UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Topologie (SS 2007)
Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $y_0 \in \mathbb{R}$ und sei $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, stetige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\alpha > 0$ ist durch

$$y_\alpha(t) := \begin{cases} y_0 & \text{für } t \le a \\ y_0 + \int_a^t f(s, y_\alpha(s-\alpha))\, ds & \text{für } a < t \le b \end{cases}$$

eine auf I wohldefinierte stetige Funktion gegeben.

(b) $H := \{y_\alpha\,;\, \alpha > 0\}$ ist eine relativkompakte Teilmenge von $(C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_I)$. Insbesondere hat also jede Folge aus H wenigstens einen Häufungswert.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß in der Situation von Aufgabe 1 jeder Häufungswert von $(y_{1/n})_{n=1}^\infty$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \qquad y(a) = y_0$$

ist. Insbesondere hat also diese Anfangswertaufgabe wenigstens eine auf ganz I definierte Lösung.

Aufgabe 3. Sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige Funktion. Ist I ein nicht zu einem Punkt ausgeartetes Intervall, so heißt

$$\omega_f(I) := \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$$

die *Oszillation von f auf I*. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta\to 0} \omega_f\big((x-\delta, x+\delta)\big)$$

in $[0, \infty]$; er heißt die *Oszillation von f in x*.

(b) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \ge \varepsilon\}$ ist abgeschlossen für alle $\varepsilon > 0$.

(c) Die Menge

$$\bigcup_{n=1}^\infty \{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \ge \frac{1}{n}\}$$

ist die Menge aller Unstetigkeitspunkte von f.

Aufgabe* 4. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und F ein Untervektorraum von E mit $\operatorname{int}(F) \ne \emptyset$. Dann ist schon $F = E$.

Abgabe: Freitag, den 22.06.2007 vor der Vorlesung oder bis 9:15 Uhr in dem Briefkasten (FT SS 07) in Gebäude E2 5 (Untergeschoß).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/top/uebungen.html`.