KAPITEL 1

# Topologische Grundbegriffe in metrischen und topologischen Räumen

Die topologischen Grundbegriffe *offene Mengen, abgeschlossene Mengen, Inneres einer Menge und Abschließung einer Menge, Stetigkeit einer Abbildung, Konvergenz,...* haben wir in den Anfängervorlesungen Analysis 1 und 2 bereits in der speziellen Situation des $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$, (etwa Kapitel 3 in [**1**]) oder allgemeiner in normierten Räumen, bzw. noch allgemeiner in metrischen Räumen (etwa Kapitel 8 in [**1**]) kennengelernt. Bevor wir zu noch allgemeineren Situationen übergehen, soll in diesem Kapitel nochmals an die Theorie der metrischen Räume erinnert werden.

1.1. Definition. Sei $X$ eine nicht leere Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt *Metrik* auf $X$, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(M1) $\forall x, y \in X: \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$

(M2) $\forall x, y \in X: \quad d(x, y) = d(y, x)$. (*Symmetrie*)

(M3) $\forall x, y, z \in X: \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (*Dreiecksungleichung*)

(X,d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

1.2. Beispiele. (a) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $(E, d_{\|\cdot\|})$ mit $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$ für alle $x, y \in X$ ein metrischer Raum. Wir nennen $d_{\|\cdot\|}$ die von der Norm $\|\cdot\|$ induzierte Metrik auf $E$. Insbesondere ist also $\mathbb{R}^N$ versehen mit der durch den euklidischen Betrag induzierten Metrik $d_{|\cdot|}$ ein metrischer Raum.

(b) Sei $\emptyset \neq F \subseteq \mathbb{R}^2$ und $p \in F$. Wir definieren die *Zentralismus–Metrik* $d_p : F \times F \to [0, \infty)$ durch

$$d_p(x, y) := \begin{cases} |x - p| + |p - y| & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

für alle $x, y \in F$. Man rechnet leicht nach, daß die Bedingungen (M1)–(M3) erfüllt sind.

(c) Sei $X$ eine nicht leere Menge. Wir definieren die *diskrete Metrik* $d : X \times X \to [0, \infty)$ durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für alle $x, y \in X$. Auch hier rechnet man unmittelbar nach, daß die Bedingungen (M1)–(M3) erfüllt sind.

1.3. Bemerkung. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und sei $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Man rechnet unmittelbar nach, daß dann $(Y, d|_{Y \times Y})$ ebenfalls ein metrischer Raum ist. Wir nennen $d|_{Y \times Y}$ die von $d$ auf $Y$ induzierte Metrik. Insbesondere wird also jede nicht leere Teilmenge $Y$ eines normierten Raums, versehen mit der durch $d_{\|\cdot\|}$ auf $Y$ induzierten Metrik zu einem metrischen Raum.

Wir erinnern an die wichtigsten topologischen Grundbegriffe in metrischen Räumen:

1.4. Definition. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $x_0 \in X$.

(a) Für $\varepsilon > 0$ heißt die Menge $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X\,;\, d(x, x_0) < \varepsilon\}$ die $\varepsilon$–*Umgebung* von $x_0$ in $(X, d)$.
(b) $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von $x_0$, falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ gibt.
(c) $\Omega \subseteq X$ heißt *offen* in $(X, d)$, falls $\Omega$ Umgebung eines jeden Punktes von $\Omega$ ist, d.h. falls es zu jedem $x \in \Omega$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$.
(d) $x_0$ heißt *innerer Punkt* einer Teilmenge $M$ von $X$, wenn $M$ eine Umgebung von $x_0$ ist, d.h. wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq M$.
(e) Für eine Teilmenge $M$ von $X$ heißt die Menge

$$\mathring{M} := \mathrm{int}(M) := \{x \in M\,;\, x \text{ ist innerer Punkt von } M\}$$

der inneren Punkte von $M$ das *Innere* oder der *offene Kern* von $M$ in $(X, d)$.
(f) Eine Teilmenge $A$ von $X$ heißt *abgeschlossen*0 in $(X, d)$, falls ihr Komplement $X \setminus A$ offen in $(X, d)$ ist.
(g) $x_0$ heißt *Berührungspunkt* einer Menge $M \subseteq X$, falls für jede Umgebung $U$ von $x_0$ in $(X, d)$ gilt: $U \cap M \neq \emptyset$.
(h) Für eine Teilmenge $M$ von $X$ heißt die Menge

$$\overline{M} := \{x \in X\,;\, x \text{ Berührungspunkt von } M \text{ in } (X, d)\}$$

der Berührungspunkte von $M$ in $(X, d)$ die *abgeschlossene Hülle* oder die *Abschließung* von $M$ in $(X, d)$.

