UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 6

Aufgabe 1. Sei M eine nicht leere Menge und sei (X, d) ein metrischer Raum. Mit $F(M, X)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $f : M \to X$ von M nach X. Sei $\mathfrak{S}$ eine Familie von Teilmengen von M, mit je zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{S}$ auch $A \cup B$ enthält. Für alle $f \in F(M, X)$, $A \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$U_{A,\varepsilon}(f) := \Big\{ g \in F(M, X)\,;\, \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)| < \varepsilon \Big\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{B} := \{U_{A,\varepsilon}(f)\,;\, f \in F(M, X), A \in \mathfrak{S}, \varepsilon > 0\}$ erfüllt die Bedingungen (B1) – (B3) aus Bemerkung 1.18. Nach dieser Bemerkung ist also $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis von offenen Teilmengen einer eindeutig bestimmten Topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$. Man nennt $\tau_{\mathfrak{S}}$ die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus* $\mathfrak{S}$.

(b) $\tau_{\mathfrak{S}}$ ist genau dann separiert, wenn $\bigcup_{A \in \mathfrak{B}} A = M$.

Im Fall $\mathfrak{S} = \{M\}$ spricht man von der *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf* M. Ist $\mathfrak{F}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M, so heißt $\tau_{\mathfrak{F}}$ die *Topologie der punktweisen Konvergenz.*

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß mit den Bezeichnungen und Definitionen aus Aufgabe 1 gilt:

(a) Ein Netz $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in $F(M, X)$ ist genau dann konvergent bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz gegen eine Abbildung $f \in F(M, X)$, wenn sie gleichmäßig auf M gegen f konvergiert d.h., wenn

$$\lim_{\alpha} \sup_{x \in M} d(f(x), f_\alpha(x)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

(b) Ist M mit einer Topologie τ versehen und ist $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein Netz von stetigen Funktionen aus $F(M, X)$ welches gleichmäßig auf M gegen eine Abbildung $f : M \to X$ konvergiert, so ist auch f stetig.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $\alpha \geq 0$ sei $M_\alpha := \prod_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{K}\,;\, |x| \leq k^{-\alpha}\}$.

Aufgabe 3. Für welche $\alpha \geq 0$ ist M_α eine kompakte Teilmenge von

a) $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ bzw. von (b) $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$?

Aufgabe* 4. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen. Zeigen Sie, daß die Diagonale $D := \{(x, x)\,;\, x \in X\}$ genau dann in $X \times X$ abgeschlossen ist, wenn τ eine separierte Topologie ist.

Abgabe: Freitag, den 01.06.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html`.