KAPITEL 5

Der Kategoriensatz von Baire

5.1. Definition. Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt

- *dicht in* X, falls $\overline{A} = X$.
- *nirgends dicht in* X, falls $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.
- *von erster Kategorie* oder *mager in* X, falls A abzählbare Vereinigung von in X nirgends dichten Teilmengen ist.
- *von zweiter Kategorie* oder *nicht mager in* X, falls A nicht von erster Kategorie in X ist.

Ist jede nicht leere offene Teilmenge von X von zweiter Kategorie in X, so nennt man (X,τ) einen Baireschen Raum.

Im folgenden Lemma fassen wir einige leicht zu verifizierenden Permanenzeigenschaften für magere Mengen zusammen.

5.2. Lemma. *Sei (X,τ) ein topologischer Raum.*

(a) *Ist $A \subseteq B \subseteq X$ und B von erster Kategorie in X, so ist auch A von erster Kategorie in X.*
(b) *Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und* $\operatorname{int} A = \emptyset$ *, so ist A mager in X.*
(c) *Jede abzählbare Vereinigung von in X mageren Mengen ist wieder mager in X.*
(d) *Ist $\varphi : X \to Y$ eine Homöomorphie von (X,τ) auf einen weiteren topologischen Raum (Y,σ), so ist für jede Teilmenge A von X die Bildmenge $\varphi(A)$ von der gleichen Kategorie wie A.*

Die folgenden Beispiele zeigen, daß „magere" Mengen ziemlich „dick" sein können.

5.3. Beispiele. (a) $\mathbb{Q}$ ist als abzählbare Vereinigung von einpunktigen (und daher nirgends dichten) Teilmengen von $\mathbb{R}$ mager in $\mathbb{R}$, obwohl $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $I := [0,1]$. Zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es eine abgeschlossene in I nirgends dichte Teilmenge F von I mit $\lambda(F) \geq 1-\varepsilon$.

(c) Es gibt eine Borelmenge $A \subseteq I$ mit $\lambda(A) = 1$, welche von erster Kategorie in I ist.

Beweis. (b) Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Durchnumerierung der rationalen Zahlen aus $(0,1)$ und sei $0 < \varepsilon < 1$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta \in (0,1/2)$ mit $\delta/(1-\delta) < \varepsilon$.

Für $H \subset I$ mit $\operatorname{int} H \neq \emptyset$ sei $r(H) := \min\{k; x_k \in \operatorname{int}(H)\}$.

Wir konstruieren induktiv eine Folge $(I_n)_{n=0}^\infty$ von abgeschlossenen Teilmengen von I mit den folgenden Eigenschaften:

(1_n) I_n ist endliche Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen, von denen wenigstens eins nicht zu einem Punkt ausgeartet ist.

$$\lambda(I_n) \geq 1 - \sum_{j=1}^{n} \delta^j. \tag{2_n}$$

(3_n) Für $0 \leq j < n$ gilt: $I_n \subset I_j$ und $r(I_j) < r(I_n)$.

Mit $I_0 := I$ sind diese Forderungen für $n = 0$ offensichtlich erfüllt und es ist $r(I_0) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien nun schon die Mengen I_j für $0 \le j \le n$ konstruiert. Nach Definition von $r(I_n)$ ist $x_{r(I_n)} \in \operatorname{int}(I_n)$ und $x_j \notin \operatorname{int}(I_n)$ für $1 \le j < r(I_n)$. Sei $J = [a,b]$ das maximale abgeschlossene Intervall mit $J \subseteq I_n$ und $x_{r(I_n)} \in (a,b)$. Wir wählen $\alpha > 0$ mit $\alpha \le \min\{\delta^{n+1}/2, (b-a)/3\}$ und setzen $I_{n+1} := I_n \setminus U_\alpha(x_{r(I_n)})$. Man rechnet leicht nach, daß dann die Bedingungen (1_{n+1}), (2_{n+1}), (3_{n+1}) erfüllt sind.

Es folgt insbesondere $r(I_n) \to \infty$ für $n \to \infty$. Die Menge $F := \bigcap_{n=0}^\infty I_n$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von I. Wegen der σ–Additivität des Lebesgue–Maßes ist

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) \ge \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \sum_{j=1}^n \delta^j\Big) = 1 - \frac{\delta}{1-\delta} > 1 - \varepsilon\,.$$

Wäre $\operatorname{int}(F) \ne \emptyset$, so gäbe es eine rationale Zahl $x_k \in \operatorname{int} F$. Nach Konstruktion gilt aber wegen $k \le r(I_k) < r(I_{k+1})$,

$$x_k \notin \operatorname{int}(I_{k+1}) \supseteq \operatorname{int}(F)\,.$$

Also folgt $\operatorname{int}(F) = \emptyset$. Da F abgeschlossen ist, ist F also nirgends dicht in $[0,1]$.

