KAPITEL 2

Stetigkeit und Konvergenz

In metrischen Räumen kann der Begriff der Stetigkeit in einem Punkt auf mehrere Arten eingeführt werden. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem metrischen Raum (X, d) in einen metrischen Raum (Y, d') heißt *stetig in einem Punkt* $x_0 \in X$, falls eine der vier äquivalenten Bedingungen des folgenden aus der Analysisvorlesung bekannten Lemmas erfüllt ist.

2.1. Lemma (Vergl. z.B. Lemma 8.9 in [**1**]). *Seien (X, d) und (Y, d') zwei metrische Räume. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ und einen Punkt $x_0 \in X$ sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(a) *Für jede Umgebung U von $f(x_0)$ in (Y, d') ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x_0 in (X, d).*
(b) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \qquad f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.
(c) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X : \quad d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
(d) *f ist folgenstetig in x_0, d.h. für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in (X, d) gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$.*

Während die zweite und dritte dieser äquivalenten Bedingungen in topologischen Räumen keinen Sinn machen, ist die erste problemlos auf den Fall allgemeiner topologischer Räume übertragbar. Wir definieren also:

2.2. Definition. $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ seien topologische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt *stetig in einem Punkt* $x \in X_1$, falls für jede Umgebung U von $f(x)$ die Menge $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in $(X_1, \mathcal{T}_1)$ ist. f heißt *stetig*, falls f in allen $x \in X_1$ stetig ist.

Wie steht es nun mit dem Folgenkriterium? Die Konvergenz von Folgen läßt sich ohne Probleme in topologischen Räumen einführen:

2.3. Definition. Ist x_0 ein Punkt in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, so nennen wir eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ *konvergent* in $(X, \mathcal{T})$ *gegen* x_0, falls es zu jeder Umgebung U von x_0 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_=$ gilt: $f(x_n) \in U$. Wir schreiben dann $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$.

Der Grenzwert ist im nicht separierten Fall hierdurch nicht eindeutig bestimmt. Ist z.B. $\mathcal{T}$ die indiskrete auf X, so konvergiert jede Folge aus X gegen jeden Wert aus X.

2.4. Lemma. *Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}')$, die in einem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist, so ist f in x_0 auch folgenstetig, d.h.: Für jede gegen x_0 in $(X, \mathcal{T})$ konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$.*

Beweis. Sei also $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige in $(X, \mathcal{T})$ gegen x_0 konvergente Folge und sei U eine beliebige Umgebung von $f(x_0)$ in $(Y, \mathcal{T}')$. Wegen der Stetigkeit von f in x ist dann $V := f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x_0 in $(X, \mathcal{T})$. Wegen $x_n \to x_0$ in $(X, \mathcal{T})$ für $n \to \infty$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_=$ $x_n \in V$ und somit auch $f(x_n) \in U$ gilt. Damit folgt $f(x_n) \to f(x_0)$ in $(Y, \mathcal{T}')$ für $n \to \infty$. $\square$

Anders als in metrischen Räumen gilt die Umkehrung hierzu in topologischen Räumen im allgemeinen nicht. Vergl. hierzu die Aufgabe 2.2.

2.5. Satz. *Für eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig.*
(b) *Für jede Menge $M \subset X$ ist $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.*
(c) *Ist $A \subset Y$ abgeschlossen, so ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.*
(d) *Ist $G \subset Y$ offen, so ist $f^{-1}(G)$ offen in $(X, \mathcal{T})$.*

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(b)": Sei f auf X stetig und sei $M \subseteq X$ beliebig. Ist x ein beliebiger Punkt aus $\overline{M}$ und $V \subseteq Y$ eine beliebige Umgebung von $f(x)$ in $(Y, \mathcal{T}')$, so ist wegen der Stetigkeit von f in x die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in $(X, \mathcal{T})$. Da x ein Berührungspunkt von M ist, gibt es daher ein $u \in f^{-1}(V) \cap M$. Es folgt $f(u) \in V \cap f(M)$ und somit $V \cap f(M) \neq \emptyset$ für alle Umgebungen V von $f(x)$. Also ist $f(x) \in \overline{f(M)}$ für alle $x \in \overline{M}$.

