KAPITEL 3

Vergleich und Erzeugung von Topologien und topologischen Räumen

3.1. Definition. Auf einer Menge X seien zwei Topologien τ und σ gegeben. Ist jede bezüglich σ offene Menge auch bezüglich τ offen, so heißt σ *gröber (schwächer,* im Englischen *weaker)* als τ und τ *feiner (stärker, stronger)* als σ. Soll die Gleichheit von σ und τ hierbei ausdrücklich ausgeschlossen sein, so heißt σ *echt gröber* als τ und τ *echt feiner* als σ.

Mit Definition 2.2 und Satz 2.5 erhält man unmittelbar:

3.2. Satz. *Auf der Menge X seien zwei Topologien σ, τ gegeben. Äquivalent sind:*

(a) *τ ist feiner als σ bzw. σ ist gröber als τ.*
(b) $\mathrm{id}_X : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ *ist stetig.*
(c) *Für alle $x \in X$ gilt: Jede Umgebung von x bezüglich σ ist auch Umgebung von x bezüglich τ.*
(d) *Jede bezüglich σ abgeschlossene Menge ist auch bezüglich τ abgeschlossen.*
(e) *Für jede Menge $A \subseteq X$ ist $\overline{A}^{\tau} \subseteq \overline{A}^{\sigma}$.*
(f) $\sigma \subseteq \tau$.

Hierbei bedeute $\overline{A}^{\tau}$ (bzw. $\overline{A}^{\sigma}$) die Abschließung von A bezüglich τ (bzw. σ).

3.3. Bemerkungen. (a) Die Relation "feiner" definiert eine teilweise Ordnung auf der Menge aller Topologien auf X.
(b) Die indiskrete Topologie ist die gröbste und die diskrete Topologie die feinste von allen auf einer Menge X möglichen Topologien.
(c) Es kann vorkommen, daß es auf einer Menge X zwei nicht vergleichbare Topologien gibt. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt.

3.4. Beispiel. Sei $X = \{0,1\}$, $\mathcal{T} := \{X, \emptyset, \{1\}\}$ und $\mathcal{T}' := \{X, \emptyset, \{0\}\}$ sind Topologien auf X. $\{0\}$ ist offen bezüglich $\mathcal{T}'$ aber nicht bezüglich $\mathcal{T}$. $\{1\}$ ist offen bezüglich $\mathcal{T}$ aber nicht bezüglich $\mathcal{T}'$. Also sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ nicht vergleichbar.

Wenn man eine Ordnungsrelation vorliegen hat, fragt man natürlich nach der Existenz von oberen und unteren Grenzen.

3.5. Satz. *Sei $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine nicht leere Familie von Topologien auf einer Menge X. Unter den Topologien auf X, die gröber sind als alle τ_λ, $\lambda \in \Lambda$, gibt es genau eine feinste Topologie τ_u. Diese heißt der Durchschnitt oder die untere Grenze der Topologien τ_λ.*

Beweis. Man rechnet nach, daß $\tau_u := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda$ die Bedingungen (O1) - (O3) erfüllt, also eine Topologie auf X definiert. Wegen $\tau_u \subseteq \tau_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ ist τ_u gröber als alle τ_λ, $\lambda \in \Lambda$. Ist nun τ eine weitere Topologie auf X, die gröber als alle τ_λ, $\lambda \in \Lambda$, ist, so folgt $\tau \subseteq \tau_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und damit $\tau \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda = \tau_u$. Also ist τ_u feiner als τ. $\square$

Die Frage nach der oberen Grenze einer Familie $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Topologien auf X ist gleichbedeutend mit der Frage, ob es eine gröbste Topologie auf X gibt, für die alle Mengen aus $\mathcal{S} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda$ offen sind. Diese Frage beantworten wir in

3.6. Satz. *Sei $(\tau_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Topologien auf einer Menge X. Unter den Topologien auf X, die feiner als alle $\tau_i, i \in I$ sind, gibt es eine eindeutig bestimmte gröbste Topologie τ_o. Diese nennt man die obere Grenze der Topologien $\tau_i, i \in I$. Sie wird erzeugt durch $S := \bigcup_{i\in I} \tau_i$.*