Bemerkungen. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $x_0 \in X$.
(a) Die Mengen $X$ und $\emptyset$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen in $(X, d)$.
(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die $\varepsilon$–Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von $x_0$ in $(X, d)$ offen.
(c) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Menge

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in X\,;\, d(x, x_0) \le \varepsilon\}$$

abgeschlossen in $(X, d)$.
(d) Die Menge $(0, 1]$ ist weder offen noch abgeschlossen in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.
(e) Sei $X$ eine nicht leere Menge und $d : X \times X \to [0, \infty)$ die diskrete Metrik auf $X$ (vergl. Beispiel 1.2 (c)). Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0, 1]$ und alle $x \in X$: $U_\varepsilon(x) = \{x\}$ und für alle $\varepsilon > 1$ ist $U_\varepsilon(x) = X$. Sei $M \subseteq X$ beliebig. Es folgt für alle $x \in M$: $U_1(x) = \{x\} \subseteq M$. Also ist $M$ offen in $(X, d)$. Da dies auch für $X \setminus M$ gilt, ist $M$ auch abgeschlossen in $(X, d)$. Alle Teilmengen von $X$ sind somit bezüglich der diskreten Metrik auf $X$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

Dies ist alles aus Analysis 2 bekannt.
Das folgende Lemma enthält Aussagen über Durchschnitte bzw. Vereinigungen von offenen und von abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums.

1.5. Lemma. *Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum.*
(a) *Der Durchschnitt von endlich vielen in $(X, d)$ offenen Teilmengen von $X$ ist offen in $(X, d)$.*
(b) *Die Vereinigung von beliebig vielen in $(X, d)$ offenen Teilmengen von $X$ ist offen in $(X, d)$.*
(c) *Die Vereinigung von endlich vielen in $(X, d)$ abgeschlossenen Teilmengen von $X$ ist abgeschlossen in $(X, d)$.*
(d) *Der Durchschnitt von beliebig vielen in $(X, d)$ abgeschlossenen Teilmengen von $X$ ist abgeschlossen in $(X, d)$.*

Beweis. (a) Seien $G_1, \ldots, G_n$ endlich viele offene Mengen in $(X, d)$ und sei $x \in \bigcap_{j=1}^n G_j$ beliebig. Zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $\varepsilon_j > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq G_j$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ gilt dann: $\varepsilon > 0$ und $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^n G_j$. Nach Definition 1.4 (c) ist $\bigcap_{j=1}^n G_j$ also offen.

(b) Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von in $(X, d)$ offenen Teilmengen von $X$ und sei $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$ beliebig. Dann gibt es ein $i_0 \in I$, so daß $x \in G_{i_0}$. Da $G_{i_0}$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Also ist $\bigcup_{i \in I} G_i$ offen in $(X, d)$.

(c) und (d) erhält man aus (a) bzw. (b) durch Übergang zum Komplement. □

Dieses Lemma legt eine noch allgemeinere Begriffsbildung nahe:

1.6. Definition. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von $X$ mit den folgenden Eigenschaften:

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.
(O2) Endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{T}$ liegen in $\mathcal{T}$.
(O3) Vereinigungen von beliebig vielen Elementen aus $\mathcal{T}$ liegen in $\mathcal{T}$.

Dann heißt $\mathcal{T}$ eine *Topologie* auf $X$ und $(X, \mathcal{T})$ ein *topologischer Raum*. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen die in $(X, \mathcal{T})$ offenen Mengen.

1.7. Beispiele. Sei $X$ eine Menge.

(a) $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ heißt die *gröbste (leere)* oder *indiskrete* Topologie auf $X$.
(b) $\mathcal{T} := \mathfrak{P}(X)(:=$ Potenzmenge) heißt die *diskrete Topologie* auf $X$.
(c) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Die Menge der bzgl. $d$ offenen Teilmengen von $X$ definiert eine Topologie $\mathcal{T}_d$. Es gilt:
$$\mathcal{T}_d = \{G \subset X\,;\, \forall\, x \in G\ \exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G\}\ .$$
(d) $\mathcal{T} := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X\,;\, X \setminus G$ ist endlich$\}$ definiert eine Topologie auf $X$.
(e) $\mathcal{T} := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X\,;\, X \setminus G$ ist höchsten abzählbar unendlich$\}$ definiert eine Topologie auf $X$.

