_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. □

Wichtig ist für uns das folgende Konvergenzkriterium:

SATZ 9.5. Sei X eine nicht leere Menge und sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von komplexwertigen beschränkten Funktionen auf X , so daß $\sum_{j=1}^\infty |f_j|$ auf X gleichmäßig konvergiert. Dann gilt:

(a) $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_j)$ konvergiert ebenfalls gleichmäßig auf X und stellt eine auf X beschränkte Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ dar.

(b) Ist $F(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in X$, so gilt schon $f_n(x_0) = -1$ für wenigstens ein $n \in \mathbb{N}$.

(c) Das unendliche Produkt $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_j)$ ist gegenüber Umordnungen fest, d.h.: Ist $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, so konvergiert auch die Folge $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_{\varphi(j)})$ gleichmäßig auf X gegen F .

BEWEIS. (a) Sei $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ setzen wir

$$p_n(x) := \prod_{j=1}^n (1 + f_j(x)) \quad \text{und} \quad q_n(x) := \prod_{j=1}^n (1 + f_{\varphi(j)}(x)).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ auf X ist die Funktion $x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|$ und damit auch die Funktion $x \mapsto \exp(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|)$ beschränkt auf X durch eine Konstante $C > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$ gilt nach Lemma 9.2

$$|p_n(x)| \leq \prod_{j=1}^n (1 + |f_j(x)|) \leq \exp\left(\sum_{j=1}^n |f_j(x)|\right) \leq C. \quad (9.2)$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ auf X gibt es zu $\eta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4C}\right\}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x \in X} \left| \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| - \sum_{j=1}^{n_0-1} |f_j(x)| \right| = \sup_{x \in X} \sum_{j=n_0}^{\infty} |f_j(x)| < \eta. \quad (9.3)$$

Sei nun $n \geq n_0$ beliebig und sei $m = m(n) \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß $\{1, \dots, n\} \subseteq \{\varphi(1), \dots, \varphi(m)\}$. Mit $J := \{\varphi(1), \dots, \varphi(m)\} \setminus \{1, \dots, n\}$ gilt für alle $x \in X$:

$$q_m(x) - p_n(x) = p_n(x) \left(\prod_{j \in J} (1 + f_{\varphi(j)}(x)) - 1 \right).$$

Mit (9.3) und (9.2) erhält man hieraus

$$|q_m(x) - p_n(x)| \leq |p_n(x)| \left(\exp\left(\sum_{j \in J} |f_{\varphi(j)}(x)|\right) - 1 \right) \leq |p_n(x)| (e^{\eta} - 1).$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes und unter Verwendung von $\eta \leq 1/2$ und $C\eta \leq \varepsilon/4$ folgt also für alle $x \in X$:

$$|q_m(x) - p_n(x)| \leq |p_n(x)| (e^{\eta} - 1) \leq C(e^{\eta} - 1) \leq C\eta e^{\eta} \leq \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{e} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9.4)$$

In dem Spezialfall $\varphi = \text{id}_{\mathbb{N}}$ erhalten wir aus (9.4)

$$\sup_{x \in X} |p_m(x) - p_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n_0 \leq n \leq m.$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ auf X gezeigt, es existiert

$$F(x) := \prod_{j=1}^{\infty} (1 + f_j(x)) \quad (x \in X)$$

mit auf X gleichmäßiger Konvergenz. Die hierdurch definierte Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ ist als gleichmäßiger Limes beschränkter Funktionen beschränkt. Damit ist (a) bewiesen. Weiter erhalten wir aus (9.4) für alle $x \in X$ und $k \geq n_0$:

$$|p_k(x) - p_{n_0}(x)| \leq C\eta e^{\eta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $k \rightarrow \infty$ ergibt dies für alle $x \in X$

$$|F(x) - p_{n_0}(x)| \leq C\eta e^{\eta} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9.5)$$

(b) Für alle $x \in X$ und alle $m \geq n_0$ folgt aus (9.4)

$$|p_{n_0}(x) - p_m(x)| \leq |p_{n_0}(x) - p_m(x)| \leq \eta \sqrt{e} |p_{n_0}(x)|.$$

Also erhält man für $m \rightarrow \infty$

$$|F(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |p_m(x)| \geq (1 - \eta\sqrt{e})|p_{n_0}(x)|.$$

Wegen $1 - \eta\sqrt{e} > 0$ (da $\eta \leq 1/2$) gilt also für alle $x \in X$: Ist $F(x) = 0$, so ist schon $p_{n_0}(x) = 0$ und es folgt $f_j(x) = -1$ für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, n_0\}$.

(c) Sei nun wieder $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion von $\mathbb{N}$ auf sich und sei m_0 so groß, daß $\{1, \dots, n_0\} \subseteq \{\varphi(1), \dots, \varphi(m_0)\}$. Dann folgt für alle $x \in X$ und alle $m \geq m_0$ aus (9.4) und (9.5)

$$|F(x) - q_m(x)| \leq (|F(x) - p_{n_0}(x)| + |p_{n_0}(x) - q_m(x)|) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\sqrt{e} < \varepsilon.$$

Also konvergiert für $m \rightarrow \infty$ auch die Folge $(q_m)_{m=1}^\infty$ gleichmäßig auf X gegen F . $\square$

Als Folgerung erhalten wir:

SATZ 9.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{K}^N$ offen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge aus $C(\Omega, \mathbb{C})$, so daß $\sum_{j=1}^\infty |f_j|$ kompakt in Ω konvergiert. Dann gilt:

(a) $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_j)$ konvergiert ebenfalls kompakt auf Ω und stellt eine auf Ω stetige Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dar.

(b) Ist $F(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \Omega$, so gilt schon $f_n(z_0) = -1$ für wenigstens ein $n \in \mathbb{N}$.

(c) Das unendliche Produkt $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_j)$ ist gegenüber Umordnungen fest, d.h.: Ist $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, so ist auch $\prod_{j=1}^\infty (1 + f_{\varphi(j)})$ kompakt konvergent auf Ω gegen F .

(d) Ist speziell $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und gilt $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch F auf Ω holomorph.

BEWEIS. Dies erhält man unmittelbar mit Hilfe von Lemma 4.2 und dem Satz von Weierstraß 4.4, indem man Satz 9.5 auf alle kompakten Teilmengen von Ω anwendet. $\square$

LEMMA 9.7. Sei $(c_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $[0, 1)$. Dann gilt

$$\prod_{n=1}^\infty (1 - c_n) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty c_n < \infty.$$

BEWEIS. Wegen $0 < 1 - c_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit $p_n = \prod_{j=1}^n (1 - c_j)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 < p_{n+1} \leq p_n \leq 1$$

Also existiert der Grenzwert $p := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ und es gilt $0 \leq p \leq p_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist nun $\sum_{n=1}^\infty c_n < \infty$, so folgt nach Satz 9.5 (mit $f_n \equiv -c_n$ auf $\mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$), daß $p = \prod_{n=1}^\infty (1 - c_n) > 0$ gelten muß.

Ist umgekehrt $p > 0$, so folgt (wegen $0 < 1 - x \leq e^{-x}$ für alle $x \in [0, 1)$):

$$0 < p \leq p_n = \prod_{j=1}^n (1 - c_j) \leq \prod_{j=1}^n e^{-c_j} = \exp\left(-\sum_{j=1}^n c_j\right).$$

Es muß also $\sum_{n=1}^\infty c_n < \infty$ gelten, da sonst die rechte Seite gegen 0 konvergieren würde. $\square$

DEFINITION 9.8. Eine *Nullstellenverteilung* in einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Menge $\mathcal{N} = \{(z, n_z); z \in A\}$, wobei $A \subset \Omega$ diskret in Ω (also ohne Häufungspunkte in Ω) sei und $n_z \in \mathbb{N}$ für alle $z \in A$. Insbesondere hat A und damit auch $\mathcal{N}$ höchstens abzählbar unendlich viele Elemente. Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ heißt *Lösung der Nullstellenverteilung* $\mathcal{N}$, falls $A = N_f := \{z \in \Omega; f(z) = 0\}$ gilt und falls für alle $z \in A$ die Ordnung $m(f, z)$ der Nullstelle z mit n_z übereinstimmt. Für alle $z \in \Omega \setminus N_f$ setzen wir $m(f, z) := 0$.

Unser Ziel ist die Konstruktion von Lösungen zu vorgegebenen Nullstellenverteilungen.

SATZ 9.9. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von auf Ω holomorphen Funktionen, für die die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |1 - f_n(z)|$ in Ω kompakt konvergent ist und so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n auf keiner Zusammenhangskomponente von Ω identisch verschwindet. Dann ist das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^\infty f_n$ in Ω kompakt konvergent gegen eine auf Ω holomorphe Funktion f . Die Nullstellenmenge N_f von f ist diskret und es gilt für alle $z \in \Omega$*

$$m(f, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z).$$

BEWEIS. Daß das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^\infty f_n$ in Ω kompakt gegen eine auf Ω holomorphe Funktion f konvergiert, folgt aus Satz 9.6. Nach Teil (b) desselben Satzes ist $N_f = \bigcup_{n=1}^\infty N_{f_n}$ und $m(f, z) \geq \sum_{n=1}^\infty m(f_n, z)$ für alle $z \in \Omega$. Da die Mengen N_{f_n} alle diskret und mithin abzählbar sind, ist also auch N_f abzählbar. Daher muß auch N_f diskret sein. Wenn nämlich N_f einen Häufungspunkt $z_0 \in \Omega$ besäße, so würde f nach dem Identitätssatz auf der den Punkt z_0 enthaltenden Zusammenhangskomponente identisch verschwinden, hätte also überabzählbar unendlich viele Nullstellen. Sei nun $z_0 \in \Omega$ beliebig. Da N_f diskret in Ω ist, gibt es ein $r > 0$ mit $D(z_0, r) \subseteq \Omega$, so daß für alle $z \neq z_0$ aus $D(z_0, r)$ gilt $f(z) \neq 0$ (und daher auch $f_n(z) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Wegen $m(f, z_0) \geq \sum_{n=1}^\infty m(f_n, z_0)$ ist $f_n(z_0) = 0$ für höchstens endlich viele $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 9.6 (b) hat man dann

$$g(z) := \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \notin \{n_1, \dots, n_k\}}}^{\infty} f_\nu(z) \neq 0.$$

Wegen $f(z) = g(z) \prod_{j=1}^k f_{n_j}(z)$ muß also $m(f, z_0) = \sum_{n=1}^\infty m(f_n, z_0)$ gelten. $\square$

DEFINITION 9.10. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $E_0(z) := 1 - z$ und induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(z) := E_{n-1}(z) \exp\left(\frac{z^n}{n}\right) = (1 - z) \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{z^j}{j}\right).$$

Die hierdurch definierten Funktionen $E_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nennt man *Elementarfaktoren*.

LEMMA 9.11. *Für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $|1 - E_n(z)| \leq |z|^{n+1}$.*

BEWEIS. Für $n = 0$ ist dies unmittelbar klar. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Für die komplexe Ableitung von E_n berechnet man:

$$E'_n(z) = -\exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{z^j}{j}\right) + (1 - z)(1 + z + \dots + z^{n-1}) \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{z^j}{j}\right) = -z^n \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{z^j}{j}\right)$$

Da die Koeffizienten der Taylorreihe für die Exponentialfunktion alle positiv sind, folgt hieraus: $-E'_n(z)$ hat eine Taylorreihe der Form

$$-E'_n(z) = \sum_{j=n}^{\infty} a_j z^j$$

mit nicht negativen reellen Koeffizienten a_j , $n \leq j \in \mathbb{N}$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ sieht man durch Vertauschung von Summation und Integration:

$$1 - E_n(z) = E_n(0) - E_n(z) = \int_{[0, z]} -E'_n(\zeta) d\zeta = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} z^{j+1}.$$

$z \mapsto 1 - E_n(z)$ hat also eine Nullstelle der Ordnung $n+1$ in 0 und ebenfalls eine Taylorreihe mit ausschließlich nicht negativen, reellen Koeffizienten. Es folgt für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$

$$\left| \frac{1 - E_n(z)}{z^{n+1}} \right| = \left| \sum_{j=n}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} z^{j-n} \right| \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} |z|^{j-n} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} = 1 - E_n(1) = 1$$

und daher die Behauptung. $\square$

SATZ 9.12. Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|z_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Sei ferner $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{N}_0$, so daß

$$\forall r > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+k_n} < \infty. \quad (9.6)$$

Dann ist $\prod_{j=1}^{\infty} E_{k_j}(z/z_j)$ in $\mathbb{C}$ kompakt konvergent und die durch

$$P(z) := \prod_{j=1}^{\infty} E_{k_j} \left(\frac{z}{z_j} \right) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

definierte Funktion ist auf $\mathbb{C}$ holomorph mit $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_j; j \in \mathbb{N}\}$ und $P(z_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nimmt die Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ den Wert $w_0 \in \mathbb{C}$ genau m_0 mal an, so ist m_0 gleich der Vielfachheit der Nullstelle w_0 von P . Die Bedingung (9.6) ist zum Beispiel erfüllt für die Folge $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $k_n = n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere existiert also stets eine Folge mit (9.6).

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß mit $k_n = n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung (9.6) erfüllt ist. Ist $r > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es wegen $|z_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $r/|z_n| < 1/2$ für alle $n \geq n_1$. Die Reihe $\sum_{n=n_1}^{\infty} (r/|z_n|)^n$ hat also die geometrische Reihe $\sum_{n=n_1}^{\infty} 2^{-n}$ als konvergente Majorante, so daß also in diesem Fall die Bedingung (9.6) erfüllt ist.