Beweis. Sei τ_0 die gemäß Definition 1.31 durch $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie. Die Elemente von τ_0 sind nach Definition 1.31 und Lemma 1.28 alle Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$. Da jede Topologie auf X, für die alle Elemente von $\mathcal{S}$ offen sind auch alle Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$ enthalten muß, ist τ_0 die gröbste Topologie auf X mit dieser Eigenschaft. □

3.7. Satz. *Sei X eine Menge und seien topologische Räume (X_i, τ_i) $(i \in I)$ und Abbildungen $f_i : X \to X_i$ für alle $i \in I$ gegeben.*

(a) *Die durch $\mathcal{S} := \bigcup_{i\in I} \{f_i^{-1}(G) | G \in \tau_i\}$ gemäß Definition 1.31 erzeugte Topologie τ auf X ist die gröbste Topologie auf X, so daß alle f_i $(i \in I)$ stetig sind.*

(b) *Für jeden topologischen Raum (Y, τ_Y) und jede Abbildung $g : Y \to X$ gilt: g ist stetig (bezüglich τ) $\iff$ $f_i \circ g$ ist stetig für alle $i \in I$.*

(c) *Ist σ eine weitere Topologie auf X, für die die Aussage in (b) gilt, so stimmt σ schon mit τ überein. τ heißt die Initialtopologie auf X bzgl. $((X_i, \tau_i, f_i))_{i\in I}$.*

(d) *Ist $a \in X$, so ist ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ in (X, τ) genau dann konvergent gegen a, wenn für alle $i \in I$ das Netz $(f_i(x_\alpha))_{\alpha\in\mathbb{A}}$ in (X_i, τ_i) gegen $f_i(a)$ konvergiert.*

Beweis. (a) Offensichtlich ist τ eine Topologie auf X, für die alle f_i $(i \in I)$ stetig sind. Ist τ' eine weitere Topologie auf X mit dieser Eigenschaft, so folgt insbesondere $\mathcal{S} \subseteq \tau'$ und daher auch (wegen (O1) - (O3)) $\tau \subseteq \tau'$, d. h. τ ist gröber als τ'.

(b) " $\Rightarrow$" Ist g stetig, so auch $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ nach Satz 2.6 und (a).

" $\Leftarrow$" Sei $S \in \mathcal{S}$ beliebig. Dann gilt $S = f_i^{-1}(G_i)$ für ein $i \in I$ und ein $G_i \in \tau_i$. Also ist $g^{-1}(S) = g^{-1}(f_i^{-1}(G)) = (f_i \circ g)^{-1}(G)$ offen bezüglich τ_Y, da nach Vor. $f_i \circ g$ stetig ist. Wegen Satz 2.6 folgt die Stetigkeit von g.

(c) Sei σ eine Topologie auf X, dioe ebenfalls die Eigenschaft aus (b) besitzt. Da id : $(X, \sigma) \to (X, \sigma)$ stetig ist, folgt die Stetigkeit von $f_i = f_1 \circ \mathrm{id} : (X, \sigma) \to (X, \sigma)$ für alle $i \in I$. Wähle in (b) speziell $Y = X$, $\tau_Y = \sigma$ und betrachte $g_1 : (X, \sigma) \to (X, \tau)$ mit $g_1(x) = x$ für alle $x \in X$. Dann ist $f_i \circ g_1 = f_i : (X, \sigma) \to (X_i, \tau_i)$ stetig für alle $i \in I$ und wegen (b) folgt die Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : (X, \sigma) \to (X, \tau)$.

Da auch τ die Eigenschaft in (b) hat, folgt analog die Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ und damit $\tau = \sigma$.

(d) Die Hinrichtung folgt wegen der Stetigkeit der Abbildungen $f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$ unmittelbar aus Satz 2.13.

Sei umgekehrt $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ ein Netz, so daß für alle $i \in I$ gilt $f_i(x_\alpha) \to f_i(a)$ in (X_i, τ_i), und sei U eine beliebige Umgebung von a in (X, τ). Da $\mathcal{S}$ eine Subbasis von τ ist, bilden nach Definition 1.31 die endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ eine Basis für τ. Es gibt also endlich viele $i_1, \ldots, i_n \in I$ und bezüglich τ_{i_k} offene Mengen G_k in X_{i_k}, $k = 1, \ldots, n$, mit

$$a \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_k) \subseteq V \subseteq U\,.$$

