UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 3

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt T_1–*Raum*, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ Umgebungen U_j von x_j gibt $(j = 1, 2)$ mit $x_2 \notin U_1$ und $x_1 \notin U_2$.

Aufgabe 1. Sei X eine überabzählbare Menge und sei $\mathcal{T}_0$ die durch

$$\mathcal{T}_0 := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X\,;\, X \setminus G \text{ ist höchstens abzählbar unendlich}\}$$

gegebene Topologie auf X. Zeigen Sie:

(a) $(X, \mathcal{T}_0)$ ist ein T_1–Raum aber kein T_2–Raum.
(b) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann konvergent in $(X, \mathcal{T}_0)$ gegen ein $x_0 \in X$, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $x_n = x_0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
(c) Jede Folge aus X kann in $(X, \mathcal{T}_0)$ gegen höchstens ein $x_0 \in X$ konvergieren.

Aufgabe 2. Sei nun speziell $X = \mathbb{R}$ in Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Jede Abbildung von $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$ ist folgenstetig. Hierbei bezeichne $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$.
(b) Die Abbildungen

$$\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$$

sind in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig.

Aufgabe 3. Sei weiterhin $X = \mathbb{R}$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_0$ aus Aufgabe 1 und sei $M := \{2006\} \cup (2007, 2008)$.

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von M.
(b) Zeigen Sie, daß es keine bzgl. $\mathcal{T}_0$ gegen 2007 konvergente Folge aus M gibt.

Aufgabe* 4. Seien $(X; \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ zwei topologische Räume. $\mathcal{B}_Y$ sei eine Basis und $\mathcal{S}_Y$ sei eine Subbasis für $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Zeigen Sie: Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f ist stetig.
(b) $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ für alle $B \in \mathcal{B}_Y$.
(c) $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ für alle $S \in \mathcal{S}_Y$.

Abgabe: Freitag, den 11.05.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html`.