Sei K nun eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit (9.6). Zu $r := \max_{z \in K} |z|$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_n| \geq r$ für alle $n \geq n_0$. Nach Lemma 9.11 folgt für alle $n \geq n_0$ und alle $z \in K$:

$$\left| 1 - E_{k_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \right| \leq \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+k_n}$$

Wegen (9.6) konvergiert also die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| 1 - E_{k_j} \left(\frac{z}{z_j} \right) \right|$$

gleichmäßig auf K . Diese Reihe ist also in $\mathbb{C}$ kompakt konvergent. Mit Satz 9.6 und Satz 9.9 folgen auch die restlichen Behauptungen. $\square$

BEMERKUNGEN 9.13. Ist die Folge $(|z_n|)_{n=1}^{\infty}$ in Satz 9.12 schnell genug wachsend, so kann man unter Umständen die Folge $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ konstant mit (9.6) wählen. Ist z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-1} < \infty$, so können wir sogar $k_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen und erhalten

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right).$$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-1} = \infty$ aber $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-2} < \infty$, so wählen wir $k_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und gelangen zu

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left(\frac{z}{z_n} \right) \right).$$

Kann man $k_n = k$ konstant wählen mit (9.6), so nennt man die Produktentwicklung

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_k \left(\frac{z}{z_n} \right)$$

mit dem minimal möglichen k das kanonische Produkt zur Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

FOLGERUNG 9.14. *Jede Nullstellenverteilung in $\mathbb{C}$ ist lösbar.*

BEWEIS. Sei also $\mathcal{N} = \{(a, n_a); a \in A\}$ mit $A \subset \mathbb{C}$ diskret und $n_a \in \mathbb{N}$ für alle $a \in A$ eine beliebige Nullstellenverteilung in $\mathbb{C}$. Ist A endlich, so ist $z \mapsto \prod_{a \in A} (z - a)^{n_a}$ eine Lösung der Nullstellenverteilung. Sei nun A unendlich. Dann ist A abzählbar, da wegen der Diskretheit von A in $\mathbb{C}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D}(0, N)$ höchstens endlich viele Elemente enthält. Numerieren wir die Elemente von A so durch, daß $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ mit paarweise verschiedenen $a_n, n \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $|a_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Ist $0 \notin A$, d.h. $a_1 \neq 0$, so liefert Satz 9.12 eine Lösung der Nullstellenverteilung. Ist $0 \in A$, so bestimmt man mit Satz 9.12 eine Lösung P_0 der Nullstellenverteilung $\mathcal{N}_0 = \{(a, n_a); a \in A \setminus \{0\}\}$. Dann ist P mit $P(z) := z^{n_0} P_0(z)$ eine Lösung der Nullstellenverteilung $\mathcal{N}$. $\square$

SATZ 9.15 (Produktsatz von Weierstraß). *Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine nicht identisch verschwindende ganze Funktion und seien $(z_j)_{j=1}^{\alpha}$ die Nullstellen von f ebenso oft aufgeführt, wie ihre Vielfachheit beträgt, und betragsmäßig der Größe nach geordnet ($\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $|z_n| \leq |z_{n+1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n < n+1 \leq \alpha$). Sei $m(f, 0)$ die Vielfachheit von 0 als Nullstelle von f . Dann gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und eine Folge $(k_n)_{n=1}^{\alpha}$ in $\mathbb{N}_0$, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$f(z) = z^{m(f,0)} e^{g(z)} \prod_{j=m(f,0)+1}^{\alpha} E_{k_j} \left(\frac{z}{z_j} \right)$$

mit (im Fall $\alpha = \infty$) kompakter Konvergenz in $\mathbb{C}$.

BEWEIS. Ist die Nullstellenmenge N_f von f leer, so ist $\alpha = 0 = m(f, 0)$. Das Produkt über eine leere Indexmenge ist wie üblich als 1 definiert. Wir setzen in diesem Fall $P(z) \equiv 1$. Im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ ist die Existenz des Produktes

$$P(z) := z^{m(f,0)} \prod_{j=m(f,0)+1}^{\alpha} E_{k_j} \left(\frac{z}{z_j} \right)$$

trivial (und $k_n = 0$ wählbar für alle $n = 1, \dots, \alpha$). Im Fall $\alpha = \infty$ ist wegen der Diskretheit der Nullstellenmenge von f in $\mathbb{C}$ (nach Satz 4.12 und, da alle Nullstellen von endlicher Ordnung sind,) die angegebene Durchnummerierung möglich. Nach Satz 9.12 und Folgerung 9.14 gibt es also eine Folge $(k_n)_{n=m(f,0)+1}^{\infty}$, so daß durch

$$P(z) := z^{m(f,0)} \prod_{j=m(f,0)+1}^{\infty} E_{k_j} \left(\frac{z}{z_j} \right)$$

eine ganze Funktion definiert wird (mit kompakter Konvergenz in $\mathbb{C}$ des unendlichen Produktes). In allen drei Fällen ist P eine ganze Funktion, die dieselben Nullstellen mit den selben Vielfachheiten wie f hat. Die Funktion f/P hat daher eine Fortsetzung zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen, nullstellenfreien Funktion. Nach Satz 5.16 gibt es dann eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $\exp(g(z)) = f(z)/P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus N_f$. Es folgt $f(z) \equiv \exp(g(z))P(z)$ auf $\mathbb{C}$ und damit die Behauptung. $\square$

Da wir Freiheiten bei der Wahl der Zahlen k_n , $1 \leq n \leq \alpha$, haben, ist die Produktdarstellung natürlich nicht eindeutig.

Bevor wir ein explizites Beispiel behandeln, zeigen wir noch eine Hilfsaussage:

DEFINITION 9.16. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ohne Nullstellen in Ω . Dann heißt f'/f die *logarithmische Ableitung von f auf Ω* .

Ist auch $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ohne Nullstellen in Ω , so rechnet man nach

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

Durch vollständige Induktion sieht man, daß für endlich viele nullstellenfreien Funktionen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f := \prod_{j=1}^n f_j$ gilt:

$$\frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^n \frac{f'_j}{f_j}. \quad (9.7)$$

Es gilt sogar:

LEMMA 9.17. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von nullstellenfreien Funktionen aus $\mathcal{O}(\Omega)$, so daß das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^\infty f_n$ die Voraussetzungen zu Satz 9.9 erfüllt und daher nach diesem Satz kompakt konvergent gegen eine in Ω holomorphe nullstellenfreie Funktion f ist. Dann gilt

$$\frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^\infty \frac{f'_j}{f_j}$$

mit kompakter Konvergenz in Ω .

BEWEIS. Mit $p_n := \prod_{j=1}^n f_j$ gilt nach (9.7)

$$\frac{p'_n}{p_n} = \sum_{j=1}^n \frac{f'_j}{f_j}. \quad (9.8)$$

Da p_n kompakt gegen f konvergiert, konvergiert auch p'_n kompakt gegen f' in Ω . Da f nullstellenfrei ist, überlegt man sich leicht, daß auch $1/p_n \rightarrow 1/f$ mit kompakter Konvergenz in Ω gilt. Also konvergiert die linke Seite und damit auch die rechte Seite von (9.8) gegen f'/f . $\square$

BEISPIEL 9.18. Für die Funktion f mit $f(z) := \sin(\pi z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $N_f = \mathbb{Z}$ und $m(f, n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Nach den in 9.13 gemachten Bemerkungen können wir $k_n = 1$ wählen für alle $n \in \mathbb{Z}$ und erhalten nach dem Produktsatz von Weierstraß für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(\pi z) = zg(z) \prod_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right)$$

mit einer nullstellenfreien ganzen Funktion g . Für die logarithmische Ableitung errechnet man mit Lemma 9.17,

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

mit kompakter Konvergenz in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Nach (8.5) folgt $g' \equiv 0$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. g muß daher konstant auf $\mathbb{C}$ sein. Wegen

$$\frac{\sin(\pi z)}{z} \rightarrow \pi \quad \text{für } z \rightarrow 0$$

folgt $\exp(g(z)) \equiv \pi$. Damit erhalten wir

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right)$$

mit kompakter Konvergenz in $\mathbb{C}$. Beachten wir noch

$$\left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right) \left(1 - \frac{z}{-n}\right) \exp\left(\frac{z}{-n}\right) = 1 - \frac{z^2}{n^2},$$

so folgt die von Euler angegebene Produktdarstellung für $\sin(\pi z)$:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Für den speziellen Wert $z = 1/2$ ergibt sich

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right),$$

woraus man die Produktdarstellung von Wallis erhält:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

Wir zeigen nun, daß Nullstellenverteilungen auch in beliebigen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ lösbar sind. Etwas allgemeiner gilt sogar:

SATZ 9.19. *Sei Ω eine nicht leere offene Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$ mit $\Omega \neq \widehat{\mathbb{C}}$ und sei $\mathcal{N} = \{(a, n_a); a \in A\}$ eine Nullstellenverteilung in Ω . Dann hat $\mathcal{N}$ eine Lösung $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so daß also für alle $a \in A$ die Funktion f eine Nullstelle der Ordnung n_a besitzt und f auf $\Omega \setminus A$ nullstellenfrei ist.*

BEWEIS. Nach Folgerung 9.14 gilt die Aussage für $\Omega = \mathbb{C}$. Sei nun $\Omega \neq \mathbb{C}$ und $\Omega \neq \widehat{\mathbb{C}}$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Ist $A = \emptyset$, so ist $f \equiv 1$ eine Lösung. Ist $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ endlich, so ist mit $m := \sum_{j=0}^k n_{a_j}$ eine Lösung gegeben durch

$$f(z) := \frac{1}{(z-w)^m} \cdot \prod_{j=0}^k (z-a_j)^{n_{a_j}} \quad \text{im Fall } A \subset \mathbb{C}$$

beziehungsweise

$$f(z) := \frac{1}{(z-w)^m} \cdot \prod_{j=1}^k (z-a_j)^{n_{a_j}} \quad \text{im Fall } a_0 := \infty \in A.$$

Sei nun die Menge A unendlich. Wir überlegen uns zunächst, daß es genügt, den Fall $\infty \in \Omega \setminus A$ zu betrachten. Ist dies nicht der Fall, so fixieren wir ein $b \in \Omega \setminus A$ und definieren $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ durch $\varphi(z) := (z-b)^{-1}$ für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Die Menge $\tilde{\Omega} := \varphi(\Omega)$ ist dann offen in $\widehat{\mathbb{C}}$ und $\tilde{A} := \varphi(A)$ ist diskrete unendliche Teilmenge von $\tilde{\Omega}$. Ist nun $\tilde{f}$ eine Lösung der Nullstellenverteilung $\{(\varphi(a), n_a); a \in A\}$ so ist $f := \tilde{f} \circ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung von $\mathcal{N}$.

Sei daher nun $\infty \in \Omega \setminus A$ vorausgesetzt. Da A diskret in Ω ist muß A abzählbar unendlich sein. Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit Werten in A , die jeden Wert $a \in A$ genau n_a mal annimmt. Da $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ eine nicht leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $w_n \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ mit $|z_n - w_n| = \text{dist}(z_n, \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$. Es folgt $|z_n - w_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, da andernfalls A einen Häufungspunkt in Ω haben müßte. Sei nun K eine beliebige kompakte

Teilmenge von Ω mit $K \neq \{\infty\}$. Dann ist $c := \text{dist}(K, \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) > 0$. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\forall j \geq N \forall z \in K : \quad \frac{|z_j - w_j|}{|z - w_j|} < \frac{|z_j - w_j|}{c} < \frac{1}{2}.$$

Nach Lemma 9.11 folgt hieraus

$$\forall j \geq N \forall z \in K : \quad \left| 1 - E_j \left(\frac{z_j - w_j}{z - w_j} \right) \right| \leq \frac{1}{2^{j+1}}.$$

Also ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| 1 - E_j \left(\frac{z_j - w_j}{z - w_j} \right) \right|$$

gleichmäßig auf K konvergent. Nach Satz 9.9 ist daher

$$\prod_{j=1}^{\infty} E_j \left(\frac{z_j - w_j}{z - w_j} \right)$$

auf Ω kompakt konvergent gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Man beachte dabei, daß mit $f(\infty) = 1$ die Konvergenz auch in einer Umgebung von ∞ gleichmäßig ist. Da für alle $j \in \mathbb{N}$ der Punkt z_j eine einfache Nullstelle von $z \mapsto E_j \left(\frac{z_j - w_j}{z - w_j} \right)$ ist, hat f nach Satz 9.9 in allen $a \in A$ eine Nullstelle der Ordnung n_a und ist auf $\Omega \setminus A$ nullstellenfrei. $\square$

Sei nun $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Dann ist $\mathcal{O}(G)$ bezüglich der punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation ein kommutativer Ring, der zudem nullteilerfrei ist. Sind nämlich $f, g \in \mathcal{O}(G)$ zwei nicht identisch verschwindende Funktionen, so ist $(fg)(z) = f(z)g(z) \neq 0$ für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus (N_f \cup N_g)$. Da $N_f \cup N_g$ höchstens abzählbar ist, ist fg ebenfalls nicht identisch verschwindend. Also ist $\mathcal{O}(G)$ ein Integritätsbereich.

SATZ 9.20. *Sei G eine von $\widehat{\mathbb{C}}$ verschiedene offene und zusammenhängende Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann ist $\mathcal{M}(G)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(G)$, d.h. zu jeder meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(G)$ gibt es $g, h \in \mathcal{O}(G)$, h nicht identisch verschwindend, mit $f = g/h$.*

BEWEIS. Nach Lemma 8.3 ist $\mathcal{M}(G)$ ein Körper mit $\mathcal{O}(G) \subset \mathcal{M}(G)$. Sei nun $f \in \mathcal{M}(G)$ beliebig und sei A die diskrete Menge der Polstellen von f . Für alle $a \in A$ sei n_a die Ordnung der Polstelle a . Nach Satz 9.19 gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{O}(G)$ die in allen $a \in A$ eine Nullstelle der Ordnung n_a besitzt und in $G \setminus A$ nullstellenfrei ist. Die Funktion $g := fh$ hat dann in allen $a \in A$ hebbare Singularitäten, ist also zu einer auf ganz G holomorphen, wieder mit g bezeichneten Funktion fortsetzbar und wir erhalten $f = g/h$. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 9.

AUFGABE 9.1. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{T}$ so, daß die Folge $(z^{2^n})_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $z^{2^k} = 1$.

AUFGABE 9.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω , sei Ω_0 eine abzählbare dichte Teilmenge von Ω und sei $(c_n)_n$ eine Folge in Ω mit $\Omega_0 = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$, derart daß jeder Punkt von Ω_0 unendlich oft als Folgenglied auftritt.

- (a) Zeigen Sie, daß mit $r_n := \text{dist}(c_n, \partial\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt : $U_{r_n}(c_n) \setminus K_n \neq \emptyset$.
- (b) Wählen Sie zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $s_n \in U_{r_n}(c_n) \setminus K_n$ und setzen Sie $S := \{s_n; n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie: S ist diskret. (Hinweis: Betrachten Sie $S \cap K_n$ für $n \in \mathbb{N}$.)

(c) Zeigen Sie: Jeder Randpunkt von Ω ist Häufungspunkt von S .

AUFGABE 9.3. Sei $G \neq \emptyset$ ein Gebiet. Zeigen Sie, daß eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ existiert so für alle Gebiete $\tilde{G} \supsetneq G$ gilt: Es gibt keine Funktion $F \in \mathcal{O}(\tilde{G})$ so daß $F|_G \equiv f$.

AUFGABE 9.4. Zeigen Sie:

$$(a) \cos(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2} \right). \quad (b) \cosh(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2} \right).$$

AUFGABE 9.5. (a) Seien $a, z \in \mathbb{D}$ mit $a \neq 0$, und sei $|z| \leq r < 1$.

Zeigen Sie :

$$\left| \frac{a + |a|z}{(1 - \bar{a}z)a} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

(b) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Zeigen Sie: Das unendliche Produkt

$$B(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

konvergiert kompakt auf $\mathbb{D}$ gegen eine beschränkte holomorphe Funktion. Was sind die Nullstellen von B ?

AUFGABE 9.6. Sei $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, derart daß $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert. Zeigen Sie : $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Gilt das auch noch, wenn Sie nicht mehr $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n) \neq 0$ fordern?

AUFGABE 9.7. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z}{j} \right) ?$$

Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an.

