UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 4

Erinnerung: Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt *Cauchy–Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Jede konvergente Folge ist insbesondere eine Cauchy–Folge. (X, d) heißt *vollständig*, falls in (X, d) jede Cauchy–Folge konvergent ist.

In Analogie zu Cauchy–Folgen können wir *Cauchy–Netze* definieren: Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy–Netz, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_0 \in \mathbb{A} \quad \forall \alpha, \beta \succeq \alpha_0 : \qquad d(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon.$$

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Jedes konvergente Netz in (X, d) ist ein Cauchy–Netz.
(b) (X, d) ist vollständig genau dann, wenn jedes Cauchy–Netz in (X, d) konvergent ist.

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, d.h. in dem jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Zeigen Sie:

(a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ von $(X, \mathcal{T})$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}')$ ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.
(b) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Häufungspunkt einer Menge $M \subseteq X$, wenn es eine gegen x in $(X, \mathcal{T})$ konvergente Folge gibt.

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (versehen mit der euklidischen Topologie). Zeigen Sie: Die Menge $C((X, \mathcal{T}), \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{K}$ ist bezüglich der punktweisen Operationen der Addition, der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren eine Unteralgebra der Algebra aller auf X definierten $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen.

Aufgabe* 4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige reellwertige Funktionen ($\mathbb{R}$ sei versehen mit der euklidischen Topologie). Zeigen Sie die Stetigkeit der durch

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in X)$$

definierten Funktionen $f \vee g, f \wedge g : X \to \mathbb{R}$.

Abgabe: Freitag, den 18.05.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html`.