Es zeigt sich, daß - mit Ausnahme des Begriffs der $\varepsilon$–Umgebung - alle in Definition 1.4 eingeführten Begriffe auch in topologischen Räumen sinnvoll eingeführt werden können.

1.8. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.

(a) Eine Teilmenge $A$ von $X$ heißt *abgeschlossen* in $(X, d)$, falls ihr Komplement $X \setminus A$ offen in $(X, \mathcal{T})$ ist.
(b) Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von $x_0$, falls es eine offene Menge $G \subseteq X$ gibt mit $x_0 \in G \subseteq U$ gibt.
(c) $x_0$ heißt *innerer Punkt* einer Teilmenge $M$ von $X$ (bezüglich $\mathcal{T}$), wenn $M$ eine Umgebung von $x_0$ ist, d.h. wenn es eine offene Menge $G \subseteq X$ gibt mit $x_0 \in G \subseteq M$.
(d) Für eine Teilmenge $M$ von $X$ heißt die Menge
$$\overset{\circ}{M} := \operatorname{int}(M) := \{x \in M\,;\, x \text{ ist innerer Punkt von } M\}$$
der inneren Punkte von $M$ das *Innere* oder der *offene Kern* von $M$ in $(X, \mathcal{T})$.
(e) $x_0$ heißt *Berührungspunkt* einer Menge $M \subseteq X$ (bezüglich $\mathcal{T}$), falls für jede Umgebung $U$ von $x_0$ in $(X, \mathcal{T})$ gilt: $U \cap M \neq \emptyset$.
(f) Für eine Teilmenge $M$ von $X$ heißt die Menge
$$\overline{M} := \{x \in X\,;\, x \text{ Berührungspunkt von } M \text{ in } (X, \mathcal{T})\}$$
der Berührungspunkte von $M$ in $(X, \mathcal{T})$ die *abgeschlossene Hülle* oder die *Abschließung* von $M$ in $(X, \mathcal{T})$.

(g) $x \in X$ heißt *Randpunkt* einer Teilmenge $M$ von $X$, falls $x$ Berührungspunkt von $M$ und von $X \setminus M$ ist. Die Menge

$$\partial A := \{x \in X | x \text{ Randpunkt von } M\}$$

nennen wir den (topologischen) *Rand* von $M$ bzgl. $\mathcal{T}$.

Aus (O1) - (O3) erhält man durch Übergang zu den Komplementen:

1.9. Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Menge $\mathcal{A}$ aller abgeschlossenen Teilmengen hat die folgenden Eigenschaften.*

(A1) *$\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.*
(A2) *Beliebige Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{A}$ liegen in $\mathcal{A}$.*
(A3) *Endliche Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{A}$ liegen in $\mathcal{A}$.*

*Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge $X$, die den Bedingungen* (A1) - (A3) *genügt, so ist durch*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} := \{X \setminus A\,;\, A \in \mathcal{A}\}$$

*eine Topologie auf $X$ gegeben, für die $\mathcal{A}$ gerade die Menge aller bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossenen Teilmengen von $X$ ist.*

1.10. Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(x)$ die Menge aller Umgebungen von $x$ in $(X, \mathcal{T})$. Die Menge $\{\mathfrak{U}(x) | x \in X\}$ genügt den folgenden Bedingungen* (U1) - (U4)*:*

(U1) *$U \in \mathfrak{U}(x),\ V \supseteq U \Rightarrow V \in \mathfrak{U}(x)$.*
(U2) *$U_1, \cdots, U_k \in \mathfrak{U}(x)\, (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{k} U_j \in \mathfrak{U}(x)$.*
(U3) *$U \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow x \in U$.*
(U4) *$U \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow (\exists\, V \in \mathfrak{U}(x)\ \forall\, y \in V : U \in \mathfrak{U}(y))$.*

Dies zeigt man durch direktes Nachrechnen.

1.11. Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $V \subset X$ sind äquivalent:*

(a) *$V$ ist offen.*
(b) *Für alle $y \in V$ ist $V \in \mathfrak{U}(y)$.*
(c) *Für alle $y \in V$ gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U \subseteq V$.*

Beweis. Ist $V$ offen und $y \in V$ beliebig, so ist $V$ nach Definition der Umgebungen insbesondere eine Umgebung von $y$. Aus (a) folgt also (b).

Die Implikation von (b) nach (c) ist offensichtlich.

