Proseminar Analysis SS 2007

Historischer Überblick zur Entstehung der Theorie der Fourierreihen

Ernst Albrecht

Ausgangsproblem

Gegeben sei eine homogen mit Masse belegte und vorgespannte Saite, die in Ruhelage das Intervall $[0, b]$ der x–Achse einnehme. Wir betrachten kleine transversale Schwingungen um die Ruhelage. Es bezeichne $u(t, x)$ die senkrecht zur x–Achse gemessene Auslenkung von der Ruhelage $(x, 0)$ zur Zeit t. Für die Funktion u erhält man (bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung) die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0\,, \tag{1}$$

wobei $c^2 = \mu/\rho$ und
μ die als bezüglich x und t konstant vorausgesetzte Spannung,
ρ die als bezüglich x und t konstant vorausgesetzte Massendichte sei.
Die Saite sei an ihren Endpunkten befestigt, d.h. es gelte:

$$u(0,t) = 0 = u(b,t) \qquad \text{für alle } t \geq 0. \tag{2}$$

Gesucht ist nach allen Lösungen von (1) und (2) mit

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \tag{3}$$

bei vorgegebenen Funktionen φ, ψ.

Trennung der Veränderlichen

Zur Lösung führen wir Trennung der Veränderlichen durch, d.h. wir suchen zunächst nach Lösungen der Differentialgleichung (1), die von der Form

$$u(x,t) = f(x)g(t) \qquad \text{für alle} \quad x \in [0,b], t \geq 0 \tag{4}$$

sind mit zweimal differenzierbaren Funktionen $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Wenn es solche Lösungen gibt, so muß gelten

$$f(x)g''(t) - c^2 f''(x)g(t) = 0 \text{für alle} \quad x \in [0,b], t \geq 0$$

und daher

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} \tag{5}$$

für alle $x \in [0,b], t \geq 0$ mit $f(x) \neq 0, g(t) \neq 0$. Da die linke Seite von (5) unabhängig von x und die rechte Seite unabhängig von der

Zeit t ist, müssen beide Seiten von (5) konstant sein. Es gibt also eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda = -f''(x)/f(x))$, mit

$$\begin{aligned} g''(t) + \lambda c^2 g(t) &= 0 \qquad \text{für} \quad t \geq 0, \\ f''(x) + \lambda f(x) &= 0 \qquad \text{für} \quad x \in [0,b]\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Sind umgekehrt f, g Lösungen der Differentialgleichungen (6), so ist die Funktion

$$u : [0,b] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad (x,t) \mapsto f(x)g(t)$$

eine Lösung von (1). Die einschränkenden Bedingungen (2) und (3) sind hierbei noch nicht berücksichtigt. Um (2) zu erfüllen fordern wir daher

$$f(0) = 0 = f(b). \tag{7}$$

Die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung in (6) ist gegeben durch

$$f(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

Die Randbedingung in (7) ist also genau dann erfüllt, wenn $\alpha = 0$ gilt und wenn λ von der Form

$$0 \leq \lambda = \lambda_n := \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Lösung der ersten Gleichung in (6) liefert nun

$$g(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

mit Konstanten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $\omega_n := \frac{cn\pi}{b}$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind dann die Funktionen

$$u_n(x,t) = (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right)$$

Lösungen von (1) und (2). Offensichtlich sind auch endliche Summen (Superpositionen)

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right)$$

von Funktionen dieser Art wieder Lösungen von (1) und (2). Bei "*hinreichend guter*" Wahl der Koeffizienten a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}_0$ ist auch die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \tag{8}$$

konvergent und zweimal gliedweise differenzierbar und somit ebenfalls Lösung von (1) und (2). Wenn u auch (3) erfüllen soll, so muß gelten:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \qquad (0 \le x \le b). \end{aligned} \tag{9}$$

Geschichte der Fourierreihen

(i) Die in den vergangenen beiden Abschnitten dargestellten Fragestellungen und Ergebnisse war ungefähr 1740 der Ausgangspunkt der Überlegungen von **Daniel Bernoulli** (1700–1787). Er äußerte die Vermutung: Jede Lösung der Gleichungen (1), (2), (3) hat eine Darstellung der Form (8). Dies führte zu heftigen kontroversen Diskussionen unter Beteiligung von **Leonhard Euler** (15.4.1707–18.9.1783), **Jean Le Rond d'Alembert** (1717–1783) und **Joseph-Louis Lagrange** (1736–1813). Allgemeiner kann man fragen (und tat es auch): Welche 2π–periodischen Funktionen f sind darstellbar in der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\,? \tag{10}$$

(ii) 1822 führte **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768–1830) in seinem Werk *Théorie analytique de la chaleur* die bekannte Koeffizientenbestimmung aus:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n \in \mathbb{N})\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Er behauptete (mit einem falschen Beweis), daß sich *alle Funktionen* in der Form (10) darstellen lassen, wobei die Koeffizienten a_n, b_n gemäß (11) zu berechnen sind.

(iii) Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) zeigte 1829:

Für alle stückweise glatten 2π–periodischen Funktionen f gilt (10) mit (11) für solche x, in denen f stetig ist.

In den Sprungstellen konvergiert die Reihe gegen den Mittelwert der einseitigen Grenzwerte der Funktion.

