UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1. Wir betrachten in $\mathbb{R}$ das folgende Mengensystem

$$\mathcal{T} := \big\{(-\infty,\alpha)\,;\,\alpha\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}\big\}\cup\{\emptyset\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.
(b) Beschreiben Sie die abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.
(c) Berechnen Sie die Menge der Berührungspunkte und den topologischen Rand von $\{2007\}$ in $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.
(d) Berechnen Sie das Innere und die Abschließung von $(-2007,\infty)$ in $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

Lösung: (a) Nach Definition ist $\emptyset,\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\in\mathcal{T}$. Der Durchschnitt von endlich vielen Mengen $G_1,\dots,G_n\in\mathcal{T}$ ist entweder leer (dies genau dann, wenn eine der beteiligten Mengen schon leer ist) oder die Mengen sind von der Gestalt $G_j=(-\infty,\alpha_j)$ mit $-\infty<\alpha_j\le\infty$ für $j=1,\dots,n$ und es ist $G_1\cap\cdots\cap G_n=(-\infty,\alpha)\in\mathcal{T}$ mit $\alpha:=\min_{1\le j\le n}\alpha_j$. Für eine beliebige Familie $(G_i)_{i\in I}$ von Mengen aus $\mathcal{T}$ (mit $G_i=(-\infty,\alpha_i)$ falls $G_i\neq\emptyset$, $i\in I$) erhält man $\bigcup_{i\in I}G_i=(-\infty,\alpha)\in\mathcal{T}$ mit $\alpha:=\sup_{i\in I}$ falls wenigstens eine der beteiligten Mengen nicht leer ist und $\bigcup_{i\in I}G_i=\emptyset$, falls $G_i=\emptyset\in\mathcal{T}$ für alle $i\in I$. Also sind die Bedingungen (O1) - (O3) aus Definition 1.6 der Vorlesung erfüllt und $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(b) Da die abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ gerade die Komplemente der Mengen aus $\mathcal{T}$ sind, erhält man für die Familie $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ der abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R},\mathcal{T})$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{[\alpha,\infty)\,;\,\alpha\in\mathbb{R}\}\,.$$

(c) Ist $x\ge 2007$ so enthält nach Definition der Umgebung jede Umgebung U von x in $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ eine offene Menge $G=(-\infty,\alpha)$ mit $2007\le x\in G=(-\infty,\alpha)\subseteq U$. Insbesondere folgt $2007\in U$. Ist $x<2007$, so ist $U:=(-\infty,2007)$ eine offene Umgebung von x mit $U\cap\{2007\}=\emptyset$. Also ist $\overline{\{2007\}}=[2007,\infty)$ die Menge aller Berührungspunkte von $\{2007\}$. Der Beweis zeigt zugleich, daß jede Umgebung eines Berührungspunktes von $\{2007\}$ auch Punkte des Komplements von $\{2007\}$ enthält und somit auch Berührungspunkt zu $\mathbb{R}\setminus\{2007\}$ ist. Also gilt $\partial\{2007\}=\overline{\{2007\}}=[2007,\infty)$.

(d) Die Abschließung (also die Menge aller Berührungspunkte) von $\{2007\}$ wurde in (c) berechnet. Da $\{x\}$ keine Intervalle der Form $(-\infty,\alpha)$ mit $-\infty<\alpha\le\infty$, also keine nicht leeren, in $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ offene Teilmengen enthält, ist $\operatorname{int}\{2007\}=\emptyset$. □

Aufgabe 2. Geben Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X:=\{1,2\}$ an.