Sei nun (c) erfüllt. Dann gibt es zu jedem $y \in V$ eine Umgebung $U_y \subseteq V$ von $y$. Nach Definition der Umgebung gibt es dann eine offene Menge $G_y$ in $(X, \mathcal{T})$ mit $y \in G_y \subseteq U_y \subseteq V$. Es folgt also

$$V \subseteq \bigcup_{y \in V} G_y \subseteq V \qquad \text{und somit} \qquad V = \bigcup_{y \in V} G_y\,.$$

Als Vereinigung von offenen Mengen ist $V$ also nach (O3) offen in $(X, \mathcal{T})$. □

1.12. Lemma. *Ist $X$ eine Menge und ist für alle $x \in X$ ein Mengensystem $\mathfrak{U}(x)$ gegeben, welches die Bedingungen* (U1) - (U4) *in Lemma 1.10 erfüllt, so ist durch*

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{U}} := \{G \subseteq X\,;\, \forall y \in G : G \in \mathfrak{U}(y)\}$$

*eine Topologie auf $X$ gegeben. Ist $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}(x)\,;\, x \in X\}$ das Umgebungsystem einer Topologie $\mathcal{T}$, so stimmt $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$ mit $\mathcal{T}$ überein.*

Man kann also auch auf diese Weise mit Hilfe der Umgebungsaxiome (U1) - (U4) die Topologien einführen.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, falls es auf $X$ eine Metrik $d$ gibt, so daß die zugehörige Topologie

$$\mathcal{T}_d = \{G \subset X\,;\, \forall\, x \in G\; \exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G\}$$

mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt. Wir werden gleich sehen, daß nicht jeder topologische Raum metrisierbar ist.

1.13. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *separiert* oder *Hausdorffraum* oder *$T_2$–Raum* falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen $U$ von $x$ und $V$ von $y$ in $(X, \mathcal{T})$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$. Wir sagen dann auch: *Die Topologie $\mathcal{T}$ ist separiert.*

1.14. Beispiele. (a) Jeder metrische Raum $(X, d)$ ist versehen mit der durch seine Metrik $\mathcal{T}_d$ definierten Topologie ein Hausdorffraum.
(b) Besitzt $X$ mehr als ein Element, so ist $X$ versehen mit der indiskreten Topologie *kein* Hausdorffraum. Insbesondere ist die indiskrete Topologie auf Mengen mit mehr als einem Element nicht metrisierbar.

1.15. Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum, so ist für alle $x \in X$ die einpunktige Menge $\{x\}$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

Beweis. Ist $x \in X$ beliebig, so gibt es wegen der Separiertheit von $\mathcal{T}$ zu jedem $y \in X \setminus \{x\}$ eine Umgebung $U_y$ von $y$ mit $U_y \cap (X \setminus \{x\}) = \emptyset$. Nach Lemma 1.11 ist $\{x\}$ also abgeschlossen. $\square$

1.16. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Familie $\mathfrak{B}(x) \subset \mathfrak{U}(x)$ von Umgebungen von $x$ heißt *Umgebungsbasis für $x$* (oder auch *Fundamentalsystem von Umgebungen von $x$*), falls es zu jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein $V \in \mathfrak{B}(x)$ gibt mit $V \subseteq U$.
Ist für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\mathfrak{B}(x)$ für $x$ gegeben, so nennt man $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{B}(x); x \in X\}$ eine *Umgebungsbasis von* $(X, \mathcal{T})$.

1.17. Beispiele. (a) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Für alle $x \in X$ ist dann $\mathfrak{B}(x) := \{U_{\frac{1}{n}}(x); n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von $x$ (bzgl. der durch $d$ auf $X$ gegebenen Topologie $\mathcal{T}_d$).
(b) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathfrak{B}(x) := \{G \in \mathcal{T}; x \in G\}$ eine Umgebungsbasis für $x$.

Wir sagen: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ genügt dem *ersten Abzählbarkeitsaxiom*, falls jeder Punkt aus $X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Beispiel 1.17 (a) besagt also insbesondere, daß jeder metrische Raum dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

1.18. Bemerkungen. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
(a) Sei $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis für $x \in X$. Dann erhält man das Umgebungssystem $\mathfrak{U}(x)$ von $x$ durch: $\mathfrak{U}(x) = \{U \subset X\,;\, \exists\, V \in \mathfrak{B}(x) : V \subset U\}$.
(b) Ist $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis von <u>offenen</u> Mengen in $(X, \mathcal{T})$, so ergeben sich aus (U1) – (U4) und 1.5 die Aussagen:
(B1) $\forall\, x \in X : \mathfrak{B}(x) \neq \emptyset$ und $x \in V$ für alle $V \in \mathfrak{B}(x)$.