Wegen $f_{i_k}(x_\alpha) \to f_{i_k}(a)$ gibt es also $\alpha_k \in \mathbb{A}$ so daß für alle $\alpha \geq \alpha_k$ gilt: $f_{i_k}(x_\alpha) \in G_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Da $\mathbb{A}$ gerichtet ist gibt es eine obere Schranke zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, d.h. ein α_0

mit $\alpha_k \leq \alpha_0$ für $k = 1, \ldots, n$. Für alle $\alpha \geq \alpha_0$ und $k = 1, \ldots, n$ folgt $f_{i_k}(x_\alpha) \in G_k$. Also gilt für alle $\alpha \geq \alpha_0$:

$$x_\alpha \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_k) \subseteq U\,.$$

Dies zeigt $x_\alpha \to a$ in (X, τ). $\square$

Dieser Satz gibt uns die Möglichkeit, mit Hilfe gegebener topologischer Räume, neue topologische Räume einzuführen.

3.8. Beispiel. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. $\iota : Y \to X$ sei die natürliche Inklusionsabbildung ($\iota(y) = y$ für alle $y \in Y$). Die durch (X, τ, ι) gegebene Initialtopologie τ_Y stimmt mit der in Definition 1.29 eingeführten *Unterraumtopologie* überein, denn

$$\tau_Y = \{\iota^{-1}(G)\,;\, G \in \tau\} = \{G \cap Y\,;\, G \in \tau\}.$$

3.9. Topologische Produkte. Sei $\emptyset \neq I$ eine Indexmenge und sei für jedes $i \in I$ ein topologischer Raum (X_i, τ_i) gegeben. Sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ das kartesische Produkt der Mengen X_i. Wir versehen X mit der Initialtopologie τ bezüglich $((X_i, \tau_i, p_i))_{i\in I}$, wobei $p_j : X \to X_j$ die kanonischen Projektionen sind (mit $p_j((x_i)_{i\in I}) := x_j$ für $(x_i)_{i\in I} \in X$) $(j \in I)$. Gemäß 2.7(a) ist eine Subbasis $\mathcal{S}$ für τ gegeben durch

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \{p_i^{-1}(G_i) | G_i \in \tau_i\} = \bigcup_{i\in I} \left\{ \prod_{j\in I} U_{ij}\,;\, U_{ij} = \begin{cases} X_j & j \neq i \\ G_i & j = i \end{cases}\,, G_i \in \tau_i \right\}\,.$$

τ heißt die *Produkttopologie* auf X und (X, τ) heißt das *topologische Produkt der Räume* (X_i, τ_i) $(i \in I)$.

Für die Funktionalanalysis besonders wichtige Initialtopologien sind die durch ein Dualsystem gegebenen schwachen Topologien.

3.10. Definition. Seien E, F zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

(a) Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \to \mathbb{K}$ heißt *Bilinearform*, falls für alle $x \in E$ und alle $y \in F$ die Abbildungen

$$\begin{array}{llll} f_x : F \to \mathbb{K} & \text{mit} & f_x(v) := \langle x, v\rangle \text{ für} & v \in F \quad \text{und} \\ g_y : E \to \mathbb{K} & \text{mit} & g_y(u) := \langle u, y\rangle \text{ für} & u \in E \end{array}$$

linear sind.

(b) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform auf $E \times F$. Das Tripel $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt *Dualsystem* und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine *Dualität zwischen E und F*, falls gilt:
(S1) $\forall\, 0 \neq x \in E\; \exists\, y \in F : \langle x, y\rangle \neq 0$.
(S2) $\forall\, 0 \neq y \in F\; \exists\, x \in E : \langle x, y\rangle \neq 0$.
Statt $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ schreiben wir auch kürzer $\langle E, F\rangle$.

3.11. Beispiele. (a) Sei E ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $E^\#$ der Raum aller $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$. Dann ist $\langle E, E^\#\rangle$ mit $\langle x, f\rangle := f(x)$ für $x \in E,\ f \in E^\#$ ein Dualsystem.

(b) Sei $E := C([0,1], \mathbb{K})$ und E' der Raum aller bezüglich der sup–Norm auf E stetigen $\mathbb{K}$–linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$. (E' ist ein Untervektorraum von $E^\#$). Dann ist $\langle E, E'\rangle$ mit $\langle x, f\rangle := f(x)$ für $x \in C([0,1], \mathbb{K})$ und $f \in E'$ ein Dualsystem.

