UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und sei die Algebra $C(I)$ aller auf $I := [-1, 1]$ stetigen $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_I$. Wir versehen die Algebra $C^1([-1, 1])$ aller auf $[-1, 1]$ stetig differenzierbaren $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen mit der durch

$$\|f\|_1 := \|f\|_I + \|f'\|_I \qquad (f \in C^1(I))$$

definierten Norm. Zeigen Sie, daß die Menge $\{f \in C^1(I)\,;\, \|f\|_1 \leq 1\}$ relativkompakt in $(C(I), \|\cdot\|_I)$ ist.

Aufgabe 2. Sei $(G, \cdot)$ eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element e der Multiplikation, auf der eine Topologie τ gegeben sei, für die die durch

$$(g, h) \mapsto \mu(g, h) := g \cdot h^{-1} \qquad (g, h \in G)$$

definierte Abbildung $\mu : G \times G \to G$ stetig ist. $\mathfrak{U}(e)$ sei die Menge aller Umgebungen von e in (G, τ). Zeigen Sie:

(a) Die Abbildungen $M : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto M(g, h) := g \cdot h$ und $J : G \to G$, $g \mapsto J(g) := g^{-1}$, sind stetig.
(b) Für alle $U \in \mathfrak{U}(e)$ gibt es eine Umgebung V von e mit
$$V \cdot V := \{g \cdot h\,;\, g, h \in V\} \subseteq U.$$
(c) Für alle $U \in \mathfrak{U}(e)$ gibt es eine Umgebung V von e mit $V^{-1} := \{g^{-1}\,;\, g \in V\} \subseteq U$.
(d) Für alle $U \in \mathfrak{U}(e)$ und alle $g \in \operatorname{int} U$ gibt es ein $V \in \mathfrak{U}(e)$ mit $g \cdot V \subseteq U$.
(e) Für alle $U \in \mathfrak{U}(e)$ und alle $g \in G$ gibt es ein $V \in \mathfrak{U}(e)$ mit $g \cdot V \cdot g^{-1} \subseteq U$.

Aufgabe 3. Sei $G = GL(N, \mathbb{K})$ die Menge der invertierbaren $(N \times N)$-Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Zeigen Sie, daß G versehen mit der von einer Matrixnorm $\|\cdot\|$ induzierten Topologie eine lokalkompakte Gruppe ist. Können Sie für $N > 1$ auch eine von $\{\alpha E_N\,;\, \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| = 1\}$ (E_N sei die Einheitsmatrix) verschiedene kompakte Untergruppe angeben?

Aufgabe* 4. Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen, versehen mit der von $(\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$ induzierten Topologie τ, nicht lokalkompakt ist und daß in $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \tau)$ jeder Punkt eine Umgebungsbasis besitzt, die aus sowohl offenen als auch abgeschlossenen Mengen besteht.

Abgabe: Freitag, den 15.06.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html`.