Hinweis: Beachten Sie

$$\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z}{j} \right) = \prod_{j=1}^n \left(\left(1 - \frac{z}{j} \right) e^{z/j} \right) \exp \left(-z \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right).$$

AUFGABE 9.8. Zeigen Sie:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(az) - \exp(bz) = (a-b)z \exp\left(\frac{a+b}{2}z\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2 \pi^2} \right).$$

$$(b) \cos\left(\frac{\pi z}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi z}{4}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n z}{2n-1} \right)$$

Holomorphe Funktionen als Abbildungen

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend (also ein offenes Intervall) und $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ mit nirgends verschwindender Ableitung, so ist f bekanntlich streng monoton und besitzt eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$. Im komplexen Fall gilt dies nicht mehr, wie das folgende Beispiel zeigt:

BEISPIEL 10.1. Es ist $\mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig komplex differenzierbar mit nirgends verschwindender komplexer Ableitung $\exp' \equiv \exp$ aber $\exp$ besitzt keine Umkehrfunktion von $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{C}$, da $\exp$ wegen $\exp(z) = \exp(z + 2\pi i k)$ für alle $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ nicht injektiv ist.

Wir werden jedoch noch lokale Aussagen erhalten.

SATZ 10.2 (Satz von der offenen Abbildung). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf keiner Zusammenhangskomponente von Ω konstant. Dann ist $f(\Omega)$ offen in $\mathbb{C}$.*

BEWEIS. Sei $w_0 \in f(\Omega)$ beliebig, also $w_0 = f(z_0)$ für ein $z_0 \in \Omega$. Sei G die Zusammenhangskomponente von Ω , die z_0 enthält. Dann ist G ein Gebiet und nach Voraussetzung ist f nicht konstant auf G . Nach Satz 4.10 gibt es also eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k g(z) \quad \text{für alle } z \in G.$$

Wegen der Stetigkeit von g gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset G$, so daß g keine Nullstelle in $\overline{D(z_0, r)}$ hat. Wir setzen nun

$$\varepsilon := \min_{z \in \partial D(z_0, r)} |(z - z_0)^k g(z)|.$$

Wegen der Kompaktheit von $\partial D(z_0, r)$ existiert dieses Minimum und es ist $\varepsilon > 0$. Für alle $w \in D(w_0, \varepsilon)$ und alle $z \in \partial D(z_0, r)$ gilt dann:

$$|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| = |w - w_0| < \varepsilon \leq |(z - z_0)^k g(z)| = |f(z) - w_0|.$$

Nach dem Satz von Rouché hat also die Funktion $z \mapsto f(z) - w$ in $D(z_0, r)$ genau k Nullstellen (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt). Wegen $k > 0$ gibt es zu jedem $w \in D(w_0, \varepsilon)$ wenigstens ein $z \in D(z_0, r) \subset \Omega$ mit $f(z) = w$ und es folgt $D(w_0, \varepsilon) \subset f(\Omega)$. Zu jedem Punkt $w_0 \in f(\Omega)$ gibt es also eine in $f(\Omega)$ enthaltene Umgebung. Daher ist $f(\Omega)$ offen. $\square$

FOLGERUNG 10.3 (Satz von der Gebietstreue). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant. Dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$.*

BEWEIS. Nach dem Satz 10.2 von der offenen Abbildung ist $f(G)$ offen. Seien w_1 und w_2 zwei Punkte aus $f(G)$, $w_j = f(z_j)$, mit $z_j \in G$, $j = 1, 2$. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Dann ist $f \circ \gamma$ ein stetiger Weg in $f(G)$ mit $(f \circ \gamma)(a) = w_1$ und $(f \circ \gamma)(b) = w_2$. Die offene Menge $f(G)$ ist also wegzusammenhängend und daher ein Gebiet. $\square$

SATZ 10.4. *Sei f eine auf einer offenen Menge Ω holomorphe Funktion und sei z_0 ein Punkt aus Ω . Genau dann ist f in einer Umgebung von z_0 injektiv, wenn $f'(z_0) \neq 0$.*

BEWEIS. Sei also $f'(z_0) \neq 0$. Nach dem Beweis zur Cauchyschen Integralformel (Satz 5.10) ist die Funktion $h : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{für } z, w \in \Omega \text{ mit } z \neq w \\ f'(z) & \text{für } z = w \in \Omega \end{cases}$$

auf $\Omega \times \Omega$ stetig (sogar beliebig oft stetig differenzierbar). Wegen $h(z_0, z_0) = f'(z_0) \neq 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $h(z, w) \neq 0$ für alle $z, w \in D(z_0, \delta)$. Insbesondere folgt für alle $z, w \in D(z_0, \delta)$ mit $z \neq w$:

$$f(z) - f(w) = (z - w)h(z, w) \neq 0,$$

d.h. f ist auf $D(z_0, \delta)$ injektiv.

Ist nun $f'(z_0) = 0$ so ist f entweder konstant auf der den Punkt z_0 enthaltenden Zusammenhangskomponente G von Ω (und dann in keiner Umgebung von z_0 injektiv) oder f ist nicht konstant. Dann gibt es wie im Beweis zum Satz von der offenen Abbildung eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k g(z) \quad \text{für alle } z \in G.$$

Wegen $f'(z_0) = 0$ ist z_0 eine mindestens doppelte Nullstelle der Funktion $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ und damit $k \geq 2$. Sei nun $U \subseteq \Omega$ eine beliebige Umgebung von z_0 in Ω . Dann gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ und $g(z) \neq 0$ für $|z - z_0| \leq r$. Insbesondere ist

$$\varepsilon := \min_{z \in \partial D(z_0, r)} |(z - z_0)^k g(z)| > 0.$$

Da f in z_0 stetig ist gibt es ein $\delta > 0$ mit $\delta < r$ und $f(D(z_0, \delta)) \subseteq D(f(z_0), \varepsilon)$. Für alle $\zeta \in D(z_0, \delta)$ und alle $z \in \partial D(z_0, r)$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\zeta) - (f(z) - f(z_0))| &= |f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon \leq \\ &\leq |(z - z_0)^k g(z)| = |f(z) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouché hat für alle $\zeta \in D(z_0, \delta)$ die Abbildung $z \mapsto u_\zeta(z) := f(z) - f(\zeta)$ mindestens $k \geq 2$ Nullstellen in $D(z_0, r)$. Wegen $u'_\zeta(\zeta) = f'(\zeta)$ und da f nicht konstant ist auf G gibt es ein $\zeta_0 \in D(z_0, \delta)$ mit $u'_{\zeta_0}(\zeta_0) \neq 0$. Der Punkt ζ_0 ist also keine doppelte Nullstelle von u_{ζ_0} . Es gibt daher ein $\zeta_1 \neq \zeta_0$ in $D(z_0, r)$ mit $u_{\zeta_0}(\zeta_1) = f(\zeta_1) - f(\zeta_0) = 0$. Dies zeigt, daß die Funktion f ist nicht injektiv auf U ist. $\square$

SATZ 10.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ injektiv auf Ω . Dann ist $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(\Omega))$. Ist $w_0 \in f(\Omega)$ beliebig und ist $E \subset \Omega$ ein Greenscher Bereich mit $z_0 := f^{-1}(w_0) \in \text{int}(E)$, so gilt für alle $w \in f(\text{int}(E))$*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz \quad (10.1)$$

und für alle $w \in f(\Omega)$ ist

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}. \quad (10.2)$$

BEWEIS. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $f(\Omega)$ offen. Sei nun $w_0 \in f(\Omega)$ beliebig und sei E ein Greenscher Bereich in Ω mit $z_0 := f^{-1}(w_0) \in \text{int}(E)$. Wegen der Injektivität von f hat für alle $w \in f(\Omega)$ die Funktion $z \mapsto \frac{zf'(z)}{f(z) - w}$ nur in dem Punkt

$f^{-1}(w)$ eine Polstelle. Wegen $f'(f^{-1}(w)) \neq 0$ (vergl. Satz 10.4) ist diese einfach. Nach Folgerung 6.15 gilt für alle $w \in f(\text{int}(E))$ (unter Verwendung von Lemma 6.16 (b)):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz = \text{Res} \left(\frac{zf'(z)}{f(z) - w}, f^{-1}(w) \right) = f^{-1}(w).$$

Mit Lemma 1.10 und den Bemerkungen 1.11 folgt die Holomorphie von f^{-1} auf $f(\text{int}(E))$ durch Differentiation unter dem Integral. Gleichung (10.2) erhält man mit Hilfe der Kettenregel aus $w \equiv f(f^{-1}(w))$ auf $f(\Omega)$. $\square$

Wir kommen nun zu den *geometrischen Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung*. Solche Abbildungen sind *lokal konform*, d.h. im Kleinen *winkel- und orientierungstreu*. Wir wollen dies präzisieren. Sei z_0 ein Punkt in der komplexen Zahlenebene und seien $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0, 1], \mathbb{C})$ zwei *glatte* Wege mit Anfangspunkt z_0 , d.h. mit $\gamma_j'(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1], j = 1, 2$, so daß also für alle $t \in [0, 1]$ die Halbtangenten

$$s \mapsto \gamma_j(t) + s\gamma_j'(t), \quad (s \geq 0)$$

existieren. Der orientierte Schnittwinkel $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ zwischen γ_1 und γ_2 ist definiert als der orientierte Schnittwinkel der Halbtangenten an γ_1 und γ_2 im Punkt $z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, also als $\varphi_2 - \varphi_1$, wobei φ_j der Winkel zwischen der positiven reellen Halbachse und $\gamma_j'(0)$ sei, d.h. der durch $\gamma_j'(0) = |\gamma_j'(0)|e^{i\varphi_j}$ bis auf ganze Vielfache von 2π eindeutig bestimmte Winkel ($j = 1, 2$).

DEFINITION 10.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$. Eine Abbildung $f = u + iv \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ (mit $u, v \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$) heißt *in z_0 konform*, falls

$$\det J_f(z_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

und falls für alle glatten Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ gilt: $\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$. Die Abbildung f heißt auf Ω *lokal konform*, falls f in allen Punkten von Ω konform ist.

Für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\arg(z)$ das *Argument* von z also den bis auf ganze Vielfache von 2π eindeutig bestimmten Winkel φ mit $z = |z|e^{i\varphi}$.

BEMERKUNG 10.7. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$. Eine Abbildung $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ mit $\det J_f(z_0) \neq 0$ ist genau dann in z_0 konform, wenn für je zwei glatte Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ gilt

$$\arg((f \circ \gamma_2)'(0)) - \arg((f \circ \gamma_1)'(0)) = \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(\gamma_1'(0))$$

d.h. wenn

$$\arg((f \circ \gamma_2)'(0)) - \arg(\gamma_2'(0)) = \arg((f \circ \gamma_1)'(0)) - \arg(\gamma_1'(0))$$

gilt (jeweils modulo ganzer Vielfacher von 2π). Dies ist dazu äquivalent, daß für alle glatten Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(0) = z_0$ das Argument von $(f \circ \gamma)'(0)/\gamma'(0)$ (modulo ganzer Vielfacher von 2π) den gleichen Wert annimmt.

Es gilt nun:

SATZ 10.8. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist auf Ω lokal konform.
- (b) f ist auf Ω holomorph und f' hat keine Nullstelle in Ω .

(c) f ist auf Ω holomorph und zu jedem $z_0 \in \Omega$ gibt es offene Mengen $U \subseteq \Omega$ und $V \subseteq f(\Omega)$ mit $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$, so daß $f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv mit holomorpher Umkehrfunktion $(f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ ist.

BEWEIS. (a) $\implies$ (b): Sei also f auf Ω lokal konform und sei $z_0 \in \Omega$ beliebig. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Für alle $\alpha \in [0, 2\pi)$ betrachten wir den Weg $\gamma_\alpha : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma_\alpha(t) := z_0 + rte^{i\alpha}$, $0 \leq t \leq 1$. Dann ist $\gamma'_\alpha(0) = re^{i\alpha}$. Nach der Kettenregel haben wir

$$(f \circ \gamma_\alpha)'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\gamma'_\alpha(0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{\gamma'_\alpha(0)}.$$

Damit folgt

$$\frac{(f \circ \gamma_\alpha)'(0)}{\gamma'_\alpha(0)} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \frac{re^{-i\alpha}}{re^{i\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)e^{-2i\alpha}, \quad (10.3)$$

wobei das Argument dieses Ausdrucks nach Bemerkung 10.7 unabhängig von α sein muß (modulo ganzer Vielfacher von 2π). Da aber, wie man aus (10.3) sieht, der Weg $\alpha \mapsto \frac{(f \circ \gamma_\alpha)'(0)}{\gamma'_\alpha(0)}$ die Kreislinie um $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ mit Radius $|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)|$ durchläuft, ist dies nur möglich, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in \Omega$ gilt. Dies zeigt, daß f auf Ω holomorph ist. Wegen $\det(J_f(z)) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$ und $|f'(z)|^2 = \det(J_f(z))$ (was man unmittelbar mit Hilfe der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen nachrechnet) kann f' keine Nullstelle haben. f erfüllt also (b).

(b) $\implies$ (c) folgt unmittelbar mit den Sätzen 10.2, 10.4 und 10.5.

(c) $\implies$ (a): Sei (c) erfüllt für f und sei $z_0 \in \Omega$ beliebig und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ ein beliebiger glatter Weg mit $\gamma(0) = z_0$. Da f in einer Umgebung V von $f(z_0)$ eine holomorphe Umkehrfunktion g besitzt mit $f(g(w)) \equiv w$ auf V , folgt mit der Kettenregel $f'(z_0)g'(f(z_0)) = 1$, also $f'(z_0) \neq 0$ und damit auch $\det J_f(z_0) \neq 0$. Ferner ist

$$\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)} = \frac{f'(z_0)\gamma'(0)}{\gamma'(0)} = f'(z_0)$$

unabhängig von γ . Nach Bemerkung 10.7 ist f also in z_0 konform. Da dies für alle $z_0 \in \Omega$ gilt ist f auf Ω lokal konform. $\square$

DEFINITION 10.9. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ zwei offene Mengen. Eine Abbildung $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ heißt *konform*, falls sie bijektiv und lokal konform ist. Nach den Sätzen 10.5 und 10.8 ist dies dazu äquivalent, daß $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine *biholomorphe* Abbildung von Ω_1 auf Ω_2 ist, d.h. eine bijektive holomorphe Abbildung von Ω_1 auf Ω_2 , deren Umkehrabbildung ebenfalls holomorph ist. Dann ist auch $f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ eine konforme Abbildung. Zwei offene Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ heißen *konform äquivalent*, falls es eine biholomorphe Abbildung von Ω_1 auf Ω_2 gibt. Wir schreiben dafür auch: $\Omega_1 \sim \Omega_2$. Mit $\text{Aut}(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller biholomorphen Abbildungen von einer offenen Menge Ω auf sich. Dies ist eine Untergruppe der Gruppe aller bijektiven Abbildungen von Ω auf sich (mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung).

Man rechnet unmittelbar, daß $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Familie aller offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert. Es ergeben sich zwei natürliche Aufgabenstellungen:

- (a) Die Bestimmung aller Äquivalenzklassen von Gebieten in $\mathbb{C}$.
- (b) Die Bestimmung von $\text{Aut}(G)$ für ein gegebenes Gebiet G .