"(b)$\Longrightarrow$(c)": Ist (b) erfüllt und ist A eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von Y, so folgt mit $M := f^{-1}(A)$ (wegen $A = \overline{A}$ nach Lemma 1.19) aus (b)

$$f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)} \subseteq \overline{A} = A$$

und hieraus

$$f^{-1}(A) = M \subseteq \overline{M} = \overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(A)\,.$$

Nach Lemma 1.19 ist $f^{-1}(A)$ also abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

"(c)$\Longrightarrow$(d)": Sei (c) erfüllt und sei $G \subseteq Y$ eine beliebige in $(Y, \mathcal{T}')$ offene Menge. Dann ist $Y \setminus G$ abgeschlossen in $(Y, \mathcal{T}')$ und daher nach Voraussetzung auch $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$. Also ist $f^{-1}(G)$ offen in $(X, \mathcal{T})$.

"(d)$\Longrightarrow$(a)": Ist schließlich (d) erfüllt und $x \in X$ beliebig sowie U eine beliebig vorgegebene Umgebung von $f(x)$ in $(Y, \mathcal{T}')$, so gibt es nach Definition der Umgebung eine offene Menge $G \in \mathcal{T}'$ mit $f(x) \in G \subseteq U$. Nach Voraussetzung ist daher $f^{-1}(G)$ offen in $(X, \mathcal{T})$ und erfüllt $x \in f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(U)$. Für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung U von $f(x)$ in $(Y, \mathcal{T}')$ ist daher $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in $(X, \mathcal{T})$, d.h. f ist in allen $x \in X$ stetig. □

2.6. Satz. *Seien $(X_j, \mathcal{T}_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ topologische Räume und seien $f : X_1 \to X_2$ und $g : X_2 \to X_3$ Abbildungen. Sind f und g stetig (bzw. f stetig in x und g stetig in $f(x)$), so ist auch $g \circ f$ stetig (bzw. stetig in x).*

Dies rechnet man leicht nach.

2.7. Definition. Eine Menge X heißt *teilweise* oder auch *partiell geordnete Menge* (bei vielen Autoren auch *geordnete Menge*), falls sie mit einer *Ordnungsrelation* "$\preceq$" versehen ist, das ist eine Relation mit den Eigenschaften:

(i) $\forall\, x \in X : x \preceq x$.
(ii) $\forall\, x, y \in X : (x \preceq y \text{ und } y \preceq x) \Rightarrow x = y$.
(iii) $\forall\, x, y, z \in X : (x \preceq y \text{ und } y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$.

Zwei Elemente von X müssen hierbei nicht vergleichbar sein. Gilt jedoch für alle $a, b \in X$ die Beziehung $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, so heißt die Menge X *total geordnet*.

Eine teilweise geordnete Menge $(X, \preceq)$ heißt *nach oben* bzw. *nach unten gerichtet* falls es zu je zwei Elementen $a, b \in X$ eine *obere* bzw. *untere Schranke* $c \in X$ gibt, also ein Element $c \in X$ mit $a \preceq c$ und $b \preceq c$ bzw. mit $c \preceq a$ und $c \preceq b$.

2.8. Beispiele. (a) Alle Teilmengen X von $\mathbb{R}$ sind bzgl "$\leq$" total geordnet und nach oben und unten gerichtet.

(b) Die Menge aller endlichen Teilmengen einer Menge I ist durch die Inklusion halbgeordnet und nach oben gerichtet.

(c) Ist $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis eines Punktes x in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, so ist die durch die Inklusion auf $\mathfrak{B}(x)$ gegebene teilweise Ordnung nach unten gerichtet (vergl. (B2) in Bemerkung 1.18).

Ist $(\mathbb{A}, \preceq)$ eine nach unten gerichtete Menge, so ist durch

$$\alpha \sqsubseteq \beta :\Longleftrightarrow \beta \preceq \alpha \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{A})$$

eine Ordnung gegeben, die nach oben gerichtet ist. Wenn im folgenden von gerichteten Mengen die Rede ist, meinen wir stets nach oben gerichtete Mengen. Wegen der eben angegebenen Konstruktion ist dies keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

Eine Folge in einer Menge X ist bekanntlich eine Abbildung von der (nach oben) gerichteten Menge $\mathbb{N}$ (oder von $\{n \in \mathbb{Z}\,;\, n \geq m\}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$) nach X. Allgemeiner definieren wir:

2.9. Definition. Unter einem *Netz* oder *einer verallgemeinerten Folge* oder *Moore–Smith–Folge* in einer Menge X verstehen wir eine Abbildung $x : \alpha \mapsto x_\alpha$ von einer gerichteten Menge $\mathbb{A}$ nach X. Wie bei Folgen schreiben wir sie in der Form $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ oder kurz $(x_\alpha)_\alpha$, falls der Indexbereich $\mathbb{A}$ aus dem Zusammenhang her klar ist.