(c) Nach (b) gibt es eine Folge $(F_n)_{n=1}^\infty$ von abgeschlossenen, in $[0,1]$ nirgends dichten Mengen mit $\lambda(F_n) \ge 1 - 1/n$. Die Menge $A := \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ ist dann eine Borelmenge, welche von erster Kategorie in $[0,1]$ ist, mit

$$1 \ge \lambda(A) \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda(F_n) = 1.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Beispiel. Sei $(r_n)_{n=1}^\infty$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$. Die Funktionenfolge $(\chi_n)_{n=1}^\infty$ mit

$$\chi_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = r_k,\ 1 \le k \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

konvergiert für $n \to \infty$ punktweise auf $[0,1]$ gegen die in allen $x \in [0,1]$ unstetige Funktion χ mit

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion χ_n punktweiser Limes der stetigen Funktionen $\varphi\nu : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_\nu(x) := \sum_{k=1}^n \big(1 - |x - r_k|\big)^\nu \qquad (x \in [0,1]).$$

χ ist also punktweiser Limes einer Folge von Funktionen, die ihrerseits punktweiser Limes von Folgen stetiger Funktionen sind. Es stellt sich die Frage: *Ist χ selbst schon punktweiser Limes einer Folge von stetigen Funktionen?*

Allgemeiner kann man fragen: Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}$ oder in einem Banachraum E auf einem metrischen Raum (X,d), welche auf X punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. *Kann der Fall eintreten, daß f in allen Punkten unstetig ist oder gibt es zu f immer Punkte, in denen f stetig ist?.*

Als ersten Schritt zu einer Antwort zeigen wir:

5.4. Satz. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. $(f_n)_{n=1}^\infty$ sei eine auf X punktweise gegen eine Funktion $f : X \to E$ konvergente Folge von stetigen E-wertigen Funktionen auf X. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von f von erster Kategorie in X.*

Beweis. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$P_m(\varepsilon) := \{x \in X\,;\ \|f(x) - f_m(x)\| \le \varepsilon\}, \quad G(\varepsilon) := \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(P_m(\varepsilon)) \text{ und } D := \bigcap_{n=1}^{\infty} G\big(\frac{1}{n}\big)\,.$$

Mit Hilfe dieser Definition zeigt man leicht auch die folgende Darstellung für die Menge D:

$$D = \big\{x \in X;\ \forall n \in \mathbb{N}\,\exists m \in \mathbb{N} \text{ und eine Umgebung } U \text{ von } x\,\forall y \in U : \|f(y) - f_m(y)\| < \frac{1}{n}\big\}$$

Wir zeigen zunächst:

(a) $D = \{x \in X\,;\ f$ *ist stetig in* $x\}$.

Sei $x \in D$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 3/\varepsilon$. Dann gibt es nach obiger Darstellung von D ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung U von x mit

$$\forall y \in U: \quad \|f(y) - f_m(y)\| \le \frac{1}{n}\,.$$

Da f_m auf X stetig ist, gibt es eine Umgebung V von x mit

$$\forall y \in V: \quad \|f_m(x) - f_m(y)\| < \frac{1}{n}\,.$$

Damit folgt für alle y in der Umgebung $U \cap V$ von x:

$$\|f(x) - f(y)\| \le \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_m(y)\| + \|f_m(y) - f(y)\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon\,.$$

Also ist x ein Stetigkeitspunkt für f.

Sei nun umgekehrt x ein Stetigkeitspunkt für f und sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $f_m(x) \to f(x)$ in $(E, \|\cdot\|)$ für $m \to \infty$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\|f(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{3n}$. Da f und f_m nach Voraussetzung beide in x stetig sind, gibt es eine Umgebung U von x mit

$$\forall y \in U: \quad \|f(x) - f(y)\| < \frac{1}{3n} \quad \text{und} \quad \|f_m(x) - f_m(y)\| < \frac{1}{3n}\,.$$

Damit erhalten wir für alle $y \in U$:

$$\|f(y) - f_m(y)\| \le \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_m(y)\| < \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{n}\,.$$

Es folgt $x \in D$ und die Behauptung (a) ist bewiesen.

(b) Wir müssen noch zeigen, daß die Menge $X \setminus D$ der Unstetigkeitspunkte von erster Kategorie in X ist. Für $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$F_m(\varepsilon) := \{x \in X\,;\ \forall k \in \mathbb{N}: \|f_m(x) - f_{m+k}(x)\| \le \varepsilon\}\,.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen $x \mapsto \|f_m(x) - f_{m+k}(x)\|$ ist $F_m(\varepsilon)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X. Da $f_{m+k}(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$, folgt

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon) \quad \text{und} \quad F_m(\varepsilon) \subseteq P_m(\varepsilon) \quad \text{also auch} \quad \operatorname{int}(F_m(\varepsilon)) \subseteq \operatorname{int}(P_m(\varepsilon))$$

und damit

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_m(\varepsilon)) \subseteq G(\varepsilon)\,.$$