Bei der zweiten Fragestellung kann man sich auf die Bestimmung von $\text{Aut}(G)$ für *Normgebiete*, d.h. einen speziellen Vertreter G einer jeden Äquivalenzklasse beschränken, da die Automorphismengruppen von konform äquivalenten Gebieten isomorph sind.

In Satz 2.20 hatten wir bereits die Automorphismengruppe der offenen Einheitskreisscheibe berechnet. Damit stellt sich die Frage, welche Gebiete in $\mathbb{C}$ zur offenen Einheitskreisscheibe konform äquivalent sind.

BEMERKUNG 10.10. $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sind einfach zusammenhängende Gebiete, die nicht zueinander konform äquivalent sind. Ist nämlich $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ eine holomorphe Abbildung, so ist f nach dem Satz von Liouville konstant, also nicht injektiv.

SATZ 10.11. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein von $\mathbb{C}$ verschiedenes einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist G konform äquivalent zu einem beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebiet.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Da die Funktion $z \mapsto z - z_0$ keine Nullstelle in G besitzt und da G einfach zusammenhängend ist, gibt es nach Satz 5.16 eine Funktion $h \in \mathcal{O}(G)$ mit $\exp(h(z)) \equiv z - z_0$ auf G . Dann ist auch die Funktion g mit $g(z) := \exp(h(z)/2)$ für alle $z \in G$ eine auf G holomorphe Funktion. Diese erfüllt $g(z)^2 \equiv z - z_0$ auf G und ist injektiv, denn aus $g(z_1) = g(z_2)$ folgt $z_1 - z_0 = g(z_1)^2 = g(z_2)^2 = z_2 - z_0$ und damit $z_1 = z_2$. Nach dem Satz von der Gebietstreue 10.3 ist $g(G)$ ein Gebiet. Sei w ein beliebiger Punkt aus $g(G)$ und $r > 0$ mit $\overline{D(w, r)} \subset g(G)$. Wir setzen $w_0 := -w$. Für alle $\zeta \in \overline{D(w_0, r)}$ ist also $-\zeta \in \overline{D(w, r)} \subset g(G)$, d.h. es ist $-\zeta = g(z)$ für ein $z \in G$ und damit $\zeta^2 = (-\zeta)^2 = z - z_0 = g^{-1}(-\zeta) - z_0$. Da $g^{-1} : g(G) \rightarrow G$ injektiv ist, kann also ζ nicht in $g(G)$ liegen. Damit ist gezeigt, daß $\overline{D(w_0, r)} \cap g(G) = \emptyset$ gilt. Wir definieren nun $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) := (g(z) - w_0)^{-1}$. Als Hintereinanderausführung der injektiven und holomorphen Abbildungen g und $w \mapsto (w - w_0)^{-1}$ ist f ebenfalls injektiv und holomorph. Wegen $f(G) \subset D(0, 1/r)$ ist $f(G)$ beschränkt und nach dem Satz von der Gebietstreue 10.3 ein Gebiet. Daß $f(G)$ einfach zusammenhängend ist, folgt aus dem folgenden Lemma. $\square$

LEMMA 10.12. *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ injektiv, so ist auch das Gebiet $f(G)$ einfach zusammenhängend.*

BEWEIS. Nach dem Satz von der Gebietstreue 10.3 ist $f(G)$ ein Gebiet. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow f(G)$ ein beliebiger stückweise stetig differenzierbarer geschlossener Weg in $f(G)$. Da die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ nach Satz 10.5 holomorph und damit stetig partiell differenzierbar ist, ist auch $\tilde{\gamma} := f^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise stetig differenzierbarer geschlossener Weg in G . Für alle $g \in \mathcal{O}(f(G))$ folgt nach Satz 5.15 wegen $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ und der Holomorphie von $z \mapsto g(f(z))f'(z)$ auf G :

$$\int_{\gamma} g(w)dw = \int_a^b g(f(\tilde{\gamma}(t)))f'(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t) dt = \int_{\tilde{\gamma}} g(f(z))f'(z)dz = 0.$$

Wiederum mit Satz 5.15 (diesmal unter Verwendung der Implikation (b) $\Rightarrow$ (a)) folgt die Behauptung. $\square$

SATZ 10.13. *Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von auf einem Gebiet G injektiven holomorphen Funktionen, welche auf G kompakt gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiere. Dann ist f entweder konstant oder schon injektiv.*

BEWEIS. Sei f nicht konstant und seien $z_1, z_2 \in G$ beliebig mit $z_1 \neq z_2$. Nach dem Satz 4.12 von der Isoliertheit der Nullstellen einer auf einem Gebiet holomorphen, nicht konstanten Funktion gibt es ein $r > 0$ mit $K_r := \overline{D(z_1, r)} \subset G \setminus \{z_2\}$ so daß die Funktion $z \mapsto f(z) - f(z_2)$ keine Nullstelle in $K_r \setminus \{z_1\}$ hat. Insbesondere ist $z_2 \notin K_r$ und $\varepsilon :=$

$\min_{z \in \partial K_r} |f(z) - f(z_2)| > 0$. Wegen der kompakten Konvergenz von $(f_n)_{n=1}^\infty$ gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z) - f(z_2) - (f_n(z) - f_n(z_2))| < \varepsilon \leq |f(z) - f(z_2)| + |f_n(z) - f_n(z_2)|$$

für alle $z \in \partial K_r$. Nach dem Satz von Rouché haben daher die Funktionen $f - f(z_2)$ und $f_n - f_n(z_2)$ gleichviele Nullstellen in K_r . Da f_n nach Voraussetzung injektiv ist, und z_2 nicht in K_r liegt, hat $f_n - f_n(z_2)$ und damit auch $f - f(z_2)$ keine Nullstelle in K_r . Also ist $f(z_1) \neq f(z_2)$ und es folgt die Injektivität von f . $\square$

SATZ 10.14 (Riemannscher Abbildungssatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes von $\mathbb{C}$ verschiedenes Gebiet. Dann ist G konform äquivalent zu $\mathbb{D}$. Es gilt sogar: Zu jedem $z_0 \in G$ gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f_0 : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f_0(z_0) = 0$ und so daß $f_0'(z_0)$ reell und positiv ist.*

BEWEIS. Wegen Satz 10.11 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das Gebiet G beschränkt ist. Sei nun $z_0 \in G$ beliebig. Wir zeigen zunächst die Existenz einer biholomorphen Funktion $f_0 : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Es bezeichne $\mathcal{F}$ die Menge aller injektiven und beschränkten holomorphen Funktionen f auf G mit $f(z_0) := 0$ und $f'(z_0) = 1$. Da G beschränkt ist, ist $z \mapsto z - z_0$ in $\mathcal{F}$. Also ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Sei weiter

$$M := \inf_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in G} |f(z)|.$$

Dann ist $0 \leq M < \infty$ und es gibt eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ mit $M_n := \sup_{z \in G} |f_n(z)| \rightarrow M$ für $n \rightarrow \infty$ und $M_n \leq M + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ ist also auf G gleichmäßig beschränkt und besitzt daher nach dem Satz von Montel eine auf G kompakt gegen eine holomorphe Funktion f konvergente Teilfolge $(f_{n(k)})_{k=1}^\infty$. Nach Satz 4.4 folgt dann auch

$$f'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n(k)}(z_0) = 1,$$

so daß auch f injektiv auf G ist (nach Satz 10.13). Ferner gilt wieder $f(z_0) = 0$ und es ist für alle $z \in G$:

$$|f(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n(k)}(z)| \leq M \quad \text{und damit} \quad \sup_{z \in G} |f(z)| \leq M.$$

Es folgt also $f \in \mathcal{F}$ und nach Definition von M damit $\sup_{z \in G} |f(z)| = M$. Die Bildmenge $f(G)$ ist damit ein einfach zusammenhängendes Gebiet, welches in $\overline{D(0, M)}$ enthalten ist. Da $f(G)$ offen ist, folgt $f(G) \subseteq D(0, M)$.

Wir zeigen nun, daß sogar $f(G) = D(0, M)$ gilt. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß es ein $w_0 \in D(0, M) \setminus f(G)$ gibt. Dann ist die Abbildung $h_1 : D(0, M) \rightarrow \mathbb{D}$ mit

$$h_1(z) := -z \cdot \frac{|w_0|}{Mw_0} \quad \text{für } z \in D(0, M)$$

injektiv und holomorph und bildet $f(G)$ auf $G_1 := h_1(f(G))$ biholomorph ab. Man hat weiter

$$h_1(f(z_0)) = h_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad h_1'(f(z_0)) = h_1'(0) = -\frac{|w_0|}{Mw_0}.$$

Mit $\alpha := |w_0|/M$ gilt $0 < \alpha < 1$ und $-\alpha = -w_0 \frac{|w_0|}{Mw_0} = h_1(w_0) \notin G_1$ wegen $w_0 \notin f(G)$. Die Funktion $h_2 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit

$$h_2(z) := \frac{z + \alpha}{1 + \alpha z} = \phi_{-\alpha}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{D}$$

ist ein Automorphismus der offenen Einheitskreisscheibe, bildet also G_1 biholomorph auf das Gebiet $G_2 := h_2(G_1)$ ab. Ferner hat man $0 = h_2(-\alpha) \notin G_2$ (wegen $-\alpha \notin G_1$) sowie

$$h_2(h_1(f(z_0))) = h_2(0) = \alpha \quad \text{und} \quad h'_2(h_1(f(z_0))) = h'_2(0) = 1 - \alpha^2 > 0.$$

G_2 ist nach Konstruktion konform äquivalent zu G . Wegen $0 \notin G_2$ gibt es (wie im Beweis zu Satz 10.11) eine injektive, auf G_2 holomorphe Funktion h_3 mit $h_3(z)^2 \equiv z$ auf G_2 . Es folgt $G_3 := h_3(G_2) \subseteq \mathbb{D}$ und

$$h_3(h_2(h_1(f(z_0)))) = h_3(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus 0$$

und

$$h'_3(h_2(h_1(f(z_0)))) = h'_3(\alpha) = \frac{1}{2h_3(\alpha)}.$$

Schließlich definieren wir noch $h_4 \in \mathcal{O}(G_3)$ durch

$$h_4(z) := \frac{2h_3(\alpha)Mw_0}{(1+\alpha)|w_0|} \cdot \frac{h_3(\alpha) - z}{1 - h_3(\alpha)z} = -\frac{2h_3(\alpha)Mw_0}{(1+\alpha)|w_0|} \cdot \phi_{h_3(\alpha)}(z),$$

wobei $\phi_{h_3(\alpha)}$ wieder ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ ist. Dann ist $f_1 := h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1 \circ f$ eine auf G holomorphe und injektive Funktion mit $f_1(z_0) = h_4(h_3(\alpha)) = 0$ und

$$\begin{aligned} f'_1(z_0) &= h'_4(h_3(\alpha))h'_3(\alpha)h'_2(0)h'_1(f(z_0))f'(z_0) \\ &= \frac{2h_3(\alpha)Mw_0}{(1+\alpha)|w_0|} \cdot \frac{-1}{1 - h_3(\alpha)^2} \cdot \frac{1}{2h_3(\alpha)} \cdot (1 - \alpha^2) \cdot \frac{-|w_0|}{Mw_0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

wegen $h_3(\alpha)^2 = \alpha$. Also ist $f_1 \in \mathcal{F}$. Aber

$$\sup_{z \in G} |f_1(z)| \leq \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} |h_4(\zeta)| = \frac{2|h_3(\alpha)|M}{1+\alpha} \cdot \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} |\phi_{h_3(\alpha)}(\zeta)| = \frac{2M\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} < M$$

wegen $0 < \alpha < 1$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition von M . Also war die Annahme $D(0, M) \setminus f(G) \neq \emptyset$ falsch. Es gilt daher $f(G) = D(0, M)$. Dann ist $f_0 := M^{-1}f$ eine konforme Abbildung von G auf $\mathbb{D}$ mit $f_0(z_0) = 0$ und $f'_0(z_0) = 1/M > 0$. Damit ist die Existenzaussage bewiesen.

Zum Beweis der Eindeutigkeitsaussage nehmen wir an, daß $f_0, f_1 : G \rightarrow \mathbb{D}$ zwei konforme Abbildungen von G auf $\mathbb{D}$ sind mit $f_j(z_0) = 0$ und $f'_j(z_0) > 0$ für $j = 0, 1$. Dann ist $h := f_1 \circ f_0^{-1}$ ein Automorphismus von $\mathbb{D}$, hat also nach Satz 2.20 die Gestalt

$$h(z) = e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}$$

mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$ und einem $a \in \mathbb{D}$. Wegen $h(0) = 0$ muß $a = 0$ gelten, so daß also $h(z) = e^{i\varphi}z$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt. Es folgt

$$e^{i\varphi} = h'(0) = \frac{f'_1(z_0)}{f'_0(z_0)} > 0.$$

Dies ist nur möglich, wenn φ ein ganzes Vielfaches von 2π ist, also $h(z) \equiv z$ auf $\mathbb{D}$ ist. Damit folgt $f_0 \equiv f_1$ auf G . $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 10.

AUFGABE 10.1. Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen holomorph und injektiv auf den angegebenen Gebieten sind:

(a)

$$f(z) = a + nz + z^n, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{C} \text{ fest ist.}$$

(b)

$$f(z) = z + \exp(z), \quad \operatorname{Re}(z) < 0.$$

(c)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{wobei } \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < |a_1|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

AUFGABE 10.2. (a) Bestimmen Sie eine konforme Abbildung zwischen den folgenden Gebieten

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > 0, |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{4} \right\} \quad \text{und} \quad S = \mathbb{D} \setminus]-1, 0]$$

(b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad \text{für } 0 \neq z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie: f bildet $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ konform auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ab.

AUFGABE 10.3. (a) Seien $\rho_1, \rho_2, r_1, r_2 > 0$ mit $\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r_2}{\rho_2}$. Zeigen Sie: Für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sind $R_{\rho_1, \rho_2}(c_1)$ und $R_{r_1, r_2}(c_2)$ konform äquivalent.

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ sind nicht konform äquivalent.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ konform äquivalent sind.

AUFGABE 10.4. Seien $0 < r < R < \infty$, und $\rho > 0$. Zeigen Sie, daß die Gebiete $R_{r,R}(0)$ und $R_{0,\rho}(0)$ nicht konform äquivalent sind.

Die Γ -Funktion

Wir definieren zunächst nach Euler (1769) für $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (11.1)$$

Wegen $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1}$ für alle $t > 0$ existiert dieses uneigentliche Integral für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$. Für $z = 1$ berechnet man $\Gamma(1) = 1$. Mit Hilfe von partieller Integration folgt die *Funktionalgleichung der Gamma-Funktion*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (11.2)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$. Mit vollständiger Induktion erhält man hieraus

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Nach Prym (1876) zerlegen wir das Integral in (11.1) in der Form

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = F_1(z) + F_2(z).$$

Hierbei ist nun

$$F_2(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert. Die Funktionen f_n mit

$$f_n(z) := \int_1^n e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

sind nach 1.10 und 1.11 auf $\mathbb{C}$ holomorph. Für alle $r > 0$ und alle $z \in \overline{D(0, r)}$ erhalten wir für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} |F_2(z) - f_n(z)| &= \left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \leq \\ &\leq \int_n^\infty e^{-t} t^{r-1} dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert also kompakt auf $\mathbb{C}$ gegen F_2 . Nach dem Satz von Weierstraß (Satz 4.4) ist F_2 daher eine ganze Funktion.