Jede Folge insbesondere ein Netz.

Der Begriff der Konvergenz läßt sich nun leicht auf Netze übertragen:

2.10. Definition. Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ über der gerichteten Indexmenge $(\mathbb{A}, \preceq)$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *konvergent* gegen einen Punkt $x_* \in X$ in $(X, \mathcal{T})$, falls es zu jeder Umgebung U von x_* ein $\alpha_U \in \mathbb{A}$, so daß für alle $\alpha \succeq \alpha_U$ gilt $x_\alpha \in U$. Wir schreiben dann $x_\alpha \to x_*$.

In einem metrischen Raum (X, d) ist bekanntlich ein Punkt $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt einer Teilmenge M von X, wenn es eine gegen x konvergente Folge aus $M \setminus \{x\}$. Die Aussage bleibt richtig in allgemeinen topologischen Räumen, wenn wir "Folgen" durch "Netze" ersetzen.

2.11. Lemma. *Genau dann ist ein Punkt $a \in X$ ein Häufungspunkt einer Teilmenge M eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$, wenn es ein gegen a konvergentes Netz in $M \setminus \{a\}$ gibt.*

Beweis. Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein gegen a konvergentes Netz aus $X \setminus M$, indiziert durch eine gerichtete Indexmenge $(\mathbb{A}, \preceq)$ und ist U eine beliebige Umgebung von a in $(X, \mathcal{T})$, so gibt es nach Definition der Konvergenz ein $\alpha_U \in \mathbb{A}$, so daß für alle $\alpha \succeq \alpha_U$ gilt $x_\alpha \in U \cap (M \setminus \{a\})$. Insbesondere ist $U \cap (M \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von a, d.h.: a ist eine Häufungspunkt von M.

Sei nun a ein Häufungspunkt der Menge M. Die Menge $\mathfrak{U}(a)$ aller Umgebungen ist eine durch die Inklusion teilweise geordnet und nach unten gerichtete, also durch

$$U \preceq V :\Longleftrightarrow V \subseteq U \qquad (U, V \in \mathfrak{U}(a))$$

noch oben gerichtete Menge. Da a ein Häufungspunkt ist, gibt es zu jeder Umgebung U von a ein $x_U \in M \setminus \{a\}$. Hierdurch ist ein Netz $(x_U)_{U \in \mathfrak{U}(a)}$ von Punkten aus $M \setminus \{a\}$ gegeben. Ist U eine beliebige Umgebung von a, so gilt für alle $V \in \mathfrak{U}(a)$ mit $V \succeq U$ (d.h. mit $V \subseteq U$) $x_V \in V \subseteq U$. Also konvergiert $(x_U)_{U \in \mathfrak{U}(a)}$ gegen a. $\square$

Wie wir schon im Fall konvergenter Folgen gesehen haben, kann es mehrere Punkte geben, gegen die ein Netz konvergiert. In topologischen Hausdorffräumen ist dies jedoch nicht möglich:

2.12. Satz. *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$(X, \mathcal{T})$ ist ein Hausdorffraum.*
(b) *Jedes konvergente Netz in $(X, \mathcal{T})$ hat einen eindeutig bestimmten Grenzwert.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Hausdorffraum und sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein gegen einen Punkt $a \in X$ und gegen einen Punkt $b \in X$ konvergentes Netz aus X.

Annahme: $a \neq b$. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Umgebung U_a von a und eine Umgebung U_b von b mit $U_a \cap U_b = \emptyset$. Wegen $x_\alpha \to a$ und $x_\alpha \to b$ gibt es $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{A}$ mit $x_\alpha \in U_a$ für alle $\alpha \succeq \alpha_a$ und $x_\beta \in U_b$ für alle $\beta \succeq \alpha_b$. Da $(\mathbb{A}, \preceq)$ gerichtet ist, gibt es ein $\gamma \in \mathbb{A}$ mit $\alpha_a \preceq \gamma$ und $\alpha_b \preceq \gamma$. Hieraus erhält man den Widerspruch $x_\gamma \in U_a \cap U_b = \emptyset$. Also war die Annahme falsch. Das Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ kann also nur gegen höchstens einen Punkt konvergieren.

