UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $X := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq 1\}$ versehen mit der euklidischen Topologie. Wir definieren auf X eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$z \sim w : \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = |w| & \text{falls } |z| < 1 \\ z = w & \text{falls } |z| = 1. \end{cases}$$

und versehen den zugehörigen Quotientenraum $X/_\sim$ mit der Quotiententopologie $\tau_\sim$. Zeigen Sie:

(a) $(X/_\sim, \tau_\sim)$ ist ein T_1–Raum aber kein T_2–Raum.
(b) $(X/_\sim, \tau_\sim)$ ist kompakt.
(c) Ist $\pi : X \to X/_\sim$ die kanonische Surjektion, so ist π eine offene Abbildung (bildet also offene Teilmengen von X auf offene Teilmengen von $(X/_\sim, \tau_\sim)$ ab).
(d) Sind $z_1, z_2 \in X$ zwei voneinander verschiedene Punkte mit $|z_1| = |z_2| = 1$, so gibt es kompakte Umgebungen V_j von $\pi(z_j)$, $j = 1, 2$, deren Schnittmenge nicht kompakt in $(X/_\sim, \tau_\sim)$ ist .

Aufgabe 2. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge aus X eine in (X, τ) konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie, daß ein abzählbares topologisches Produkt von folgenkompakten topologischen Räumen wieder folgenkompakt ist.
Hinweis: Diagonalfolgenverfahren.

Aufgabe 3. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben* bzw. *nach unten halbstetig*, $x \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x gibt mit $f(y) < f(x) + \varepsilon$ (bzw. $f(y) > f(x) - \varepsilon$) für alle $y \in U$. f heißt nach oben (bzw. nach unten) halbstetig auf X, falls f in allen Punkten von X halbstetig ist. Zeigen Sie: Ist (X, τ) kompakt, so gibt es zu jeder nach oben (bzw. nach unten) halbstetigen Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = \sup f(X)$ (bzw. mit $f(x_0) = \inf f(X)$).

Aufgabe* 4. Sei $X = [0, 1]$ versehen mit der Topologie

$$\tau := \{\emptyset, X\} \cup \{[0, 1) \setminus A\,;\, A \text{ ist abzählbare Teilmenge von } X\}$$

Zeigen Sie:

(a) (X, τ) ist kompakt.
(b) Die in (X, τ) offene Menge $G := [0, 1)$ enthält für kein $x \in G$ eine kompakte Umgebung von x.

Abgabe: Freitag, den 08.06.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html`.