UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1. Wir betrachten in $\mathbb{R}$ das folgende Mengensystem

$$\mathcal{T} := \{(-\infty, \alpha)\,;\, \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\} \cup \{\emptyset\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.
(b) Beschreiben Sie die abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
(c) Berechnen Sie die Menge der Berührungspunkte und den topologischen Rand von $\{2007\}$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
(d) Berechnen Sie das Innere und die Abschließung von $(-2007, \infty)$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Lösung: (a) Nach Definition ist $\emptyset, \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \in \mathcal{T}$. Der Durchschnitt von endlich vielen Mengen $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{T}$ ist entweder leer (dies genau dann, wenn eine der beteiligten Mengen schon leer ist) oder die Mengen sind von der Gestalt $G_j = (-\infty, \alpha_j)$ mit $-\infty < \alpha_j \leq \infty$ für $j = 1, \ldots, n$ und es ist $G_1 \cap \cdots \cap G_n = (-\infty, \alpha) \in \mathcal{T}$ mit $\alpha := \min_{1 \leq j \leq n} \alpha_j$. Für eine beliebige Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Mengen aus $\mathcal{T}$ (mit $G_i = (-\infty, \alpha_i)$ falls $G_i \neq \emptyset$, $i \in I$) erhält man $\bigcup_{i \in I} G_i = (-\infty, \alpha) \in \mathcal{T}$ mit $\alpha := \sup_{i \in I}$ falls wenigstens eine der beteiligten Mengen nicht leer ist und $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset$, falls $G_i = \emptyset \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$. Also sind die Bedingungen (O1) - (O3) aus Definition 1.6 der Vorlesung erfüllt und $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(b) Da die abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ gerade die Komplemente der Mengen aus $\mathcal{T}$ sind, erhält man für die Familie $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ der abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$:

$$\mathcal{A}_\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[\alpha, \infty)\,;\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

(c) Ist $x \geq 2007$ so enthält nach Definition der Umgebung jede Umgebung U von x in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ eine offene Menge $G = (-\infty, \alpha)$ mit $2007 \leq x \in G = (-\infty, \alpha) \subseteq U$. Insbesondere folgt $2007 \in U$. Ist $x < 2007$, so ist $U := (-\infty, 2007)$ eine offene Umgebung von x mit $U \cap \{2007\} = \emptyset$. Also ist $\overline{\{2007\}} = [2007, \infty)$ die Menge aller Berührungspunkte von $\{2007\}$. Der Beweis zeigt zugleich, daß jede Umgebung eines Berührungspunktes von $\{2007\}$ auch Punkte des Komplements von $\underline{\{2007\}}$ enthält und somit auch Berührungspunkt zu $\mathbb{R} \setminus \{2007\}$ ist. Also gilt $\partial\{2007\} = \overline{\{2007\}} = [2007, \infty)$.

(d) Die Abschließung (also die Menge aller Berührungspunkte) von $\{2007\}$ wurde in (c) berechnet. Da $\{x\}$ keine Intervalle der Form $(-\infty, \alpha)$ mit $-\infty < \alpha \leq \infty$, also keine nicht leeren, in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ offene Teilmengen enthält, ist $\operatorname{int}\{2007\} = \emptyset$. □

Aufgabe 2. Geben Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X := \{1, 2\}$ an.

Lösung: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\{1, 2\})$ hat die Elemente $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$. Jede Topologie auf $\{1, 2\}$ muß wegen (O1) mindestens die Elemente $\emptyset, \{1, 2\}$ enthalten. Damit bleiben als mögliche Topologien auf $\{1, 2\}$ nur

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= \{\emptyset, \{1, 2\}\} && \text{(Indiskrete Topologie)} \\
\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\} && \\
\mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\} && \text{und} \\
\mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} && \text{(Diskrete Topologie)}\,.
\end{aligned}$$

Direktes Nachrechnen zeigt, daß auch $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf $\{1, 2\}$ sind. □

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) M ist offen in $(X, \mathcal{T})$ genau dann, wenn $M \cap \partial M = \emptyset$.
(b) $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Lösung: (a) Nach Definition der Vorlesung ist $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$. Ist M offen und ist $x \in M$, so ist M eine Umgebung von x die mit $X \setminus M$ keine gemeinsamen Punkte hat. Also ist $M \cap \partial M = \emptyset$.

Ist umgekehrt $M \cap \partial M = \emptyset$ und ist $x \in M$, so ist x kein Berührungspunkt von $X \setminus M$, besitzt also eine Umgebung U_x mit $U_x \cap (X \setminus M) = \emptyset$ also mit $U_x \subseteq M$. Nach Definition der Umgebung gibt es eine offene Menge G_x mit $x \in G_x \subseteq U_x \subseteq M$. Also folgt

$$M \subseteq \bigcup_{x \in M} G_x \subseteq M, \qquad \text{d.h. } M = \bigcup_{x \in M} G_x\,.$$

Als offene Vereinigung von offenen Mengen ist M daher offen in $(X, \mathcal{T})$.

(b) Da alle Punkte von M und auch von ∂M insbesondere Berührungspunkte von M sind, hat man $M \cup \partial M \subseteq \overline{M}$.

Ist $x \in \overline{M}$ beliebig, so ist entweder $x \in M$ oder x ist ein Berührungspunkt von M, der nicht in M liegt. Im zweiten Fall folgt $x \in U \cap (X \setminus M)$ für alle Umgebungen U von x, d.h. x ist auch Berührungspunkt von $X \setminus M$ und somit ein Randpunkt von M. Also gilt $M \cup \partial M = \overline{M}$. □

Aufgabe* 4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für $x \in X$ sei $[x] := \{y \in X\,;\, y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim$. Mit $X/\sim$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{T}_\sim := \big\{G \subseteq X/\sim\,;\, \{x \in X\,;\, [x] \in G\} \in \mathcal{T}\big\}$$

eine Topologie auf $X/\sim$ definiert. Diese heißt die *Quotiententopologie* und der topologische Raum $(X/\sim, \mathcal{T}_\sim)$ heißt der *Quotientenraum* von $(X, \mathcal{T})$ bezüglich $\sim$

Lösung: Sei $\pi : X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$, die kanonische Surjektion von X auf $X/\sim$. Dann ist $\mathcal{T}_\sim$ nach Definition die Menge aller derjenigen Teilmengen G von $X/\sim$, für die gilt $\pi^{-1}(G) \in \mathcal{T}$. Wir rechnen nach, daß die Bedingungen (O1) - (O3) für $\mathcal{T}$ erfüllt sind:

$\emptyset, X \in \mathcal{T}_\sim$ ist offensichtlich.

Sind $G_1, \ldots, G_n$ endlich viele Mengen aus $\mathcal{T}_\sim$, so sind $\pi^{-1}(G_1), \ldots, \pi^{-1}(G_n)$ offen in $(X, \mathcal{T})$ und es folgt $\pi^{-1}(G_1) \cap \ldots \cap \pi^{-1}(G_n) \in \mathcal{T}$, da endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegen. Also ist $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \mathcal{T}_\sim$.

Ist schließlich $(G_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengen aus $\mathcal{T}_\sim$, so ist $\pi^{-1}(G_i) \in \mathcal{T}$ und daher

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} G_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(G_i) \in \mathcal{T}$$

als Vereinigung von in $(X, \mathcal{T})$ offenen Mengen. Also folgt $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_\sim$.

Da $\mathcal{T}_\sim$ die Bedingungen (O1) - (O3) erfüllt, ist $\mathcal{T}_\sim$ eine Topologie auf $X/\sim$. □