(B2) $\forall\, V_1, V_2 \in \mathfrak{B}(x)\ \exists\, V \in \mathfrak{B}(x) : V \subset V_1 \cap V_2$.
(B3) Ist $y \in V \in \mathfrak{B}(x)$, so existiert $W \in \mathfrak{B}(y)$ mit $W \subset V$.

(c) Umgekehrt gilt: Ist für jedes Element $x$ einer Menge $X$ eine Familie $\mathfrak{B}(x)$ von Teilmengen von $X$ gegeben, so dass (B1) – (B3) erfüllt sind, so gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $X$, für die $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{B}(x); x \in X\}$ eine Umgebungsbasis von $(X, \mathcal{T})$ ist, die aus $\mathcal{T}$–offenen Mengen besteht.

Beweis als Übung.

Die Bezeichnungen *offener Kern* und *abgeschlossene Hülle* in Definition 1.8 werden gerechtfertigt durch das folgende Lemma:

1.19. Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.*

(a) $\operatorname{int}(M)$ *ist die größte in $M$ enthaltene offene Teilmenge von $X$. Es gilt*

$$\operatorname{int}(M) = \bigcup \{G \subseteq M\,;\, G \text{ ist offen in } (X, \mathcal{T})\}\,. \tag{1.1}$$

(b) *Es gilt:* $M = \operatorname{int}(M) \iff M$ *ist offen in* $(X, \mathcal{T})$.

(c) $\operatorname{int}(M) = \operatorname{int}(\operatorname{int}(M))$.

(d) $\overline{M}$ *ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $X$, die $M$ enthält. Es gilt*

$$\overline{M} = \bigcap \{A \subseteq X\,;\, M \subseteq A \text{ und } A \text{ ist abgeschlossen}\}\,. \tag{1.2}$$

(e) *Es gilt:* $\overline{M} = M \iff M$ *ist abgeschlossen.*

(f) $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$.

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, daß $\operatorname{int}(M)$ offen in $(X, \mathcal{T})$ ist. Sei also $x_0 \in \operatorname{int}(M)$ beliebig. Nach Definition von $\operatorname{int}(M)$ gibt es dann eine offene Menge $G \subseteq M$ mit $x_0 \in G$. Da $G$ offen ist, ist $M$ auch Umgebung von allen Punkten $y \in G$. Somit ist also $G \subseteq \operatorname{int}(M)$. Zu jedem Punkt aus $\operatorname{int}(M)$ gibt es also eine Umgebung dieses Punktes, die noch ganz in $\operatorname{int}(M)$ enthalten ist. Nach Lemma 1.11 $\operatorname{int}(M)$ ist also offen.

Ist nun $G$ eine beliebige in $(X, \mathcal{T})$ offene Teilmenge von $M$, so ist $M$ für alle $x \in G$ eine Umgebung von $x$ und somit $G \subseteq \operatorname{int}(M)$. Insbesondere folgt (1.1).

(b) "$\Longrightarrow$" folgt unmittelbar aus (a) und "$\Longleftarrow$" ergibt sich unmittelbar aus der Definition der offenen Mengen und des offenen Kerns.

(c) folgt aus (a) und (b).

(d) Wir zeigen zunächst $M \subseteq \overline{M}$. Ist $x \in M$ beliebig, so gilt für alle Umgebungen $U$ von $x$ in $(X, \mathcal{T})$: $x \in U \cap M$ und somit $U \cap M \neq \emptyset$. Jeder Punkt aus $M$ ist also Berührungspunkt von $M$.

Wir zeigen nun, daß $\overline{M}$ abgeschlossen ist in $(X, \mathcal{T})$, indem wir zeigen, daß $X \setminus \overline{M}$ offen ist. Sei also $x \in X \setminus \overline{M}$ beliebig. Da $x$ kein Berührungspunkt von $M$ ist, gibt es eine Umgebung $U_x$ von $x$ mit $U \cap M = \emptyset$. Diese enthält nach Definition der Umgebung eine offene Menge $G_x$ mit $x \in G_x$. Für alle $y \in G_x$ ist also $U_x$ auch eine Umgebung von $y$ mit $U_x \cap M = \emptyset$. Es folgt also $G_x \subseteq X \setminus \overline{M}$. $X \setminus \overline{M}$ ist also Umgebung eines jeden Punktes $x \in X \setminus \overline{M}$. Nach Lemma 1.11 ist $X \setminus \overline{M}$ also offen und $\overline{M}$ somit abgeschlossen.