(c) Sei wieder $E := C([0,1],\mathbb{K})$. Dann ist $\langle E, E\rangle$ mit $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ für $f,g \in C([0,1],\mathbb{K})$ ein Dualsystem.

Der Beweis von (a) ist klar, ebenso die Bilinearität in (b) und (c). Der Nachweis, daß in (b) und (c) die Bedingungen (S1) und (S2) erfüllt sind, wird in den Übungen erbracht.

Wir werden in der Funktionalanalysis sehen, daß für jeden normierten $\mathbb{K}-$Vektorraum E gilt: Bezeichnet E' den Raum der stetigen $\mathbb{K}$–Linearformen (d.h. der stetigen $\mathbb{K}$–linearen Abbildung von E nach $\mathbb{K}$), so ist durch $\langle E, E'\rangle$ mit $\langle x, x'\rangle := x'(x)$ für $x \in E,\ x' \in E'$ ein Dualsystem gegeben. Der Nachweis, daß in diesem Fall stets (S1) erfüllt ist, ist jedoch nicht trivial.

3.12. Definition. Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem. Die *schwache Topologie* $\sigma(E,F)$ (bzw. $\sigma(F,E)$) ist die gröbste Topologie auf E (bzw. auf F), für die alle Linearformen $g_y = \langle\cdot, y\rangle$, $y \in F$, (bzw. $f_x = \langle x, \cdot\rangle, x \in E$) stetig sind. D.h. also: $\sigma(E,F)$ ist die Initialtopologie auf E bezüglich $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|}, g_y)$ $(y \in F)$ und $\sigma(F,E)$ ist die Initialtopologie auf F bezüglich $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|}, f_x)$ $(x \in E)$, wobei $\tau_{|\cdot|}$ die durch den Absolutbetrag auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gegebene Topologie sei.

Dual zum Begriff der Initialtopologie ist der Begriff der Finaltopologie:

3.13. Satz. *Sei X eine Menge und seien topologische Räume (X_i, τ_i) $(i \in I)$ und Abbildungen $f_i : X_i \to X$ für alle $i \in I$ gegeben.*

(a) *Die durch $\tau := \bigcap_{i\in I}\{G \subseteq X\,;\, f_i^{-1}(G) \in \tau_i\}$ gegebene Topologie τ auf X ist die feinste Topologie auf X, so daß alle f_i $(i \in I)$ stetig sind.*

(b) *Für jeden topologischen Raum (Y, τ_Y) und jede Abbildung $g : X \to Y$ gilt: g ist stetig (bezüglich τ) $\Longleftrightarrow$ $g \circ f_i$ ist stetig für alle $i \in I$.*

(c) *Ist σ eine weitere Topologie auf X, für die die Aussage in (b) gilt, so stimmt σ schon mit τ überein. τ heißt die Finaltopologie auf X bzgl. (X_i, τ_i, f_i) $(i \in I)$.*

Beweis. (a) Man rechnet unmittelbar nach, daß für alle $i \in I$ durch $\sigma_i := \{G \subseteq X\,;\, f_i^{-1}(G) \in \tau_i\}$ eine Topologie σ_i auf X gegeben ist. Nach Satz 3.5 ist τ dann die feinste von allen Topologien auf X die gröber als alle σ_i, $i \in I$ sind. Ist nun σ eine beliebige Topologie auf X, für die alle f_i, $i \in I$, stetig sind und ist $G \in \sigma$ beliebig, so gilt für alle $i \in I$: $f_i^{-1}(G) \in \tau_i$, d.h. $G \in \sigma_i$ für alle $i \in I$ und somit $G \in \tau$. Aus der Definition von τ folgt unmittelbar, daß alle f_i als Abbildungen von (X_i, τ_i) nach (X, τ) stetig sind. τ ist also die feinste Topologie auf X für die alle f_i, $i \in I$, stetig sind.