Lösung: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\{1,2\})$ hat die Elemente $\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}$. Jede Topologie auf $\{1,2\}$ muß wegen (O1) mindestens die Elemente $\emptyset,\{1,2\}$ enthalten. Damit bleiben als mögliche Topologien auf $\{1,2\}$ nur

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0&=\big\{\emptyset,\{1,2\}\big\} &&\text{(Indiskrete Topologie)}\\
\mathcal{T}_1&=\big\{\emptyset,\{1\},\{1,2\}\big\}\\
\mathcal{T}_2&=\big\{\emptyset,\{2\},\{1,2\}\big\} &&\text{und}\\
\mathcal{T}_3&=\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\big\} &&\text{(Diskrete Topologie)}\,.
\end{aligned}$$

Direktes Nachrechnen zeigt, daß auch $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf $\{1,2\}$ sind. □

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) M ist offen in $(X, \mathcal{T})$ genau dann, wenn $M \cap \partial M = \emptyset$.
(b) $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Lösung: (a) Nach Definition der Vorlesung ist $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$. Ist M offen und ist $x \in M$, so ist M eine Umgebung von x die mit $X \setminus M$ keine gemeinsamen Punkte hat. Also ist $M \cap \partial M = \emptyset$.

Ist umgekehrt $M \cap \partial M = \emptyset$ und ist $x \in M$, so ist x kein Berührungspunkt von $X \setminus M$, besitzt also eine Umgebung U_x mit $U_x \cap (X \setminus M) = \emptyset$ also mit $U_x \subseteq M$. Nach Definition der Umgebung gibt es eine offene Menge G_x mit $x \in G_x \subseteq U_x \subseteq M$. Also folgt

$$M \subseteq \bigcup_{x \in M} G_x \subseteq M, \qquad \text{d.h. } M = \bigcup_{x \in M} G_x \,.$$

Als offene Vereinigung von offenen Mengen ist M daher offen in $(X, \mathcal{T})$.

(b) Da alle Punkte von M und auch von ∂M insbesondere Berührungspunkte von M sind, hat man $M \cup \partial M \subseteq \overline{M}$.

Ist $x \in \overline{M}$ beliebig, so ist entweder $x \in M$ oder x ist ein Berührungspunkt von M, der nicht in M liegt. Im zweiten Fall folgt $x \in U \cap (X \setminus M)$ für alle Umgebungen U von x, d.h. x ist auch Berührungspunkt von $X \setminus M$ und somit ein Randpunkt von M. Also gilt $M \cup \partial M = \overline{M}$. □

Aufgabe* 4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für $x \in X$ sei $[x] := \{y \in X\,;\, y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim$. Mit $X/\sim$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{T}_\sim := \big\{G \subseteq X/\sim\,;\, \{x \in X\,;\, [x] \in G\} \in \mathcal{T}\big\}$$

eine Topologie auf $X/\sim$ definiert. Diese heißt die *Quotiententopologie* und der topologische Raum $(X/\sim, \mathcal{T}_\sim)$ heißt der *Quotientenraum* von $(X, \mathcal{T})$ bezüglich $\sim$

Lösung: Sei $\pi : X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$, die kanonische Surjektion von X auf $X/\sim$. Dann ist $\mathcal{T}_\sim$ nach Definition die Menge aller derjenigen Teilmengen G von $X/\sim$, für die gilt $\pi^{-1}(G) \in \mathcal{T}$. Wir rechnen nach, daß die Bedingungen (O1) - (O3) für $\mathcal{T}$ erfüllt sind:

$\emptyset, X \in \mathcal{T}_\sim$ ist offensichtlich.

Sind $G_1, \ldots, G_n$ endlich viele Mengen aus $\mathcal{T}_\sim$, so sind $\pi^{-1}(G_1), \ldots, \pi^{-1}(G_n)$ offen in $(X, \mathcal{T})$ und es folgt $\pi^{-1}(G_1) \cap \ldots \cap \pi^{-1}(G_n) \in \mathcal{T}$, da endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegen. Also ist $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \mathcal{T}_\sim$.

Ist schließlich $(G_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengen aus $\mathcal{T}_\sim$, so ist $\pi^{-1}(G_i) \in \mathcal{T}$ und daher

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} G_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(G_i) \in \mathcal{T}$$

als Vereinigung von in $(X, \mathcal{T})$ offenen Mengen. Also folgt $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_\sim$.

Da $\mathcal{T}_\sim$ die Bedingungen (O1) - (O3) erfüllt, ist $\mathcal{T}_\sim$ eine Topologie auf $X/\sim$. □