Sei nun $A$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von $X$ mit $M \subseteq A$. Da $X \setminus A$ offen ist, ist $X \setminus A$ zu jedem $x \in X \setminus A$ eine Umgebung von $x$, die zu $A$ und somit auch zu $M$ disjunkt ist. Die Punkte aus $X \setminus A$ sind daher keine Berührungspunkte von $M$. Also ist $\overline{M} \subseteq A$ und es folgt die Behauptung.

(e) folgt unmittelbar aus (d) und (f) ist eine Konsequenz von (d) und (e). □

Die folgenden Rechenregeln für die abgeschlossene Hülle und den offenen Kern werden in den Übungen gezeigt:

1.20. Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $A$ und $B$ zwei Teilmengen von $X$. Dann gilt:*
(a) $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$ *und* $\operatorname{int}(B) = X \setminus \overline{X \setminus B}$
(b) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$ *und* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(c) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$ *und* $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
(d) $\partial(X \setminus A) = \partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)$

1.21. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M$ von $X$ heißt *dicht* in $X$ bezüglich $\mathcal{T}$, falls $\overline{M} = X$. $(X, \mathcal{T})$ heißt *separabel* falls $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Man kann Topologien auch über Kern– oder Hüllenoperationen einführen. Für die Kernoperation führen wir dies im folgenden Lemma aus. Für die Hüllenoperation sei auf Übungsaufgabe verwiesen.

1.22. Lemma. *Sei $X$ eine Menge und sei $\kappa : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften*
(a) $\kappa(X) = X$.
(b) $\forall M \subseteq X \colon \kappa(M) \subseteq M$.
(c) $\forall A, B \subseteq X \colon \kappa(A \cap B) = \kappa(A) \cap \kappa(B)$.
(d) $\forall M \subseteq X \colon \kappa(\kappa(M)) = \kappa(M)$.

*Dann ist durch*
$$\mathcal{T}_\kappa := \{M \subseteq X\, ;\, \kappa(M) = M\}$$
*eine Topologie auf $X$ gegeben. Für diese gilt $\kappa(M) = \operatorname{int}(M)$ für alle $M \subseteq X$.*

Beweis. Aus (a) und (b) folgt $X \in \mathcal{T}_\kappa$ und $\emptyset \in \mathcal{T}_\kappa$. Mit (c) zeigt man induktiv, daß endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{T}_\kappa$ wieder in $\mathcal{T}_\kappa$ liegen. Ist schließlich $(M_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengen aus $\mathcal{T}_\kappa$ so folgt mit (b) und wegen
$$M_i = \kappa(M_i) = \kappa\Big(M_i \cap \bigcup_{j \in I} M_j\Big) = \kappa(M_i) \cap \kappa\Big(\bigcup_{j \in I} M_j\Big) \subseteq \kappa\Big(\bigcup_{j \in I} M_j\Big)$$
für alle $i \in I$ durch Übergang zur Vereinigung:
$$\bigcup_{i \in I} M_i \subseteq \kappa\Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big) \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i\,.$$
Also hat $\mathcal{T}_\kappa$ die definierenden Eigenschaften (O1) - (O3) einer Topologie.

Ist $M$ eine beliebige Teilmenge von $X$, so ist $\kappa(M) \in \mathcal{T}_\kappa$ (wegen (d)) und es folgt für alle $G = \kappa(G) \in \mathcal{T}_\kappa$ mit $G \subseteq M$:
$$\kappa(G) = \kappa(G \cap M) = \kappa(G) \cap \kappa(M) = G \cap \kappa(M) \subseteq M\,.$$
$\kappa(M)$ ist also die größte in $(X, \mathcal{T}_\kappa)$ offene Teilmenge von $M$, stimmt also nach Lemma 1.19 mit dem Inneren von $M$ bezüglich $\mathcal{T}_\kappa$ überein. □

1.23. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M$ eine Teilmenge von $X$. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt
- *Häufungspunkt* von $M$, falls jede Umgebung von $x_0$ einen von $x_0$ verschiedenen Punkt aus $M$ enthält.
- *isolierter Punkt* von $M$, falls es eine Umgebung $U$ von $x_0$ gibt mit $U \cap M = \{x_0\}$.

