UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 12

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Menge der Funktionen der Gestalt

$$z \mapsto g(z) := \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $c_{-n}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ dicht liegen in $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ (mit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$).

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe, daß die Menge der reellen trigonometrischen Polynome

$$t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ bzgl. der Supremumsnorm dicht liegt in der Menge der 2π–periodischen, stetigen, reellwertigen Funktionen.

Aufgabe 3. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei

$$C_c(X, \mathbb{K}) := \{f \in C(X, \mathbb{K})\,;\, \exists K = K_f \subseteq X, K \text{ kompakt, mit } f|_{X \setminus K} \equiv 0\}$$

die Menge aller stetigen Funktionen f auf X mit Werten in $\mathbb{K}$, die außerhalb einer kompakten Teilmenge K_f verschwinden. Zeigen Sie, daß $C_c(X, \mathbb{K})$ dicht in $(C_0(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_X)$ liegt.

Aufgabe* 4. Sei $I \neq \emptyset$ und seien (K_i, τ_i), $i \in I$ nicht leere kompakte Hausdorffräume. $K := \prod_{i \in I} K_i$ sei mit der Produkttopologie versehen. Zeigen Sie, daß die Menge aller Funktionen der Art

$$x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m(j)} f_{i_{k,j}}(x_{i_{k,j}}) \qquad (x = (x_i)_{i \in I} \in K)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $i_{k,j} \in I$, $f_{i_{k,j}} \in C(K_{i_{k,j}}, \mathbb{K})$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m(j)$, dicht liegt in $(C(K, \mathbb{K}), \|\cdot\|_K)$.

Abgabe: Freitag, den 13.07.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/∼ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html`.