



Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 3

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt T_1 -Raum, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ Umgebungen U_j von x_j gibt ($j = 1, 2$) mit $x_2 \notin U_1$ und $x_1 \notin U_2$.

Aufgabe 1. Sei X eine überabzählbare Menge und sei \mathcal{T}_0 die durch

$$\mathcal{T}_0 := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X; X \setminus G \text{ ist höchstens abzählbar unendlich}\}$$

gegebene Topologie auf X . Zeigen Sie:

- (a) (X, \mathcal{T}_0) ist ein T_1 -Raum aber kein T_2 -Raum.
- (b) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann konvergent in (X, \mathcal{T}_0) gegen ein $x_0 \in X$, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $x_n = x_0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
- (c) Jede Folge aus X kann in (X, \mathcal{T}_0) gegen höchstens ein $x_0 \in X$ konvergieren.

Aufgabe 2. Sei nun speziell $X = \mathbb{R}$ in Aufgabe 1. Zeigen Sie:

- (a) Jede Abbildung von $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$ ist folgenstetig. Hierbei bezeichne $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ die euklidische Topologie auf \mathbb{R} .
- (b) Die Abbildungen

$$\text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \quad \text{und} \quad \text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$$

sind in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig.

Aufgabe 3. Sei weiterhin $X = \mathbb{R}$ versehen mit der Topologie \mathcal{T}_0 aus Aufgabe 1 und sei $M := \{2006\} \cup (2007, 2008)$.

- (a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von M .
- (b) Zeigen Sie, daß es keine bzgl. \mathcal{T}_0 gegen 2007 konvergente Folge aus M gibt.

Aufgabe* 4. Seien $(X; \mathcal{T}_X)$ und (Y, \mathcal{T}_Y) zwei topologische Räume. \mathcal{B}_Y sei eine Basis und \mathcal{S}_Y sei eine Subbasis für (Y, \mathcal{T}_Y) . Zeigen Sie: Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig.
- (b) $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ für alle $B \in \mathcal{B}_Y$.
- (c) $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ für alle $S \in \mathcal{S}_Y$.

Abgabe: Freitag, den 11.05.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html.