



Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)  
Blatt 8

**Aufgabe 1.** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und sei die Algebra  $C(I)$  aller auf  $I := [-1, 1]$  stetigen  $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_I$ . Wir versehen die Algebra  $C^1([-1, 1])$  aller auf  $[-1, 1]$  stetig differenzierbaren  $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen mit der durch

$$\|f\|_1 := \|f\|_I + \|f'\|_I \quad (f \in C^1(I))$$

definierten Norm. Zeigen Sie, daß die Menge  $\{f \in C^1(I); \|f\|_1 \leq 1\}$  relativkompakt in  $(C(I), \|\cdot\|_I)$  ist.

**Aufgabe 2.** Sei  $(G, \cdot)$  eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element  $e$  der Multiplikation, auf der eine Topologie  $\tau$  gegeben sei, für die die durch

$$(g, h) \mapsto \mu(g, h) := g \cdot h^{-1} \quad (g, h \in G)$$

definierte Abbildung  $\mu : G \times G \rightarrow G$  stetig ist.  $\mathfrak{U}(e)$  sei die Menge aller Umgebungen von  $e$  in  $(G, \tau)$ . Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildungen  $M : G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto M(g, h) := g \cdot h$  und  $J : G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto J(g) := g^{-1}$ , sind stetig.
- (b) Für alle  $U \in \mathfrak{U}(e)$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $e$  mit
$$V \cdot V := \{g \cdot h; g, h \in V\} \subseteq U.$$
- (c) Für alle  $U \in \mathfrak{U}(e)$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $e$  mit  $V^{-1} := \{g^{-1}; g \in V\} \subseteq U$ .
- (d) Für alle  $U \in \mathfrak{U}(e)$  und alle  $g \in \text{int } U$  gibt es ein  $V \in \mathfrak{U}(e)$  mit  $g \cdot V \subseteq U$ .
- (e) Für alle  $U \in \mathfrak{U}(e)$  und alle  $g \in G$  gibt es ein  $V \in \mathfrak{U}(e)$  mit  $g \cdot V \cdot g^{-1} \subseteq U$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $G = GL(N, \mathbb{K})$  die Menge der invertierbaren  $(N \times N)$ -Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Zeigen Sie, daß  $G$  versehen mit der von einer Matrixnorm  $\|\cdot\|$  induzierten Topologie eine lokalkompakte Gruppe ist. Können Sie für  $N > 1$  auch eine von  $\{\alpha E_N; \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| = 1\}$  ( $E_N$  sei die Einheitsmatrix) verschiedene kompakte Untergruppe angeben?

**Aufgabe\* 4.** Zeigen Sie, daß die Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  der irrationalen Zahlen, versehen mit der von  $(\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$  induzierten Topologie  $\tau$ , nicht lokalkompakt ist und daß in  $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \tau)$  jeder Punkt eine Umgebungsbasis besitzt, die aus sowohl offenen als auch abgeschlossenen Mengen besteht.

**Abgabe:** Freitag, den 15.06.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

[www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html](http://www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html).