(b) Ist $g : X \to Y$ eine stetige Abbildung von (X,τ) nach (Y, τ_Y) und ist $\Omega \subseteq Y$ offen in (Y, τ_Y), so ist $g \circ f_i$ als Komposition von stetigen Abbildungen stetig für alle $i \in I$. Ist umgekehrt $g \circ f_i$ stetig für alle $i \in I$ und ist $\Omega \in \tau_Y$ beliebig, so ist nach Satz 2.5 $f_i^{-1}(g^{-1}(\Omega)) = (g \circ f_i)^{-1}(\Omega) \in \tau_i$ für alle $i \in I$ und daher (nach Definition von τ in (a)) $g^{-1}(\Omega) \in \tau$.

(c) Ist τ_* eine Topologie auf X, die ebenfalls die Bedingung in (b) erfüllt, so folgt wegen der Stetigkeit von id: $(X, \tau_*) \to (X, \tau_*)$ die Stetigkeit von $f_i = \mathrm{id} \circ f_i$ für alle $i \in I$. Nach (a) ist τ_* gröber als τ. Mit $g := \mathrm{id} : (X, \tau_*) \to (X, \tau)$ folgt wegen der Stetigkeit von $f_i = g \circ f_i$ für alle $i \in I$ auch die Stetigkeit von $\mathrm{id} : (X, \tau_*) \to (X, \tau)$, d.h. τ_* ist auch feiner als τ, muß also mit τ übereinstimmen. □

3.14. Beispiel. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die in Aufgabe 1.4 konstruierte *Quotiententopologie* $\mathcal{T}_\sim$ auf $X/\sim$ ist gerade die Finaltopologie zu (X, τ, π), wobei

$$\pi : X \to X/_\sim, \qquad x \mapsto \pi(x) := [x] := \{y \in X\,;\, y \sim x\}$$

die kanonische Surjektion ist, die jedem Element $x \in X$ seine Äquivalenzklasse zuordnet. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{T}_\sim$ in Aufgabe 1.4 und aus Teil (a) von Satz 3.13.

3.15. Definition. Sei (X_i, τ_i) $(i \in I)$ eine Familie von topologischen Räumen und seien

$$\iota_k : X_k \hookrightarrow X := \bigcup_{i \in I} X_i\,, \qquad x \mapsto x,$$

die kanonischen Inklusionsabbildungen $(k \in I)$. Versehen mit finalen Topologie τ zu (X_i, τ_i, ι_i), $i \in I$, wird X zu einem topologischen Raum. Man nennt (X, τ) die *topologische Summe* der Räume (X_i, τ_i), $i \in I$.

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.

3.1. Aufgabe. Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie und sei

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z}\,;\, x \in \mathbb{R}\}$$

versehen mit der Quotiententopologie $\mathcal{T}_\sim$ bezüglich der durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

gegebenen Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{T}_\sim)$ homöomorph ist zu der mit der Unterraumtopologie von $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$ versehenen Einheitskreislinie $\mathbb{T}$ in $\mathbb{C}$.

3.2. Aufgabe. Seien $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ zwei topologische Räume und sei $X := X_1 \times X_2$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie für alle $A \subseteq X_1$, $B \subseteq X_2$:
(a) $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int}(A) \times \operatorname{int}(B)$.
(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
(c) $\partial A \times B = (\partial(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial(B))$.

3.3. Aufgabe. Sei (X, τ) das topologische Produkt einer Familie (X_i, τ_i) $(i \in I)$ von topologischen Räumen. Zeigen Sie:
(a) (X, τ) ist genau dann separiert, wenn alle (X_i, τ_i), $i \in I$, separiert sind.
(b) Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in X ist genau dann konvergent in $(X, \mathcal{T})$, wenn für alle $i \in I$ das Netz der i–ten Komponenten $(x_{\alpha,i})_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in (X_i, τ_i) konvergent ist.

3.4. Aufgabe. Sei $E := C([0,1], \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und E' der Raum aller bezüglich der sup–Norm auf E stetigen $\mathbb{K}$–linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$.
(a) $\langle E, E' \rangle$ mit $\langle x, f \rangle := f(x)$ für $x \in C([0,1], \mathbb{K})$ und $f \in E'$ ist ein Dualsystem.
(b) $\langle E, E \rangle$ mit $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ für $f, g \in C([0,1], \mathbb{K})$ ist ein Dualsystem.

3.5. Aufgabe. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen. Zeigen Sie, daß die Diagonale $D := \{(x, x)\,;\, x \in X\}$ genau dann in $X \times X$ abgeschlossen ist, wenn τ eine separierte Topologie ist.