Für F_1 erhalten wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Exponentialreihe auf $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \int_0^1 \sum_{j=0}^\infty \frac{(-t)^j}{j!} t^{z-1} dt = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^1 t^{j+z-1} dt = \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{z+j}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\sup_{|z| \leq m} \left| \sum_{j=2m}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{z+j} \right| \leq \sum_{j=2m}^\infty \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{m} < \infty$$

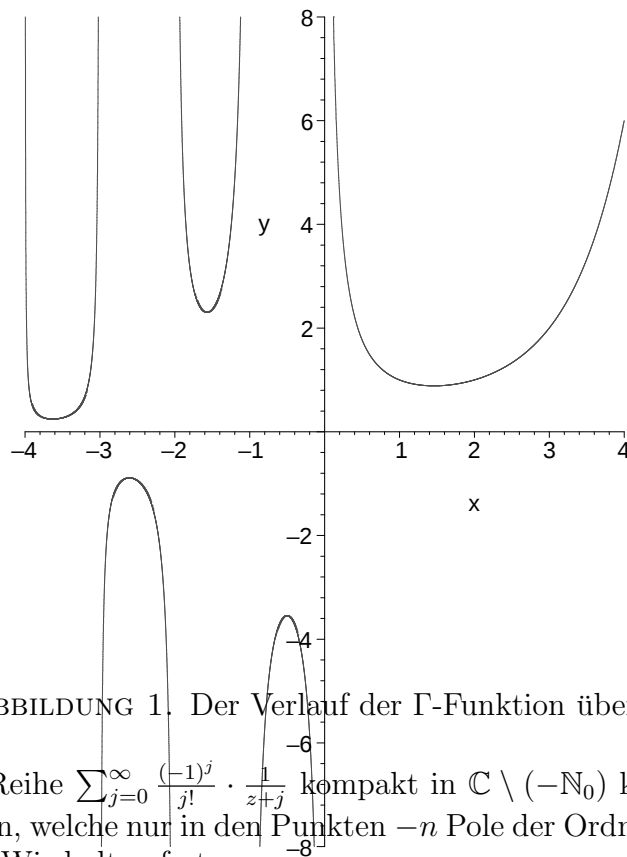


ABBILDUNG 1. Der Verlauf der Γ -Funktion über dem reellen Intervall $[-4, 4]$

ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{z+j}$ kompakt in $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ konvergent gegen eine meromorphe Funktion, welche nur in den Punkten $-n$ Pole der Ordnung 1 mit dem Residuum $(-1)^n/n!$ besitzt. Wir halten fest:

SATZ 11.1. *Durch*

$$\Gamma(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{z+j} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (11.3)$$

ist eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion Γ erklärt, welche nur in den Punkten $-n$ Pole der Ordnung 1 besitzt mit dem Residuum $(-1)^n/n!$ und für die gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

Aus dieser Darstellung der Γ -Funktion ersieht man auch, daß Γ auf der reellen Achse, außerhalb der Polstellen reelle Werte annimmt.

Da die Funktionen $z \mapsto \Gamma(z+1)$ und $z \mapsto z\Gamma(z)$ auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ übereinstimmen, gilt nach dem Identitätssatz für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ die Funktionalgleichung (11.2).

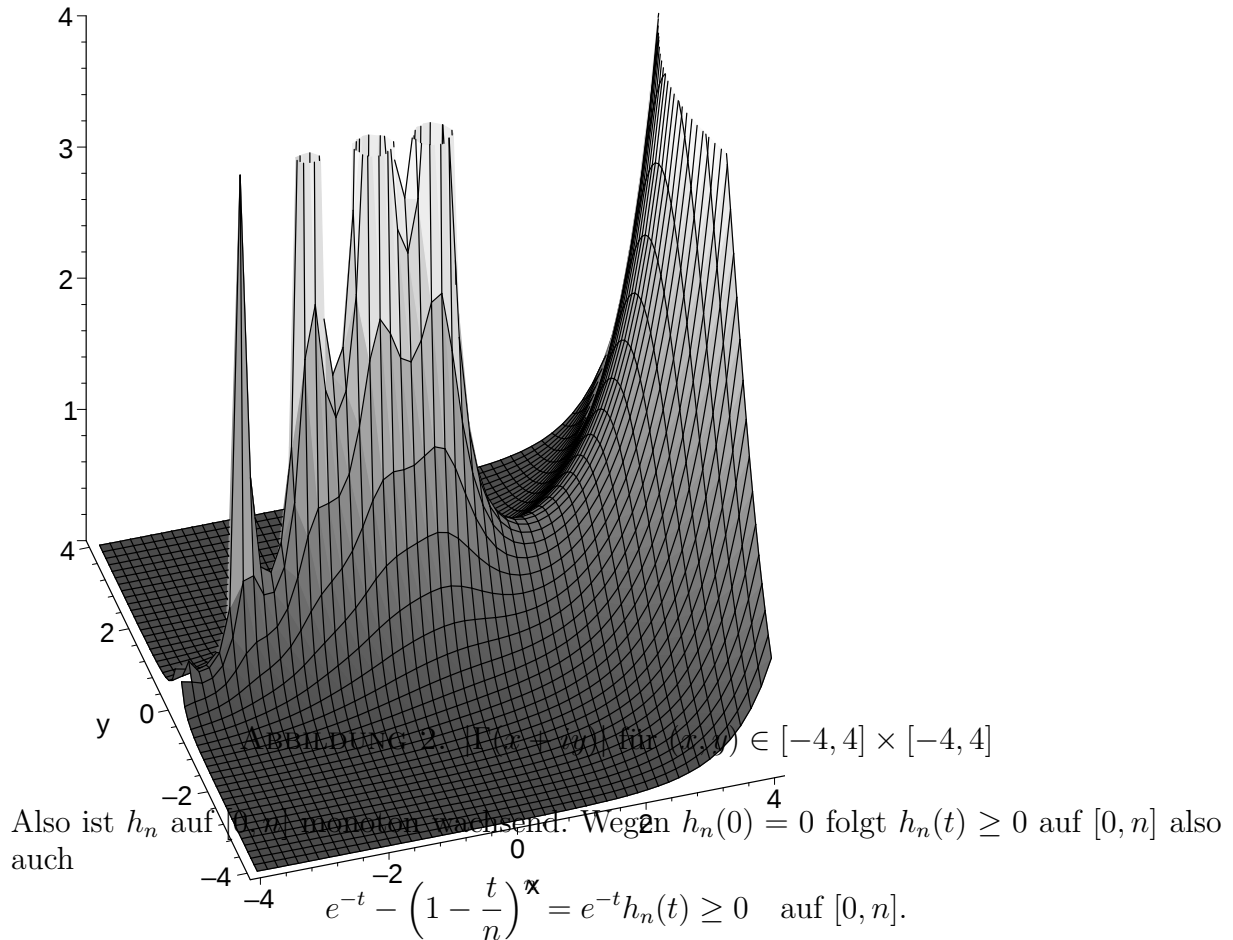
Zur Herleitung weiterer interessanter Darstellungen der Γ -Funktion benötigen wir noch einige elementare Hilfsmittel.

LEMMA 11.2. *Für alle $t \in [0, n]$ gilt*

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0.$$

BEWEIS. Mit $h_n(t) := 1 - e^t(1 - t/n)^n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t \leq n$:

$$h'_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{t}{n} \geq 0.$$



□

LEMMA 11.3 (Eulersche Konstante). *Der Grenzwert*

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log(n) \right)$$

existiert in $\mathbb{R}$. $\gamma = 0.5772156649 \dots$ heißt die Eulersche Konstante.

BEWEIS. Es ist

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log(n) = \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Wegen

$$0 < \int_j^{j+1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_j^{j+1} \frac{t-j}{jt} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j^2} dt = \frac{1}{j^2}$$

existiert der Grenzwert nach dem Majorantenkriterium.

□

SATZ 11.4. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gilt

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (\text{Gauß, 1809}) \quad (11.4)$$

$$= \frac{e^{-\gamma z}}{z \prod_{j=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-\frac{z}{j}} \right]} \quad \begin{array}{l} (\text{Weierstraß 1842}) \\ (\text{Schlömlich 1844}) \end{array} \quad (11.5)$$

BEWEIS. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{n^z}{z \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{z}{j}\right)} = \frac{n^z \prod_{j=1}^n e^{-\frac{z}{j}}}{z \prod_{j=1}^n \left[\left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-\frac{z}{j}} \right]} = \frac{\exp\left(z \left(\log(n) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right)\right)}{z \prod_{j=1}^n \left[\left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-\frac{z}{j}} \right]}$$

Wegen Lemma 11.3 konvergiert der Zähler des letzten Bruchs kompakt in $\mathbb{C}$ gegen die Funktion $z \mapsto e^{-\gamma z}$. Der Nenner dieses Bruchs konvergiert nach Satz 9.12 und den Bemerkungen 9.13 kompakt in $\mathbb{C}$ gegen eine ganze Funktion, die nur in den Punkten aus $-\mathbb{N}_0$ Nullstellen besitzt (alle von der Ordnung 1). Hieraus folgt die kompakte Konvergenz der rechten Seiten von (11.4) und (11.5) auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gegen eine meromorphe Funktion $\tilde{\Gamma}$ mit Polen nur in $-\mathbb{N}_0$. Um zu zeigen, daß $\tilde{\Gamma}$ mit der Γ -Funktion aus Satz 11.1 übereinstimmt, genügt es nach dem Identitätssatz, dies für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ nachzuweisen. Auf der rechten Halbebene können wir die Darstellung (11.1) verwenden und erhalten für $\operatorname{Re}(z) > 0$ unter Verwendung von Lemma 11.2:

$$\begin{aligned} \left| \Gamma(z) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \right| &= \left| \int_0^\infty \left(e^{-t} - \chi_{[0,n]}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{z-1} dt \right| \\ &\leq \int_0^\infty \left(e^{-t} - \chi_{[0,n]}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt. \end{aligned}$$

Da die Funktion $t \mapsto e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1}$ für $\operatorname{Re}(z) > 0$ auf $[0, \infty)$ integrierbar ist, folgt wegen

$$\left(e^{-t} - \chi_{[0,n]}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{\operatorname{Re}(z)-1} \rightarrow 0 \text{ punktweise für } t > 0 \text{ und } n \rightarrow \infty$$

nach dem Satz über die dominierte Konvergenz: Es ist für $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \quad (11.6)$$

Ferner erhält man mit der Substitution $\tau = t/n$ und n -facher partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt &= n \int_0^1 (1 - \tau)^n n^{z-1} \tau^{z-1} d\tau = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (11.6) ein, so erhalten wir die Gültigkeit von (11.4) auf der rechten Halbebene (und damit auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$). $\square$

FOLGERUNG 11.5 (Eulersche Reflexionsformel, 1771). Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (11.7)$$

BEWEIS. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ erhält man unter Verwendung der Funktionalgleichung (11.2) und von (11.5)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) = \frac{-z}{-z^2 \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j} \right) \right] \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{j}\right) e^{z/j} \right) \right]}$$

Mit der in Beispiel 9.18 angegebenen Produktdarstellung für die Sinusfunktion folgt hieraus die Behauptung. $\square$

Speziell für $z = 1/2$ erhalten wir aus (11.7)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (11.8)$$

Hiermit berechnet man mit der Variablensubstitution $t = x^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung (11.2) lassen sich hieraus weitere Werte berechnen, z.B.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (11.9)$$

Die logarithmische Ableitung der Γ -Funktion bezeichnet man meist mit Ψ und nennt sie auch die *Digammafunktion*. Wegen

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{j=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-\frac{z}{j}} \right] \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$$

erhält man nach Lemma 9.17 für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{\left(\frac{1}{\Gamma}\right)'(z)}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-\frac{1}{j}}{1 + \frac{z}{j}} + \frac{1}{j} \right) = \\ &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+z} \right) \end{aligned} \quad (11.10)$$

mit kompakter Konvergenz der Reihe. Nach Satz 4.4 (b) dürfen wir gliedweise differenzieren und erhalten

$$\Psi'(z) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right)'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+z)^2} \quad (11.11)$$

mit ebenfalls kompakter Konvergenz in $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$.

Auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ ist durch

$$F(z) := \int_{[1,z]} \frac{\Gamma'(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} d\zeta$$

eine komplexe Stammfunktion zu $\Psi = \Gamma'/\Gamma$ auf G gegeben. Nach dem Beweis zu Satz 5.16 gilt mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$

$$\forall z \in G: \quad \exp(F(z)) = c\Gamma(z).$$

Wegen $F(1) = 0$ und $\Gamma(1) = 1$ folgt $c = 1$. Wir schreiben daher für alle $z \in G$

$$\operatorname{Log}(\Gamma(z)) = F(z) = \int_{[1,z]} \frac{\Gamma'(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} d\zeta. \quad (11.12)$$

$z \mapsto \operatorname{Log}(\Gamma(z))$ ist also die Stammfunktion zu Ψ auf G , die auf $(0, \infty)$ mit $\log(\Gamma(x))$ übereinstimmt. Aus (11.11) folgt insbesondere, daß die Funktion $x \mapsto \log(\Gamma(x))$ auf $\{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ eine konvexe Funktion ist, da die zweite Ableitung dort positiv ist. Es gilt sogar

SATZ 11.6 (Bohr–Møllerup, 1922). *Ist $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine positive logarithmisch konvexe Funktion mit $f(1) = 1$ und $f(x+1) = xf(x)$ für alle $x > 0$, so gilt schon $f(x) = \Gamma(x)$ auf $(0, \infty)$.*

BEWEIS. Für konvexe Funktionen $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $0 < a < b < c$ gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq \frac{g(c) - g(a)}{c - a} \leq \frac{g(c) - g(b)}{c - b}.$$

Hieraus erhält man für $g(x) = \log(f(x))$ wegen der Konvexität von $x \mapsto \log(f(x))$ für $0 < x < 1$ (mit $a = n, b = n+1, c = n+1+x$ und $a = n+1, b = n+1+x, c = n+2$)

$$\begin{aligned} \log(f(n+1)) - \log(f(n)) &\leq \frac{1}{x} (\log(f(n+1+x)) - \log(f(n+1))) \leq \\ &\leq \log(f(n+2)) - \log(f(n+1)). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung $f(x+1) = xf(x)$ und der Anfangsbedingung $f(1) = 1$ geht diese Ungleichungskette über in

$$x \log(n) \leq \log((x+n)(x+n-1) \cdots (x+1)xf(x)) - \log(n!) \leq x \log(n+1),$$

woraus man durch einfache Umformung

$$0 \leq \log \left(\frac{(x+n)(x+n-1) \cdots (x+1)x}{n!n^x} \cdot f(x) \right) \leq x \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

erhält. Für $n \rightarrow \infty$ folgt daher mit (11.4)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+n)(x+n-1) \cdots (x+1)x} = \Gamma(x).$$