Ist $(X, \mathcal{T})$ kein Hausdorffraum, so gibt es zwei Punkte $a, b \in X$ mit $a \neq b$, so daß für alle Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(a)$ von a und $V \in \mathfrak{U}(b)$ von b wenigstens ein Punkt $x_{(U,V)} \in U \cap V$ existiert. $\mathfrak{U}(a) \times \mathfrak{U}(b)$ wird zu einer gerichteten Indexmenge durch

$$(U_1, V_1) \preceq (U_2, V_2) :\Longleftrightarrow U_2 \subseteq U_1 \text{ und } V_2 \subseteq V_1, \qquad (U_1, V_1), (U_2, V_3) \in \mathfrak{U}(a) \times \mathfrak{U}(b))\,.$$

Sind nun $U_a \in \mathfrak{U}(a)$ und $V_b \in \mathfrak{U}(b)$ beliebig vorgegeben, so gilt für alle $(U, V) \in \mathfrak{U}(a) \times \mathfrak{U}(b)$ mit $(U_a, V_b) \preceq (U, V)$: $x_{(U,V)} \in U \cap V \subseteq U_a \cap V_b$. Also folgt $x_{(U,V)} \to a$ und $x_{(U,V)} \to b$. □

Das Analogon zum Folgenkriterium (Äquivalenz von (a) und (d) in Lemma 2.1 lautet nun:

2.13. Satz. *Für eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und einen Punkt $a \in X$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist in a stetig.*
(b) *Für* **jedes** *gegen a in $(X, \mathcal{T}_X)$ konvergente Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ gilt $f(x_\alpha) \to f(a)$.*

Beweis. Sei f in a stetig und sei $(x_\alpha)_{alpha \in \mathbb{A}}$ ein beliebiges in $(X, \mathcal{T})$ gegen a konvergentes Netz in X. Ist U eine beliebige Umgebung von $f(a)$ in $(Y, \mathcal{T}')$, so ist $f^{-1}(U)$ wegen der Stetigkeit von f in a eine Umgebung von a in $(X, \mathcal{T})$. Wegen $x_\alpha \to a$ gibt es also ein $\alpha_0 \in \mathbb{A}$, so daß für alle $\alpha \succeq \alpha_0$ aus $\mathbb{A}$ gilt $x_\alpha \in f^{-1}(U)$ also auch $f(a) \in U$. Also gilt $f(x_\alpha) \to f(a)$ in $(Y, \mathcal{T}')$.

Sei nun (b) erfüllt. Wir machen die Annahme, daß f in a unstetig ist. Dann gibt es eine Umgebung U von $f(a)$ in $(Y, \mathcal{T}')$, für die $W := f^{-1}(U)$ keine Umgebung von a ist. Die Menge $\mathfrak{U}(a)$ aller Umgebungen von a in $(X, \mathcal{T})$ ist gerichtet vermöge der Ordnungsrelation

$$V_1 \preceq V_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad V_2 \subseteq V_1 \qquad (V_1, V_2 \in \mathfrak{U}(a)).$$

Da W keine Umgebung von a ist, gibt es zu jedem $V \in \mathfrak{U}(a)$ ein $x_V \in X \setminus W$. Das Netz $(x_V)_{V \in \mathfrak{U}(a)}$ ist dann ein in $(X, \mathcal{T})$ gegen a konvergentes Netz, denn: Ist $V_0 \in \mathfrak{U}(a)$ beliebig, so gilt für alle $V \succeq V_0$ (d.h. $V \subseteq V_0$) aus $\mathfrak{U}(a)$: $x_V \in V \subseteq V_0$. Nach Voraussetzung gilt $f(x_\alpha \to f(a)$ in $(Y, \mathcal{T}')$ im Widerspruch zu $f(x_\alpha) \notin U$ für alle $\alpha \in \mathfrak{U}(a)$. Die Annahme war also falsch und es folgt die Stetigkeit von f in a. □

2.14. Definition. Zwei topologische Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ heißen zueinander *homöomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $f : X_1 \to X_2$ gibt, so daß f und f^{-1} stetig sind. Eine solche Abbildung f heißt dann eine *Homöomorphie*.

Zwei zueinander homöomorphe topologische Räume sind im Rahmen der Topologie nicht unterscheidbar, werden also als topologisch nicht wesentlich verschieden angesehen.