Mit diesen Bezeichnungen sieht man leicht:

1.24. Lemma. *Sei $M$ eine Teilmenge eines topologischen Raums $(X;\mathcal{T})$. Dann gilt*

$$\overline{M} = \{x \in X\,;\, x \text{ ist ein isolierter Punkt von } M \text{ oder ein Häufungspunkt von } M\},$$

*d.h. jeder Berührungspunkt von $M$ ist entweder ein isolierter Punkt von $M$ oder ein Häufungspunkt von $M$.*

1.25. Definition. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B}$ von offenen Teilmengen von $X$ heißt eine *Basis der Topologie* $\mathcal{T}$, falls jede in $(X,\mathcal{T})$ offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

1.26. Beispiele.

(a) Ist $(X,d)$ ein metrischer Raum, so ist $\{U_\varepsilon(x)\,;\, x \in X, \varepsilon > 0\}$ eine Basis der durch die Metrik $d$ definierten Topologie $\mathcal{T}_d$.

(b) Ist $X$ eine Menge, so ist $\big\{\{x\}\,;\, x \in X\big\}$ eine Basis für die diskrete Topologie auf $X$.

Man sagt: Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ genügt dem *zweiten Abzählbarkeitsaxiom*, falls es in $(X,\mathcal{T})$ eine abzählbare Basis für die Topologie $\mathcal{T}$ gibt.

1.27. Beispiele.

(a) Der $\mathbb{R}^N$ versehen mit der euklidischen Topologie $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. Eine abzählbare Basis für $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ ist gegebenen durch

$$\mathcal{B} = \{U_{1/n}(x)\,;\, x \in \mathbb{Q}^N\}\,.$$

(b) Jede Menge $X$ erfüllt - versehen mit der indiskreten Topologie - das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

1.28. Lemma. *Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge $X$, welche den folgenden beiden Bedingungen genügt:*

(a) $\displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.

(b) *Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und alle $x \in B_1 \cap B_2$ gibt es eine Menge $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

*Sei $\mathcal{T} := \{\bigcup_{B\in\mathcal{A}} B\,;\, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ die Menge aller Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie und jede Topologie auf $X$, welche $\mathcal{B}$ als eine Basis hat, stimmt mit $\mathcal{T}$ überein.*

Zum Beweis rechnet man nach, daß die Forderungen (O1) - (O3) erfüllt sind. Aus der Definition der Basis ergibt sich dann die Eindeutigkeitsaussage. Man beachte hierbei, daß $\emptyset \in \mathcal{T}$ gilt wegen $\emptyset = \bigcup_{B\in\emptyset} B$.

1.29. Definition. Sei $Y$ eine Teilmenge eines topologischen Raums $(X,\mathcal{T})$. Dann ist durch

$$\mathcal{T}_Y := \{G \cap Y\,;\, G \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf $Y$ gegeben. $\mathcal{T}_Y$ heißt die *Unterraumtopologie*, *Relativtopologie*, *Spurtopologie* oder *die von $\mathcal{T}$ auf $Y$ induzierte Topologie*.

Ist $Y$ Teilmenge eines metrischen Raums $(X,d)$ und $\mathcal{T}_d$ die durch die Metrik auf $X$ gegebene Topologie, so stimmt die durch $d|_{Y\times Y}$ auf $Y$ gegebene Topologie überein mit der von der durch $\mathcal{T}$ auf $Y$ induzierten Topologie. Ist $(X,d)$ separabel, so auch $(Y, d|_{Y\times Y})$ . In allgemeinen topologischen Räumen trifft dies im Allgemeinen nicht mehr zu. Dies wollen wir durch ein Beispiel belegen:

1.30. Beispiel. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Familie $\mathcal{B} := \{B_{\alpha,\beta}\,;\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ aller Teilmengen der Gestalt

$$B_{\alpha,\beta} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq \alpha, y \geq \beta\}\,.$$

$\mathcal{B}$ erfüllt offensichtlich die Bedingung (a) in Lemma 1.28 und wegen

$$B_{\alpha_1,\beta_1} \cap B_{\alpha_2,\beta_2} = B_{\alpha,\beta} \quad \text{mit } \alpha := \max\{\alpha_1,\alpha_2\} \text{ und } \beta := \max\{\beta_1,\beta_2\} \quad (\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R})$$

auch die Bedingung (b). Gemäß Lemma 1.28 ist $\mathcal{B}$ also Basis einer eindeutig bestimmten Topologie $\mathcal{T}$. Dann gilt:

(a) $M := \{(n,n)\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$. Der topologische Raum $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ ist also separabel.
(b) $Y := \{(x,-x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$ ist (versehen mit der Unterraumtopologie) nicht separabel.
(c) $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ ist nicht separiert, induziert aber auf $Y$ die separierte diskrete Topologie.