(iv) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) stellte sich 1854 in seiner Habilitationsschrift die Frage: Was kann man über Funktionen aussagen, die durch ihre Fourierreihe dargestellt werden? Zu diesem Zweck präzisierte er den Integralbegriff und führte das Riemannintegral ein. Insbesondere zeigte er für Riemann–integrierbare 2π–periodische Funktionen f:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \to 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \to 0$$

für $n \to \infty$.

(v) Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) stellte die Frage nach der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung und zeigte: Gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi] \tag{12}$$

mit punktweiser Konvergenz, so ist schon $a_n = 0$, $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. für alle $n \in \mathbb{N}$. Er fragte: Muß man (12) für *alle* $x \in [-\pi, \pi]$ fordern, um die Eindeutigkeitsaussage zu erhalten?

Er stellte zunächst fest, daß endliche Ausnahmemengen hierbei kein Problem darstellen und gab 1872 auch Beispiele für unendliche Ausnahmemengen an.

In diesem Rahmen gab Cantor auch eine Präzisierung des Aufbaus der reellen Zahlen (als Vervollständigung der rationalen Zahlen, Vorgänger in diesem Bereich sind **Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano** (1781–1848) und **Karl Theodor Wilhelm Weierstraß** (1815–1897), die ihre Überlegungen nicht publizierten, sowie **Hugues Charles Robert Méray** (1835–1911) gegen 1869. **Julius Wilhelm Richard Dedekind** (1831–1916) führte ebenfalls 1872 die reellen Zahlen mit Hilfe der Dedekindschen Schnitte ein).

Auch Cantors Einführung der Mengenlehre und der transfiniten Ordinalzahlen entstanden im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen.

Eine vollständige Charakterisierung der Ausnahmemengen für das Eindeutigkeitsproblem steht noch immer aus.

(vi) Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831–1889) zeigte 1876:

Es gibt stetige Funktionen, für die die Fourierreihe in einigen Punkten divergiert.

Ferner:

Es gibt Fourierreihen, die überall punktweise konvergieren aber *nicht* Fourierreihe einer absolutintegrierbaren Funktion sind.

(vii) Karl Weierstraß bewies 1885, daß sich jede 2π–periodische stetige Funktion gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren läßt, die wegen der Resultate von du Bois-Reymond nicht die endlichen Partialsummen der zugehörigen Fourierreihe sein können.

(viii) Der 1903 von **Henri Léon Lebesgue** (1875–1941) erweiterte Integralbegriff war insbesondere auch für die Theorie der Fourierreihen von besonderer Bedeutung.

(ix) Die Frage nach der Rekonstruierbarkeit einer stetigen Funktion aus ihren Fourierkoeffizienten war natürlich auch nach dem Approximationssatz von Weierstraß noch immer offen. Sie wurde 1900 gelöst von **Lipót Fejér** (1880–1959). Bezeichnet $s_n(f,x)$ die n–te Partialsumme der Fourierreihe einer 2π-periodischen stetigen Funktion f in $x \in \mathbb{R}$ und schreiben wir

$$\sigma_n(f,x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(f,x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}),$$

so gilt

$$\sigma_n(f,x) \to f(x) \qquad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R} \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Fejér erhielt auch Aussagen für gewisse unstetige Funktionen.

(x) Für stetige 2π–periodische Funktionen f wurde im Lauf der Zeit weiter gezeigt:

$$s_n(f,x) \to f(x) \qquad \text{punktweise auf } \mathbb{R} \setminus E \text{ für } n \to \infty$$

für eine Lebesgue–Nullmenge E.

Ist umgekehrt E eine Lebesgue–Nullmenge, so gibt es eine stetige 2π–periodische Funktion f, so daß die zugehörige Fourierreihe in allen Punkten aus E divergent ist.

(xi) Für L^1–Funktionen ist das Verhalten der Fourierreihen dramatisch schlechter:

Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) zeigte 1923/1926:

Es gibt Funktionen $f \in L^1([-\pi, \pi])$, für die die zugehörige Fourierreihe in Lebesgue–fast allen/sogar in allen Punkten divergiert.

(xii) Nikolai Nikolaevich Luzin (1883–1950) vermutete 1913:

Für jede 2π–periodische L^2–Funktion f konvergiert die zugehörige Fourierreihe punktweise außerhalb einer Menge vom Lebesguemass 0.

Erst 1966 konnte diese Vermutung von **Lennart Axel Edvard Carleson** (1928 -), der 2006 mit dem Abelpreis ausgezeichnet wurde, bewiesen werden.

1968 erschien eine Arbeit von **Richard A. Hunt**, in der dieser das Resultat von Carleson für alle L^p–Funktionen ($p > 1$) zeigte.

(xiii) Formales gliedweises Differenzieren und ähnliche (insbesondere von Anwendern schon lange verwendete) Manipulationen fanden eine Rechtfertigung im Rahmen der Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen), die in den 40er und 50er Jahren insbesondere von **Sergei Lvovich Sobolev** (1908–1989) und **Laurent Schwartz** (1915–2002) entwickelt wurde.

Fourierreihen sind von großer praktischer Bedeutung in weiten Bereichen der Physik und der Ingenieurwissenschaften. Schnelle numerische Methoden kommen seit 1942 zum Einsatz.