Also gilt $f(x) = \Gamma(x)$ für $0 < x \leq 1$. Da beide Funktionen die Funktionalgleichung der Γ -Funktion erfüllen, müssen sie dann auch auf ganz $(0, \infty)$ übereinstimmen. $\square$

Mit der gebräuchlichen Notation $(z)_0 \equiv 1$

$$(z)_n := \prod_{j=0}^{n-1} (z+j) = z(z+1) \cdots (z+n-1) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$

hat man $n! = (1)_n$ sowie

$$(2z)_{2n} = 2^{2n} (z)_n \left(z + \frac{1}{2}\right)_n \quad \text{und} \quad (2n)! = 2^{2n} n! \left(\frac{1}{2}\right)_n \quad (11.13)$$

Die Darstellung (11.4) der Γ -Funktion lautet in dieser Notation

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z-1} n!}{(z)_n} \cdot \frac{n}{z+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z-1} n!}{(z)_n} \quad (11.14)$$

mit kompakter Konvergenz in $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$, da $n/(z+n) \rightarrow 1$ kompakt in $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$. Mit dieser Darstellung erhalten wir nun leicht:

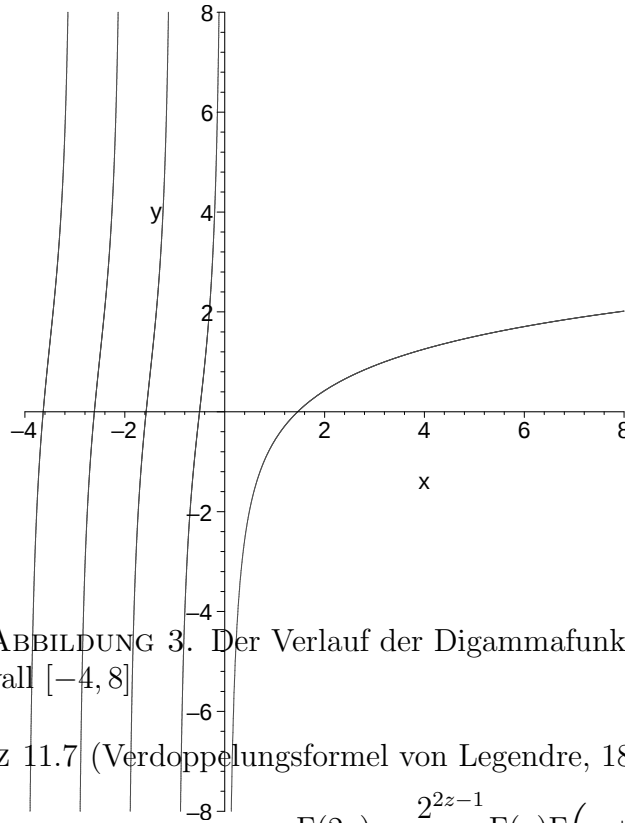


ABBILDUNG 3. Der Verlauf der Digammafunktion über dem reellen Intervall $[-4, 8]$

SATZ 11.7 (Verdoppelungsformel von Legendre, 1809). Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gilt:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

BEWEIS. Unter Verwendung von (11.13) erhält man für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$:

$$\frac{(2n)!(2n)^{2z-1}}{(2z)_{2n}} = 2^{2z-1} \frac{n! \left(\frac{1}{2}\right)_n n^{z-1} n! n^{z-1/2}}{(z)_n \left(z + \frac{1}{2}\right)_n n^{-1/2} n!}$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir hieraus nach (11.14)

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

woraus wegen (11.8) die Behauptung folgt. $\square$

Mit Hilfe der Integraldarstellung (11.1) der Γ -Funktion leiten wir nun eine Integraldarstellung von $\Psi = \Gamma'/\Gamma$ auf der rechten Halbebene her.

SATZ 11.8. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ gilt:

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt.$$

BEWEIS. Nach (11.1) gilt für alle $z \in \mathbb{H}_r := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^n e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß hierbei die Konvergenz gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}_r$ erfolgt. Nach Satz 4.4 erhalten wir also mit Hilfe von Lemma 1.10

$$\begin{aligned}\Gamma'(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^n \frac{d}{dz} (e^{-t} t^{z-1}) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^n e^{-t} \log(t) t^{z-1} dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \log(t) t^{z-1} dt.\end{aligned}$$

Wir können hierin $\log(t)$ durch ein *Frullani-Integral* (vergl. Aufgabe 11.1) ausdrücken:

$$\log(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx,$$

wobei auch $\int_0^\infty \left| \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} \right| dx$ existiert, da der Integrand in 0 stetig ergänzbar ist. Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}\Gamma'(z) &= \int_0^\infty e^{-t} \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx t^{z-1} dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-x} e^{-t} t^{z-1} - e^{-t(x+1)} t^{z-1}) dt \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty (e^{-x} \Gamma(z) - I(x, z)) \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

mit

$$I(x, z) := \int_0^\infty e^{-t(x+1)} t^{z-1} dt.$$

Mit der Variablensubstitution $u := t(x+1)$ erhalten wir

$$I(x, z) = \frac{1}{(x+1)^z} \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du = \frac{\Gamma(z)}{(x+1)^z}.$$

Setzen wir dies ein, so folgt für alle $z \in \mathbb{H}_r$

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right) \frac{dx}{x},$$

woraus sich nach Division durch $\Gamma(z)$ die erste behauptete Integraldarstellung von Ψ ergibt. Insbesondere erhalten wir für alle $z \in \mathbb{H}_r$

$$\Psi(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_\delta^\infty \frac{1}{x(x+1)^z} dx \right),$$

und hieraus vermöge der Substitution $t = \log(x+1)$ beim rechten Integral

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\log(\delta+1)}^\infty \frac{e^{-tz}}{1 - e^{-t}} dt \right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\log(\delta+1)}^\infty \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1 - e^{-t}} dt - \int_{\log(\delta+1)}^\delta \frac{e^{-t}}{t} dt \right)\end{aligned}$$

Wegen

$$0 \leq \int_{\log(\delta+1)}^\delta \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_{\log(\delta+1)}^\delta \frac{1}{\log(\delta+1)} dt = \frac{\delta}{\log(\delta+1)} - 1 \rightarrow 0$$

für $\delta \searrow 0$ folgt also für $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\Psi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1 - e^{-t}} \right) dt$$

und damit die Behauptung. $\square$

Für $0 < \alpha < \pi$ untersuchen wir nun das asymptotische Verhalten von $\Gamma(z)$ in dem Winkelbereich $S_\alpha := \{re^{i\varphi}; r > 0, |\varphi| \leq \alpha\}$.

SATZ 11.9. Für alle $\alpha \in (0, \pi)$ gilt in S_α :

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} \exp\left(\left(z - \frac{1}{2}\right)\text{Log}(z) - z\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \quad (11.15)$$

für $|z| \rightarrow \infty$. Für $x \in (0, \infty)$ gilt also

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{(x-1/2)} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad (11.16)$$

Insbesondere folgt für $n \in \mathbb{N}$ die Stirlingsche Formel

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (11.17)$$

BEWEIS. Wir beweisen die asymptotische Darstellung (11.15) zunächst in der abgeschlossenen rechten Halbebene $\overline{\mathbb{H}}_r = \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) \geq 0\}$.

Nach der zweiten Integralformel für Ψ aus Satz 11.8 folgt

$$\begin{aligned} \Psi(z+1) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^t-1}\right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-tz} dt - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-tz} dt \\ &= \text{Log}(z) + \frac{1}{2z} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-tz} dt. \end{aligned}$$

Integration längs der Strecke $[1, z]$ von 1 nach z ergibt unter Verwendung von $\text{Log}(\Gamma(2)) = \log(1!) = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Log}(\Gamma(z)) &= \text{Log}(\Gamma(z+1)) - \text{Log}(\Gamma(2)) \\ &= (\text{Log}(z) - 1)z + 1 + \frac{1}{2}\text{Log}(z) - \int_{[1,z]} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-t\zeta} dt d\zeta. \end{aligned}$$

Wegen $\text{Log}(\Gamma(z+1)) = \text{Log}(z) + \text{Log}(\Gamma(z))$ (was man leicht mit Hilfe von (11.2) verifiziert) erhalten wir mit Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach Fubini

$$\begin{aligned} \text{Log}(\Gamma(z)) &= -\text{Log}(z) + (\text{Log}(z) - 1)z + 1 + \frac{1}{2}\text{Log}(z) + \\ &\quad + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) \frac{e^{-tz} - e^{-t}}{t} dt \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right)\text{Log}(z) - z + 1 + \int_0^\infty f(t)(e^{-tz} - e^{-t}) dt, \end{aligned} \quad (11.18)$$

wobei die auf $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$ definierte Hilfsfunktion f mit

$$f(t) := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) \cdot \frac{1}{t}$$

durch die stetige Ergänzung $f(0) := 1/12$ zu einer auf $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi i; 0 \neq k \in \mathbb{Z}\}$ holomorphen Funktion wird. Man rechnet nach, daß f eine gerade Funktion ist, und zeigt induktiv, daß alle Ableitungen von f auf $[0, \infty)$ absolut integrierbar sind. Mit

$$I := \int_0^\infty f(t)e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{2}\right)e^{-t/2} dt \quad \text{und} \quad J := \int_0^\infty f(t)e^{-t/2} dt$$

hat man einerseits

$$J - I = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t} \quad (11.19)$$

und andererseits aus (11.18) (mit $z = 1/2$) unter Verwendung von (11.8)

$$J - I = \log \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log(\pi) - \frac{1}{2}. \quad (11.20)$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= (J - I) + I = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} \right) + \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{2t} \right) dt \\ &= - \left. \frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} \right|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Mit (11.20) erhalten wir also für I :

$$I = 1 - \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

Setzen wir diesen Wert von I in (11.18) ein, so folgt für $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(\Gamma(z)) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \log(z) - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \omega(z) \\ \text{mit } \omega(z) &= \int_0^\infty f(t) e^{-tz} dt. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Durch mehrfache partielle Integration folgt

$$\omega(z) = \frac{f(0)}{z} + \frac{1}{z} \int_0^\infty f'(t) e^{-tz} dt = \frac{1}{12z} + \frac{f'(0)}{z^2} + \frac{f''(0)}{z^3} + \frac{1}{z^3} \int_0^\infty f'''(t) e^{-tz} dt$$

Wegen $f'(0) = 0$ und der absoluten Integrierbarkeit von f''' auf $[0, \infty)$ folgt

$$\left| \omega(z) - \frac{1}{12z} \right| \leq \frac{1}{|z|^3} \left(|f''(0)| + \int_0^\infty |f'''(t)| dt \right) \quad (11.22)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $|z| \geq 1$. Aus Stetigkeitsgründen folgt die Gültigkeit von (11.22) für alle $z \in \overline{\mathbb{H}}_r$ mit $|z| \geq 1$. Wir wenden auf (11.21) die Exponentialfunktion an:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} \exp \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) \operatorname{Log}(z) - z \right) e^{\omega(z)}. \quad (11.23)$$

Hieraus folgt (11.15) für $0 < \alpha \leq \pi/2$, denn wegen (11.22) gilt

$$e^{\omega(z)} = 1 + \omega(z) \sum_{n=1}^\infty \frac{\omega(z)^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty \text{ in } \mathbb{H}_r. \quad (11.24)$$

(11.16) ist nun klar und (11.17) folgt aus (11.16) unter Beachtung von $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Sei nun $\pi/2 < \alpha < \pi$. Für $w \in S_\alpha$ mit $\operatorname{Re}(w) < 0$ ist $z := -w \in \mathbb{H}_r$. Mit der Eulerschen Reflexionsformel (11.5) und (11.2) erhalten wir

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin(\pi z)}$$

und hieraus mit (11.23)

$$\begin{aligned}\Gamma(w) &= \Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin(\pi z) \Gamma(z)} \\ &= \frac{-\pi}{z \sin(\pi z) \sqrt{2\pi} \exp\left(\left(z - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log}(z) - z\right) e^{\omega(z)}} \\ &= \frac{i\sqrt{2\pi} \exp\left(\left(-z - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log}(z) - z\right) e^{-\omega(z)}}{-2i \sin(\pi z)}\end{aligned}$$

Beachten wir nun noch $-2i \sin(z) = 2i \sin(w) = e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}$ und

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(-w) = \begin{cases} \operatorname{Log}(w) - i\pi & \text{falls } \operatorname{Im}(w) > 0 \\ \operatorname{Log}(w) + i\pi & \text{falls } \operatorname{Im}(w) < 0, \end{cases}$$

so erhalten wir im Fall $\operatorname{Im}(w) > 0$:

$$\Gamma(w) = \frac{\sqrt{2\pi} \exp\left(\left(w - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log}(w) + w\right) e^{-\omega(-w)}}{1 - e^{+i2\pi w}}$$

Nun gilt für $w \in S_\alpha$ mit $\operatorname{Im}(w) > 0$ und $\operatorname{Re}(w) < 0$ und alle $k > 0$:

$$|e^{i2\pi w}| = e^{-2\pi \operatorname{Im}(w)} \leq e^{-2\pi \sin(\alpha)|w|} = o(|w|^{-k}) \quad \text{für } |w| \rightarrow \infty$$

und unter Verwendung von (11.24)

$$e^{-\omega(-w)} = 1 + \frac{1}{12w} + O(|w|^{-2}) \quad \text{für } |w| \rightarrow \infty.$$

Hiermit erhält man (11.15) auch auf $\{w \in S_\alpha; \operatorname{Im}(w) > 0, \operatorname{Re}(w) < 0\}$.

Den Bereich $\{w \in S_\alpha; \operatorname{Im}(w) < 0, \operatorname{Re}(w) < 0\}$ behandelt man analog. $\square$

Zum Abschluß dieses Kapitels zeigen wir eine Anwendung der Stirlingschen Formel bei der Untersuchung des Randwachstums holomorpher Funktionen auf $\mathbb{D}$.

SATZ 11.10. Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (z \in \mathbb{D})$$

mit $|c_k| \leq C_0 k^\alpha$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, mit reellen Konstante $C_0 > 0$ und $\alpha > -1$, so gibt es eine Konstante $C \geq 0$ mit

$$|f(z)| \leq \frac{C}{(1 - |z|)^{\alpha+1}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

BEWEIS. Nach der Stirlingschen Formel gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(k + 1) k^\alpha} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\alpha + k + 1)^{\alpha + k + \frac{1}{2}} e^{-\alpha - k - 1}}{\Gamma(\alpha + 1) (k + 1)^{k + \frac{1}{2}} e^{-k - 1} k^\alpha} \\ &= \frac{e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha + k + 1}{k + 1} \right)^{k + \frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha + k + 1}{k} \right)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}\end{aligned}$$

Also gibt es eine Konstante $C_1 \geq 0$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|c_k| \leq C_1 \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(k + 1)}.$$

Daher erhalten wir für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |z|^k \leq C_0 \sum_{k=0}^{\infty} k^\alpha |z|^k \\ &\leq C_1 C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(k + 1)} |z|^k = \frac{C}{(1 - |z|)^{\alpha+1}}, \end{aligned}$$

mit $C = C_0 C_1$. □

Die Eigenschaften der Γ -Funktion und der mit ihr verwandten speziellen Funktionen sind von vielen Autoren intensiv untersucht worden (siehe z.B. [33], [29], [22], [3] und viele der im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher zur Funktionentheorie).

