



Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 10

Aufgabe 1. Zeigen Sie

- (a) Sei E ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} E = \aleph_0$, d.h. es gibt eine abzählbar unendliche, linear unabhängige Teilmenge $B = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ von E mit $E = \text{LH}(B)$. Dann gibt es keine Norm auf E bezüglich der E vollständig ist. Insbesondere ist also jeder unendlich dimensionale Banachraum schon überabzählbar unendlich dimensional.
- (b) Auf dem Raum $\mathbb{K}[X]$ aller Polynome gibt es keine Norm, bezüglich der $\mathbb{K}[X]$ vollständig ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß die Menge der Unstetigkeitspunkte einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann von erster Kategorie in $\mathbb{R}$ ist, wenn es eine dichte Menge gibt, in deren Punkten f stetig ist.

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von A in (X, τ) , falls U für alle $a \in A$ eine Umgebung von a in (X, τ) ist.

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *isoliert*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$. Zeigen Sie:

- (a) Hat (X, d) keine isolierten Punkte, so ist X überabzählbar.
- (b) Ist X abzählbar, so liegt die Menge der isolierten Punkte dicht in (X, d) .

Aufgabe* 4. Zeigen Sie, daß für einen topologischen Raum (X, τ) die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) (X, τ) ist ein T_1 -Raum, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ gibt es eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von y mit $y \notin U$ und $x \notin V$.
- (b) Für alle $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.
- (c) Jede Teilmenge A von X ist der Durchschnitt aller ihrer Umgebungen.

Abgabe: Freitag, den 29.06.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html.