



Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 11

Aufgabe 1. Sei (X, τ) ein vollständig regulärer Raum und seien $A \subset X$ abgeschlossen und $K \subset X$ kompakt mit $A \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $f \in C(X, [0, 1])$ mit $f \equiv 0$ auf A und $f \equiv 1$ auf K .

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß ein T_1 -Raum, der eine Basis aus sowohl offenen als auch abgeschlossenen Mengen besitzt, vollständig regulär ist.

Ein topologischer Raum heißt

- *Lindelöfraum*, falls jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.
- *σ -kompakt*, falls X abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen von X ist.

Aufgabe 3. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sein $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie τ . Zeigen Sie:

- Ist (X, τ) σ -kompakt, so ist (X, τ) ein Lindelöfraum.
- Genau dann ist (X, τ) ein Lindelöfraum, wenn jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{B}$ eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.
- Jeder abgeschlossene Unterraum eines Lindelöfraums ist wieder ein Lindelöfraum.

Aufgabe* 4. Sei (X, τ) ein vollständig regulärer Lindelöfraum und seien A, B zwei beliebige abgeschlossene, disjunkte Teilmengen von X . Zeigen Sie:

- Zu je zwei Punkten $a \in A, b \in B$ gibt es offene Umgebungen U_a von a und V_b von b mit $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ und $\overline{V_b} \cap A = \emptyset$.
- Es gibt Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ in A und $(b_n)_{n=1}^\infty$ in B mit $A \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty U_{a_n}$ und $B \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty V_{b_n}$.
- Die Mengen

$$U := \bigcup_{n=1}^\infty \left(U_{a_n} \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{V_{b_k}} \right) \quad \text{und} \quad V := \bigcup_{n=1}^\infty \left(V_{b_n} \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{U_{a_k}} \right)$$

sind offen und disjunkt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. (X, τ) ist also normal.

Abgabe: Freitag, den 06.07.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html.