Übungsaufgaben zu Kapitel 11.

AUFGABE 11.1. (Frullani-Integrale)

- (a) Seien $a, b > 0$ und sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

existiert. Zeigen Sie: Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ und es gilt

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\int_\delta^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\delta a}^{\delta b} \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{für alle } \delta > 0.$$

- (b) Zeigen Sie für $t > 0$:

$$\log(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\cos(x) - \cos(tx)}{x} dx.$$

AUFGABE 11.2. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ die folgende Formel von Euler (1730) gilt:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\log\left(\frac{1}{u}\right) \right)^{z-1} du.$$

Hinweis: Verwenden Sie in (11.1) die Variablensubstitution $t = \log(1/u)$.

AUFGABE 11.3. Können Sie in Satz 11.10 auch im Fall $\alpha = -1$ etwas über das Randwachstum von f aussagen?

AUFGABE 11.4. Sei $\mathbb{H}_r := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\}$ die offene, rechte Halbebene. Die *Beta-Funktion* $B : \mathbb{H}_r \times \mathbb{H}_r \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{H}_r).$$

Zeigen Sie, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{H}_r$ gilt:

$$(a) \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Hinweis: Führen Sie in dem Doppelintegral

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{-t-s}dt\,ds$$

die Variablensubstitution $s = ur$, $t = (1-r)u$ durch.

$$(b) \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx.$$

AUFGABE 11.5. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Reflexionsformel:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi t)}}.$$

AUFGABE 11.6. Verwenden Sie Aufgabe 11.5 und die Verdoppelungsformel von Legendre zum Beweis von

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \left| \frac{\Gamma(2it)}{\Gamma(it)} \right| = \frac{1}{2\sqrt{\cosh(\pi t)}}.$$

KAPITEL 12

Die Riemannsche Zetafunktion

Für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\mathbb{H}_s := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > s\} \quad \text{und} \quad \overline{\mathbb{H}}_s := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) \geq s\}.$$

Für alle $s > 1$ und alle $Z \in \overline{\mathbb{H}}_s$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|n^{-z}| = |e^{-z \log(n)}| = e^{-\operatorname{Re}(z) \log(n)} \leq n^{-s}.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ist also die Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \tag{12.1}$$

für alle $s > 1$ gleichmäßig und absolut konvergent auf $\overline{\mathbb{H}}_s$, definiert also eine auf $\mathbb{H}_1$ holomorphe Funktion ζ . Diese nennt man die *Riemannsche Zeta-Funktion*. Für reelles $s > 1$ gilt bei $s \searrow 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{-s} ds = \int_1^{\infty} x^{-s} ds = \frac{1}{s-1} \rightarrow \infty. \tag{12.2}$$

Die Riemannsche Zeta-Funktion spielt eine wesentliche Rolle in der Zahlentheorie. Dies wird bereits durch die folgenden ersten Aussagen über ζ deutlich.

SATZ 12.1. (a) *Es gibt unendlich viele Primzahlen. Diese numerieren wir der Größe nach durch: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_4 = 5, \dots$*

(b) *Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ gilt die Produktdarstellung*

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z})$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\overline{\mathbb{H}}_s$ für alle $s > 1$.

BEWEIS. Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ ist

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-z} = \sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} n^{-z}$$

Ebenso erhält man

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z})(1 - 3^{-z}) = \sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n, 3 \nmid n}}^{\infty} n^{-z}$$

und schließlich induktiv: Sind $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \dots < p_N$ die ersten N Primzahlen und gilt

$$\zeta(z) \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-z}) = \sum_{\substack{n=1, p_k \nmid n \\ \text{für } 1 \leq k \leq N}}^{\infty} n^{-z}, \tag{12.3}$$

so kann p_N nicht die größte Primzahl sein, denn andernfalls wäre 1 die einzige natürliche Zahl mit $p_k \nmid n$ für $1 \leq k \leq N$. Dann würde aber

$$\zeta(z) \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-z}) = 1$$

folgen und hieraus

$$\lim_{s \searrow 1} \zeta(s) = \lim_{s \searrow 1} \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-s})^{-1} = \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-1})^{-1} < \infty$$

im Widerspruch zu (12.2). Also gibt es doch eine kleinste von $p_1, \dots, p_N$ verschiedene Primzahl p_{N+1} und analog wie oben erhält man mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung

$$\zeta(z) \prod_{k=1}^{N+1} (1 - p_k^{-z}) = \sum_{\substack{n=1, p_k \nmid n \\ \text{für } 1 \leq k \leq N+1}}^{\infty} n^{-z}.$$

Damit ist (a) gezeigt und die Gültigkeit von (12.3) für alle $N \in \mathbb{N}$.

Ist $s > 1$ beliebig, so erhalten wir aus (12.3) für alle $z \in \overline{\mathbb{H}}_s$

$$\begin{aligned} \left| \zeta(z) \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-z}) - 1 \right| &= \left| \sum_{\substack{n=1, p_k \nmid n \\ \text{für } 1 \leq k \leq N}}^{\infty} n^{-z} \right| \leq \sum_{n=p_{N+1}}^{\infty} |n^{-z}| \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |n^{-z}| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-s} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $N \rightarrow \infty$ und damit

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z}).$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |p_n^{-z}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} < \infty$$

für $z \in \overline{\mathbb{H}}_s$ und $s > 1$ sind die Voraussetzungen zu Satz 9.5 erfüllt und es folgt die gleichmäßige Konvergenz des Produktes auf $\overline{\mathbb{H}}_s$ für alle $s > 1$. $\square$

Es zeigt sich, daß sogar die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ divergiert. In diesem Sinne liegen die Primzahlen dichter in $\mathbb{N}$ als die Quadratzahlen.

SATZ 12.2. *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ ist divergent. Ferner gilt*

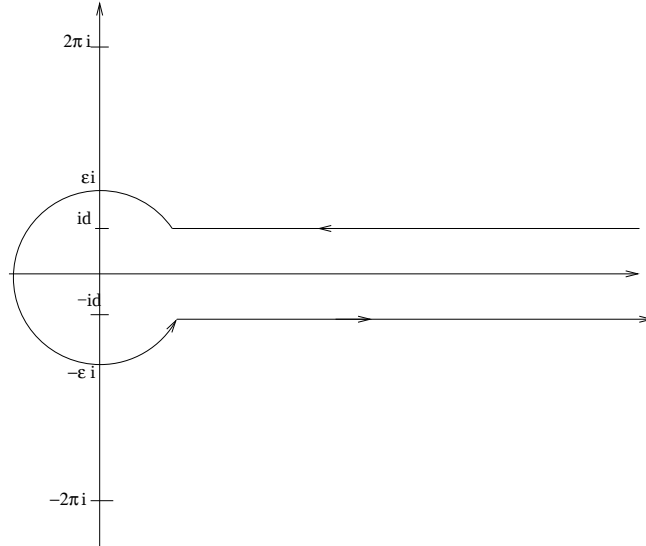
$$\forall s > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall C > 0 \quad \exists m > n : \quad p_m < C m^s. \quad (12.4)$$

BEWEIS. Wäre (12.4) verletzt, so würde die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ nach dem Majorantenkriterium konvergieren. Wir zeigen indirekt, daß dies nicht der Fall ist.

Annahme: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ konvergiert. Nach Lemma 9.7 gilt dann $\varepsilon := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-1}) > 0$. Für alle $s > 1$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt wegen $0 < 1 - p_n^{-1} < 1 - p_n^{-s} < 1$ nach Satz 12.1 auch

$$0 < \varepsilon = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-1}) \leq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s}) = \zeta(s)^{-1}.$$

Wegen $\zeta(s) \rightarrow \infty$ für $s \searrow 1$ erhalten wir einen Widerspruch. Also muß die Behauptung richtig sein. $\square$

ABBILDUNG 1. Der Verlauf des Integrationsweges $\gamma_{\varepsilon, d}$

Im folgenden Lemma stellen wir einen Zusammenhang von ζ mit der Γ -Funktion her.

LEMMA 12.3. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$ gilt

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx.$$

BEWEIS. Nach (11.1) gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Mit der Substitution $x := t/n$ erhalten wir hieraus:

$$\Gamma(z) = n^z \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} dx$$

und damit

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} dx.$$

Durch Summation über $n \in \mathbb{N}$ folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$:

$$\begin{aligned} \zeta(z)\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{z-1} dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{z-1}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx. \end{aligned}$$

□

SATZ 12.4. Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ gilt

$$\zeta(z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon, d}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw,$$

wobei $(-w)^{z-1} := \exp((z-1)\operatorname{Log}(-w))$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ und $\gamma_{\varepsilon, d}$ mit $0 < d < \varepsilon < 2\pi$ der aus Abbildung 1 ersichtliche Weg ist.

BEWEIS. Man verifiziert durch direktes nachrechnen, daß das uneigentliche Wegintegral $\int_{\gamma_{\varepsilon,d}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert, daß also durch

$$z \mapsto F(z) := \int_{\gamma_{\varepsilon,d}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion gegeben ist. Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes überlegt man sich ferner, daß der Wert des Integrals unabhängig von ε und d ist, unter der Einschränkung $0 < d < \varepsilon < 2\pi$. Für $d \rightarrow 0$ und $x > 0$ folgt

$$\lim_{d \rightarrow 0} \text{Log}(-(x \pm id)) = \log(x) \mp \pi i$$

und damit

$$\begin{aligned} F(z) &= \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,d}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw \\ &= \int_{\partial_+ D(0,\varepsilon)} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{z-1} e^{-(z-1)\pi i}}{e^x - 1} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{z-1} e^{(z-1)\pi i}}{e^x - 1} dx. \end{aligned}$$

Für $|w| = \varepsilon < 1$ ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} \right| &= \frac{\exp(\text{Re}((z-1)\text{Log}(-w)))}{|e^w - 1|} \\ &= \frac{|w|^{\text{Re}(z)-1} \exp(-\text{Im}(z)\text{Arg}(-w))}{|e^w - 1|} \leq C |w|^{\text{Re}(z)-2} \end{aligned}$$

mit einer von ε unabhängigen Konstanten $C > 0$. Ist $\text{Im}(z) > 1$ so folgt für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\left| \int_{\partial_+ D(0,\varepsilon)} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw \right| \leq 2C\pi\varepsilon^{\text{Re}(z)-1} \rightarrow 0.$$

Damit ergibt sich für $F(z)$, $z \in \mathbb{H}_1$ mit Hilfe von Lemma 12.3 und der Eulerschen Reflexionsformel (Folgerung 11.5):

$$\begin{aligned} F(z) &= 2i \sin(\pi(z-1)) \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx = -2i \sin(\pi(z-1)) \zeta(z) \Gamma(z) = \\ &= -2\pi i \frac{\zeta(z) \Gamma(z)}{\Gamma(z) \Gamma(1-z)} = -2\pi i \frac{\zeta(z)}{\Gamma(1-z)} \end{aligned} \tag{12.5}$$

Auflösung nach $\zeta(z)$ ergibt die Behauptung. □

Da, wie oben bemerkt wurde, die Funktion F auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist und die Funktion Γ eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion ist, erhalten wir:

FOLGERUNG 12.5. *Die Funktion ζ kann zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortgesetzt werden (die wieder mit ζ bezeichnet wird). Diese hat nur eine Polstelle im Punkt 1. Diese Polstelle ist von der Ordnung 1 und hat das Residuum 1.*

BEWEIS. Die Funktion F ist auf $\mathbb{C}$ holomorph, hat also keine Polstellen. ζ kann also höchstens Polstellen in den Polstellen $\{k; k \in \mathbb{N}\}$ der Funktion $z \mapsto \Gamma(1-z)$ haben. Diese haben alle die Ordnung 1 (Vergl. Satz 11.1). Da aufgrund der ursprünglichen Definition die Zeta-Funktion auf $\mathbb{H}_1$ holomorph ist, müssen die Polstellen $\{k; 2 \leq k \in \mathbb{N}\}$ durch Nullstellen von F kompensiert werden. Es bleibt also nur noch 1 als mögliche Polstelle

übrig. Für das Residuum in 1 berechnet man unter Verwendung von $\text{Res}(\Gamma, 0) = 1$ und des Residuensatzes:

$$\begin{aligned}\text{Res}(\zeta, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\zeta(z) = \lim_{z \rightarrow 1} -(z-1)\Gamma(1-z) \cdot \frac{F(1)}{2\pi i} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon, d}} \frac{1}{e^w - 1} dw = 1.\end{aligned}$$

□

Die folgende Funktionalgleichung ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Theorie der Riemannschen Zeta-Funktion.

SATZ 12.6 (Funktionalgleichung der Zeta-Funktion). *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gilt*

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z). \quad (12.6)$$

BEWEIS. Sei zunächst $0 > s \in \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < d < 1$ sei R_n das achsenparallele Rechteck mit den Eckpunkten $-n - (2n+1)\pi$, $n - (2n+1)\pi$, $n + (2n+1)\pi$, $-n + (2n+1)\pi$ und $\gamma_{n,d}$ der in Abbildung 2 skizzierte Weg. In Abwandlung des Beweises zu Satz 12.4 definieren wir

$$\begin{aligned}F_n(s) &:= \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\gamma_{n,d}} \frac{(-w)^{s-1}}{e^w - 1} dw \\ &= \int_{\partial_+ R_n} \frac{(-w)^{s-1}}{e^w - 1} dw - \int_n^\infty \frac{x^{s-1} e^{-(s-1)\pi i}}{e^x - 1} dx + \int_n^\infty \frac{x^{s-1} e^{(s-1)\pi i}}{e^x - 1} dx \\ &= \int_{\partial_+ R_n} \frac{(-w)^{s-1}}{e^w - 1} dw + 2i \int_n^\infty \frac{x^{s-1} \sin((s-1)\pi i)}{e^x - 1} dx.\end{aligned} \quad (12.7)$$

Man rechnet nach, daß $|e^w - 1| > 1/2$ für alle $w \in \partial R_n$ und damit

$$\left| \frac{(-w)^{s-1}}{e^w - 1} \right| \leq C n^{s-1}$$

mit einer positiven Konstante C gilt. Das erste Integral der letzten Zeile von (12.7) ist also von der Größenordnung $O(n^s)$ da der Integrationsweg von der Länge $(8\pi + 4)n$ ist. Auch für das zweite Integral gilt man:

$$\left| 2i \int_n^\infty \frac{x^{s-1} \sin((s-1)\pi i)}{e^x - 1} dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Es folgt also $F_n(s) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Die Funktion $w \mapsto \frac{(-w)^{s-1}}{e^w - 1}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ meromorph mit Polstellen nur in $\pm 2\pi i \mathbb{N}$, die alle von erster Ordnung und deren Residuen sich wie folgt berechnen:

$$\text{Res}\left(\frac{(-w)^{s-1}}{e^w - 1}, \pm 2k\pi i\right) = (2\pi k)^{s-1} e^{(s-1)\text{Log}(\pm i)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\begin{aligned}F_n(s) - F(s) &= (2\pi)^{s-1} (e^{(s-1)\pi/2} + e^{-(s-1)\pi/2}) \sum_{k=1}^n k^{s-1} \\ &= 2(2\pi)^{s-1} \cos((s-1)\pi/2) \sum_{k=1}^n k^{s-1} \\ &= 2^s \pi^{s-1} \sin(s\pi/2) \sum_{k=1}^n k^{s-1}\end{aligned}$$

Wegen $F_n(s) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir für $n \rightarrow \infty$:

$$-F(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(s\pi/2) \zeta(1-s)$$

Einsetzen von (12.5) und Auflösen nach $\zeta(s)$ liefert die Behauptung für alle negativen reellen Zahlen s . Da beide Seiten von (12.6) meromorph auf $\mathbb{C}$ sind folgt die Behauptung für alle z . $\square$

Die in 0 holomorph durch 1 ergänzte Funktion

$$z \mapsto h(z) := z \frac{e^z + 1}{2(e^z - 1)} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$$

ist gerade und hat daher eine Potenzreihendarstellung der Form

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Bei den Zahlen B_{2n} handelt es sich um die Bernoullischen Zahlen. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= (-1)^n \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,d}} w^{-n-2} \left(h(w) - \frac{w}{2} \right) dw \\ &= (-1)^n \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,d}} w^{-n-2} \left(1 - \frac{w}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} w^{2n} \right) dw. \end{aligned}$$

Mit dem Residuensatz folgt $\zeta(-2k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\zeta(0) = -1/2$ sowie

$$\zeta(-2k+1) = (-1)^k \frac{B_{2k}}{2k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere sind alle diese Werte rationale Zahlen.