Beweis. (a) Ist $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und ist $U$ eine beliebige Umgebung von $(u,v)$ in $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$, so enthält $U$ eine offene Menge $G$ mit $(u,v) \in G$. Da $G$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist, gibt es also $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ mit $(u,v) \in B_{\alpha,\beta} \subseteq G \subseteq U$. Für alle $n \geq \max\{\alpha,\beta\}$ aus $\mathbb{N}$ gilt dann $(n,n) \in B_{\alpha,\beta} \cap M \subseteq U \cap M$. Also ist $(u,v) \in \overline{M}$ für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, d.h. $M$ liegt dicht in $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x,-x)\} = Y \cap B_{x,-x}$ offen in der durch $\mathcal{T}$ auf $Y$ induzierten Topologie, d.h. $\mathcal{T}$ induziert auf $Y$ die diskrete Topologie. Da $\mathbb{R}$ und somit auch $Y$ nicht abzählbar ist, kann $Y$ keine bezüglich der diskreten Topologie dichte abzählbare Teilmenge enthalten.

(c) ist nun klar. □

1.31. Definition. Sei $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge $X$. Sei

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} := \Big\{ \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S\,;\ \mathcal{F} \text{ endliche Teilmenge von } \mathcal{S} \Big\}\,.$$

$\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ erfüllt offensichtlich die Bedingung (b) in Lemma 1.28 und wegen

$$\bigcap_{S \in \emptyset} S = \{x \in X\,;\ x \in S \text{ für alle } S \in \emptyset\} = X$$

auch (a). Daher ist $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ Basis einer eindeutig bestimmten Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ auf $X$. $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ heißt die durch $\mathcal{S}$ *erzeugte Topologie* und $\mathcal{S}$ nennt man ein *Erzeugendensystem* oder eine *Subbasis* dieser Topologie.

**Übungsaufgaben zu Kapitel 1.**

1.1. Aufgabe. Wir betrachten in $\mathbb{R}$ das folgende Mengensystem

$$\mathcal{T} := \big\{(-\infty,\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\big\} \cup \{\emptyset\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.
(b) Beschreiben Sie die abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.
(c) Berechnen Sie die Menge der Berührungspunkte und den topologischen Rand von $\{2007\}$ in $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.
(d) Berechnen Sie das Innere und die Abschließung von $(-2007,\infty)$ in $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

1.2. Aufgabe. Geben Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X := \{1,2\}$ an.

1.3. Aufgabe. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) $M$ ist offen in $(X,\mathcal{T})$ genau dann, wenn $M \cap \partial M = \emptyset$.

(b) $\overline{M} = M \cup \partial M$.

1.4. AUFGABE. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Für $x \in X$ sei $[x] := \{y \in X\,;\, y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von $x$ bezüglich $\sim$. Mit $X/\sim$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{T}_\sim := \big\{G \subseteq X/\sim\,;\, \{x \in X\,;[x] \in G\} \in \mathcal{T}\big\}$$

eine Topologie auf $X/\sim$ definiert. Diese heißt die *Quotiententopologie* und der topologische Raum $(X/\sim, \mathcal{T}_\sim)$ heißt der *Quotientenraum* von $(X, \mathcal{T})$ bezüglich $\sim$

1.5. AUFGABE. Zeigen Sie: Ist $(X, d)$ ein separabler metrischer Raum und $\emptyset \neq Y \subseteq X$, so ist auch $(Y, d|_{Y \times Y})$ separabel.

1.6. AUFGABE. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $A$ und $B$ zwei Teilmengen von $X$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$ und $\operatorname{int}(B) = X \setminus \overline{X \setminus B}$.
(b) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(c) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$ und $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Belegen Sie durch ein Beispiel, daß diese Inklusionen echt sein können.
(d) $\partial(X \setminus A) = \partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)$.

1.7. AUFGABE. Sei $X$ eine Menge und sei $h : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(a) $h(\emptyset) = \emptyset$.
(b) $\forall M \subseteq X$: $M \subseteq h(M)$.
(c) $\forall A, B \subseteq X$: $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$.
(d) $\forall M \subseteq X$: $h(h(M)) = h(M)$.

Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}_h$ auf $X$, deren abgeschlossene Teilmengen übereinstimmen mit

$$\mathcal{A}_h := \{M \subseteq X\,;\, h(M) = M\}\,.$$

Für diese Topologie gilt $h(M) = \overline{M}$ für alle $M \subseteq X$.

1.8. AUFGABE. Sei $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ versehen mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \big\{G \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,;\, \forall x \in G\, \exists \varepsilon > 0 : \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,;\, |y - x| < \varepsilon\} \subseteq G\big\}\,.$$

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis besitzt, die aus Mengen besteht, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.