2.15. Bemerkung. (a) Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ eine Homöomorphie.

(b) $f : X_1 \to X_2$ ist genau dann eine Homöomorphie von $(X_1, \mathcal{T}_1)$ auf $(X_2, \mathcal{T}_2)$ wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
   i) $G \subset X_1$ offen $\Rightarrow f(G)$ offen.
   ii) $G \subset X_2$ offen $\Rightarrow f^{-1}(G)$ offen.
   iii) f bijektiv.

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt T_1–*Raum*, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ Umgebungen U_j von x_j gibt $(j = 1, 2)$ mit $x_2 \notin U_1$ und $x_1 \notin U_2$.

2.1. Aufgabe. Sei X eine überabzählbare Menge und sei $\mathcal{T}_0$ die durch

$$\mathcal{T}_0 := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \,;\, X \setminus G \text{ ist höchstens abzählbar unendlich}\}$$

gegebene Topologie auf X. Zeigen Sie:

(a) $(X, \mathcal{T}_0)$ ist ein T_1–Raum aber kein T_2–Raum.
(b) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann konvergent in $(X, \mathcal{T}_0)$ gegen ein $x_0 \in X$, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $x_n = x_0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
(c) Jede Folge aus X kann in $(X, \mathcal{T}_0)$ gegen höchstens ein $x_0 \in X$ konvergieren.

2.2. Aufgabe. Sei nun speziell $X = \mathbb{R}$ in Aufgabe 2.1. Zeigen Sie:

(a) Jede Abbildung von $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$ ist folgenstetig. Hierbei bezeichne $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$.
(b) Die Abbildungen

$$\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$$

sind in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig.

2.3. Aufgabe. Sei weiterhin $X = \mathbb{R}$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_0$ aus Aufgabe 2.1 und sei $M := \{2006\} \cup (2007, 2008)$.

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von M.
(b) Zeigen Sie, daß es keine bzgl. $\mathcal{T}_0$ gegen 2007 konvergente Folge aus M gibt.

2.4. Aufgabe. Seien $(X; \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ zwei topologische Räume. $\mathcal{B}_Y$ sei eine Basis und $\mathcal{S}_Y$ sei eine Subbasis für $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Zeigen Sie: Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f ist stetig.
(b) $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ für alle $B \in \mathcal{B}_Y$.
(c) $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ für alle $S \in \mathcal{S}_Y$.

Erinnerung: Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt *Cauchy–Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Jede konvergente Folge ist insbesondere eine Cauchy–Folge. (X, d) heißt *vollständig*, falls in (X, d) jede Cauchy–Folge konvergent ist.

In Analogie zu Cauchy–Folgen können wir *Cauchy–Netze* definieren: Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt Cauchy–Netz, falls gilt:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\alpha_0\in\mathbb{A}\quad\forall\alpha,\beta\succeq\alpha_0:\qquad d(x_\alpha,x_\beta)<\varepsilon.$$

2.5. Aufgabe. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Jedes konvergente Netz in (X,d) ist ein Cauchy–Netz.
(b) (X,d) ist vollständig genau dann, wenn jedes Cauchy–Netz in (X,d) konvergent ist.

2.6. Aufgabe. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, d.h. in dem jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Zeigen Sie:

(a) Eine Abbildung $f:X\to Y$ von $(X,\mathcal{T})$ in einen topologischen Raum $(Y,\mathcal{T}')$ ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.
(b) Ein Punkt $x\in X$ ist genau dann Häufungspunkt einer Menge $M\subseteq X$, wenn es eine gegen x in $(X,\mathcal{T})$ konvergente Folge gibt.

2.7. Aufgabe. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (versehen mit der euklidischen Topologie). Zeigen Sie: Die Menge $C((X,\mathcal{T}),\mathbb{K})$ der stetigen Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{K}$ ist bezüglich der punktweisen Operationen der Addition, der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren eine Unteralgebra der Algebra aller auf X definierten $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen.

2.8. Aufgabe. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $f,g:X\to\mathbb{R}$ stetige reellwertige Funktionen ($\mathbb{R}$ sei versehen mit der euklidischen Topologie). Zeigen Sie die Stetigkeit der durch

$$(f\vee g)(x):=\max\{f(x),g(x)\}\quad\text{und}\quad(f\wedge g)(x):=\min\{f(x),g(x)\}\qquad(x\in X)$$

definierten Funktionen $f\vee g, f\wedge g:X\to\mathbb{R}$.