Wegen Satz 12.1 kann ζ keine Nullstellen in $\mathbb{H}_1$ besitzen. Hieraus folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung der Zeta-Funktion, daß alle von den *trivialen* Nullstellen $-2k$ (mit $k \in \mathbb{N}$) verschiedenen Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion in dem *kritischen Streifen* $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ liegen. Die bis heute weder bewiesene noch widerlegte *Riemannsche Vermutung* besagt, daß sie sogar alle auf der *kritischen Linie* $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) = 1/2\}$ liegen. Zur Theorie und Geschichte der Riemannschen Zeta-Funktion siehe [14, 40]. Auch einige der im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher zur Funktionentheorie haben zum Teil umfangreiche Abschnitte über die Riemannsche Zeta-Funktion. Zur Theorie analytischer Funktionen in der Zahlentheorie verweisen wir insbesondere auch auf [27].

Literaturverzeichnis

- [1] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*. 3rd edition, McGraw-Hill, 1979.
- [2] É. AMAR ET É. MATHERON, *Analyse complexe*, Cassini, Paris 2004.
- [3] G. E. ANDREWS, R. ASKEY, AND R. ROY, *Special Functions*. Cambridge University Press, 1999.
- [4] TOM M. APOSTOL, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley Publ. Comp. 1957.
- [5] H. BEHNKE UND F. SOMMER, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Nachdruck der 3. Auflage, Springer, 1979.
- [6] C. A. BERENSTEIN AND R. GAY, *Complex Analysis: An Introduction*, Springer, 1991.
- [7] C. A. BERENSTEIN AND R. GAY, *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*, Springer, 1995.
- [8] R. P. BOAS, *Entire Functionss*, Academic Press, 1954.
- [9] R. P. BOAS, *Invitation to Complex Analysis*, Random House, 1987.
- [10] R. B. BURCKEL, *An Introduction to Classical Complex Analysis, Vol. I*. Birkhäuser, 1979.
- [11] H. CARTAN, *Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrer komplexer Veränderlichen*. Bibliographisches Institut, 1966.
- [12] J. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*. Springer, 1973.
- [13] J. CONWAY, *Functions of One Complex Variable, II*. Springer, 1995.
- [14] H. M. EDWARDS, *Riemann's Zeta function*, Academic Press, 1974.
- [15] W. FISCHER UND I. LIEB, *Funktionentheorie*, achte Auflage, Vieweg, 2003.
- [16] W. FISCHER UND I. LIEB, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*. Vieweg, 1988.
- [17] O. FORSTER, *Riemannsche Flächen*. Springer, 1977.
- [18] E. FREITAG UND R. BUSAM, *Funktionentheorie*. Springer, 1995.
- [19] T. W. GAMELIN, *Complex Analysis*. Springer, 2001.
- [20] J. B. GARNETT, *Bounded Analytic Functions*. Academic Press, 1981.
- [21] D. GAŞPAR ŞI N. SUCIU, *Funcţii de variabilă complexă*, Editura Mirton, Timişoară 1995.
- [22] P. HENRICI, *Applied and Computational Complex Analysis*, 3 Bände. Wiley, 1974.
- [23] L. HÖRMANDER, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 2. Auflage. North Holland, 1973.
- [24] K. JÄNICH, *Einführung in die Funktionentheorie*. Springer, 1980.
- [25] W. KABALLO, *Einführung in die Analysis II.*. Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [26] K. KODAIRA, *Introduction to Complex Analysis*. Cambridge University Press, 1984.
- [27] E. KRÄTZEL *Analytische Funktionen in der Zahlentheorie*, Teubner-Texte zur Mathematik Band **139**, Teubner, 2000.
- [28] S. G. KRANTZ, *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*. Second edition. The Mathematical Association of America, 2004.
- [29] N. N. LEBEDEV, *Special Functions and their Applications*. Dover Publications, 1972.
- [30] N. LEVINSON AND R. REDHEFFER, *Complex Variables*. Dover Publications, 1972.
- [31] R. NARASIMHAN AND Y. NIEVERGELT, *Complex Analysis in One Variable*. Birkhäuser-Verlag, 2001.
- [32] Z. NEHARI, *Conformal Mappings*. McGraw-Hill, 1952.
- [33] N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Teubner-Verlag, 1906 Nachdruck bei Chelsea 1965.
- [34] E. PESCHL, *Funktionentheorie 1*. Bibliographisches Institut, 1967.
- [35] Q.L. RAHMAN AND G. SCHMEISSER *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 2002.
- [36] R. REMMERT, *Funktionentheorie I, II*, Springer, 1984, 1991.
- [37] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*. 3rd edition, McGraw-Hill, 1987.
- [38] E.M. STEIN AND R. SHARKARCHI, *Complex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 2003.
- [39] E. C. TITCHMARCH, *The Theory of Functions* (2nd ed.) , Oxford University Press, 1939.
- [40] E. C. TITCHMARCH, *The Theory of the Riemann Zeta-Function* (2nd ed.) , Oxford at the Clarendon Press, 1951.

- [41] C. WAGSCHAL, *Fonctions holomorphes, équations différentielles*, Hermann, Paris 2003.

Index

- Abbildung
 - biholomorphe, 110
 - konforme, 110
 - lokalkonforme, 109
- Argument, 24, 109
 - Hauptzweig, 58
- Argumentprinzip, 76
- Arzelà–Ascoli
 - Satz von, 49
- Ausschöpfung
 - kompakte, 44
- Automorphismus, 32

- Beta–Funktion, 126
- biholomorph, 63, 110
- biholomorph äquivalent, 63
- Bohr–Møllerup
 - Satz von, 120

- Casorati–Weierstrass
 - Satz von, 68
- Cauchy
 - Integralformel, 27, 59
 - Integralsatz, 22, 60, 61
 - verallgemeinerte Integralformel, 27, 60
- Cauchy–Hadamard
 - Satz von, 45
- Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen, 12
- Cauchy–Stokes
 - Integralformel von Pompeiu, 23
- chordale Metrik, 5

- Digammafunktion, 119

- einfach zusammenhängend, 61
- Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$, 4
- Elementarfaktoren, 100
- Eneström–Kakeya
 - Satz von, 78
- Entwicklungspunkt
 - einer Laurentreihe, 64
- Entwicklungspunkt
 - einer Potenzreihe, 45
- Eulersche Konstante, 117
- Eulersche Reflexionsformel, 119

- Frullani–Integral, 122, 126

- Fundamentalsatz der Algebra, 28, 77
- Funktion
 - Γ , 115
 - ζ , 128
 - Beta–, 126
 - ganze, 28
 - harmonische, 25
 - holomorphe, 11
 - in ∞ holomorphe, 68
 - komplex analytische, 46
 - meromorphe, 88
- Funktionalgleichung
 - der Gamma–Funktion, 115, 116
 - der Riemannschen Zeta–Funktion, 132

- Gamma–Funktion, 115
 - Eulersche Reflexionsformel, 119
 - Funktionalgleichung, 115, 116
 - Stirlingsche Formel, 123
 - Verdoppelungsformel von Legendre, 121
- ganze Funktion, 28
- Gebiet, 5
- Gerschgorin
 - Kreisesatz von, 79
- Goursat
 - Satz von, 41
- Green
 - komplexe Fassung des Satzes von, 21
 - Satz von, 20, 21
- Greenscher Bereich, 21
- Greenscher Elementarbereich, 19

- harmonisch, 25
- Hauptteil, 89
- Hauptteil einer Laurentreihe, 64
- Hauptverteilung, 89
 - lösbare, 89
- Hauptzweig
 - der Logarithmusfunktion, 57
 - des Arguments, 58
- hebbare Singularität, 29, 67
- holomorph in ∞ , 68
- holomorphe Funktion, 11
- homolog, 61
- homotop, 62
- Homotopie, 62

- Identitätssatz, 47, 49
- imaginäre Achse, 3
- imaginäre Einheit, 3
- Imaginärteil, 3
- Integralformel
 - Cauchy–Stokes-Integralformel von Pompeiu, 23
 - von Cauchy, 27, 59
 - verallgemeinerte, 27, 60
- Integralsatz von Cauchy, 22, 60, 61
- Intervall, 6
- isolierte Singularität, 29, 67
 - hebbare, 29, 67
 - Polstelle, 67
 - wesentliche, 67
- Kette, 15
- Kette von stückweise stetig differenzierbaren Wegen, 15
- kompakte Ausschöpfung, 44
- kompakte Konvergenz, 43
- komplex analytisch, 46
- komplex differenzierbar, 12
- komplexe Ableitung, 12
- komplexe Stammfunktion, 28
- komplexe Zahlen, 3
- konform äquivalent, 110
- konform in einem Punkt, 109
- konforme Abbildung, 110
- konvergenzerzeugende Summanden, 90
- Konvergenzradius einer Potenzreihe, 45, 46
- Konvergenzring einer Laurentreihe, 64
- Kreisesatz von Gerschgorin, 79
- Laurent
 - Satz von, 65
- Laurentreihe, 64
 - Entwicklungspunkt, 64
 - Hauptteil, 64
 - Konvergenzring, 64
 - Nebenteil, 64
- Legendre
 - Verdoppelungsformel, 121
- Lemma
 - von Schwarz, 32
 - invariante Form, 33
- Liouville
 - Satz von, 28
- logarithmische Ableitung von, 103
- Logarithmus
 - Hauptzweig, 57
- lokal konforme Abbildung, 109
- Maximumprinzip
 - globale Form, 31
 - lokale Form, 30
- meromorphe Funktion, 88
- Metrik, 3
 - chordale, 5
 - metrischer Raum, 3
- Mittag–Leffler
 - Satz von, 89
- Mittelwerteigenschaft, 30
- Montel
 - Satz von, 50
- Morera
 - Satz von, 40
- Nebenteil einer Laurentreihe, 64
- Normgebiet, 111
- nullhomolog, 61
- Nullstellenverteilung, 99
- Ordnung
 - einer Nullstelle, 48
 - einer Polstelle, 67
- Polstelle, 67
 - Ordnung, 67
- Polygonzug, 6
- polygonzugzusammenhängend, 6
- Pompeiu
 - Cauchy–Stokes-Integralformel von, 23
- Pompeiu–Wirtinger–Ableitungen, 10
- positiv orientierter Rand, 20
- Potenzreihe, 45
 - Entwicklungspunkt, 45
 - Konvergenzradius, 45, 46
- pseudo–hyperbolische Metrik, 36
- Rand
 - positiv orientierter, 20
- Realteil, 3
- reelle Achse, 3
- Residuensatz, 69, 70
- Residuum, 69
- Riemann
 - Abbildungssatz, 112
 - Hebbarkeitssatz, 29
- Riemannsche Vermutung, 133
- Riemannsche Zahlenkugel, 5
- Riemannsche Zeta–Funktion, 128
 - Funktionalgleichung, 132
- Rouché
 - Satz von, 76
- Runge
 - Approximationssatz von, 86, 87
- Satz
 - Argumentprinzip, 76
 - Fundamentalsatz der Algebra, 28, 77
 - Identitätssatz, 47
 - Kreisesatz von Gerschgorin, 79
 - Maximumprinzip
 - globale Form, 31
 - lokale Form, 30
 - Produktsatz von Weierstraß, 102, 104
 - Residuensatz, 69, 70
 - Riemannscher Abbildungssatz, 112

- Riemannscher Hebbbarkeitssatz, 29
- von Eneström–Kakeya, 78
- von Arzelà–Ascoli, 49
- von Bohr–Mollerup, 120
- von Casorati und Weierstras, 68
- von Cauchy–Hadamard, 45
- von der Gebietstreue, 107
- von der Isoliertheit der a -Stellen, 49
- von der offenen Abbildung, 107
- von Goursat, 41
- von Green, 20, 21
 - komplexe Fassung, 21
- von Laurent, 65
- von Liouville, 28
- von Mittag–Leffler, 89
- von Montel, 50
- von Morera, 40
- von Rouché, 76
- von Runge
 - polynomiale Approximation, 87
 - rationale Approximation, 86
- von Schwarz–Pick, 33
- von Weierstraß, 44
- Schwarzsches Lemma, 32
- Schwarzsches Spiegelungsprinzip, 42
- Singularität
 - hebbare, 29, 67
 - isolierte, 67
 - Polstelle, 67
 - wesentliche, 67
- Spiegelungsprinzip von Schwarz, 42
- Spur eines Weges, 16
- Stammfunktion
 - komplexe, 28, 38
 - lokale Existenz, 39
- stereographische Projektion, 4, 8
- Stirlingsche Formel, 123
- Taylorreihe, 46
- Umlaufzahl, 53
- unendliches Produkt, 96
 - Divergenz, 96
 - kompakte Konvergenz, 97
 - Konvergenz, 96
- verallgemeinerte Cauchysche Integralformel, 27
- verbindbar (durch Polygonzüge), 6
- Verdoppelungsformel von Legendre, 121
- Vielfachheit einer Nullstelle, 48
- Weg
 - geschlossener, 38
 - stückweise stetig differenzierbarer, 14
 - stetig differenzierbarer, 14
- Wegintegral, 14
- wegzusammenhängend, 5
- Weierstraß
 - $\wp$ -Funktion, 94
- Produktsatz von, 102, 104
 - Satz von, 44
- wesentliche Singularität, 67
- Windungszahl, 53, 56
- Wirtinger–Ableitungen, 10
- Zeta-Funktion, 128
 - Funktionalgleichung, 132
- zusammenhängend, 5
- Zusammenhangskomponente, 7