Da $F_m(\varepsilon)$ abgeschlossen ist, ist die Menge $F_m(\varepsilon) \setminus \operatorname{int}(F_m(\varepsilon)) = \partial F_m(\varepsilon)$ nirgends dicht in X. Nach Lemma 5.2 ist daher die folgende Menge von erster Kategorie in X:

$$X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_m(\varepsilon)) = \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon)\Big) \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_m(\varepsilon)) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \big(F_m(\varepsilon) \setminus \operatorname{int}(F_m(\varepsilon))\big)\,.$$

Wegen

$$X \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(X \setminus G(\frac{1}{n}) \Big) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}\Big(F_m(\frac{1}{n}) \Big) \right)$$

ist (wieder mit Lemma 5.2) die Menge $X \setminus D$ der Unstetigkeitspunkte von f mager in X. □

Man fragt sich nun natürlich: Wie „groß“ können „magere“ Mengen in vollständigen metrischen Räumen sein? Der folgende Satz von Baire zeigt, daß die Bezeichnung „mager“ für Mengen von erster Kategorie tatsächlich berechtigt ist.

5.5. Kategoriensatz von Baire. *Sei X ein nicht leerer*

(i) *vollständiger metrischer Raum*

oder

(ii) *lokalkompakter topologischer Hausdorffraum.*

Dann gilt:

(a) *Abzählbare Durchschnitte von dichten offenen Teilmengen von X sind wieder dicht in X.*
(b) *X ist von zweiter Kategorie in sich.*

Beweis. (a) Sei also $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge von dichten, offenen Teilmengen von X. Zum Beweis der Dichtheit von $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ in X genügt es zu zeigen, daß alle nicht leeren offenen Teilmengen von X nicht leeren Durchschnitt mit G haben. Sei also $U \subseteq X$ offen und nicht leer. Wir konstruieren induktiv eine Folge $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ von nicht leeren, offenen Teilmengen von X mit der Eigenschaft, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ im Fall (i) gilt:

$$(\mathrm{E}(\mathrm{i},n)) \qquad \overline{U_{j+1}} \subseteq G_{j+1} \cap U_j \text{ für } 0 \le j < n \text{ und } \operatorname{diam}(\overline{U_j}) \le \frac{1}{j} \text{ für } 1 \le j \le n$$

beziehungsweise im Fall (ii):

$$(\mathrm{E}(\mathrm{ii},n)) \qquad \overline{U_{j+1}} \subseteq G_{j+1} \cap U_j \text{ für } 0 \le j < n \text{ und } \overline{U_j} \text{ ist kompakt für } 1 \le j \le n.$$

Für $n = 0$ sind mit $U_0 := U$ die gestellten Forderungen erfüllt. Seien nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ nicht leere offene Mengen $U_0, \ldots, U_n \subseteq X$ so konstruiert, daß die Forderungen aus (E(i,n)) bzw. (E(ii,n)) erfüllt sind. Da G_{n+1} in X dicht ist gibt es einen Punkt $x_n \in U_n \cap G_{n+1}$.

Im Fall (i) gibt es, da $U_n \cap G_{n+1}$ offen ist, ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_n) \subseteq U_n \cap G_{n+1}$. Wir setzen nun $U_{n+1} := U_\delta(x_n)$ mit $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2(n+1)}\}$. Dann folgt

$$\overline{U_{n+1}} \subseteq \{x \in X;\, d(x, x_n) \le \delta\} \subseteq U_\varepsilon(x_n) \subseteq U_n \cap G_{n+1}$$

und

$$\operatorname{diam}(\overline{U_{n+1}}) = \sup_{x,y \in \overline{U_{n+1}}} d(x,y) \le \sup_{x,y \in \overline{U_{n+1}}} (d(x,x_n) + d(x_n,y)) \le 2\delta \le \frac{1}{n+1}\,.$$

Also sind die in (E(i,n+1)) gestellten Forderungen erfüllt.

Im Fall (ii) gehen wir wie folgt vor: Da X lokalkompakt ist und $U_n \cap G_{n+1}$ eine Umgebung von x_n ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von x_n mit $K \subseteq U_n \cap G_{n+1}$. $U_{n+1} := \operatorname{int}(K)$ ist dann offen und nicht leer. Damit gilt nun auch (E(ii,n+1)).

In beiden Fällen setzen wir nun $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$. Dann ist $A \neq \emptyset$. Im Fall (i) folgt dies aus dem Cantorschen Durchschnittssatz und in Fall (ii) wegen der Kompaktheit von

$\overline{U_n}$ aus der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen (Folgerung 4.6). Nach Konstruktion gilt:

$$\emptyset \neq A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n \cap U) = G \cap U.$$

Damit ist (a) bewiesen.

(b) Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von nirgends dichten Teilmengen von X. Dann ist $X \setminus \overline{A_n}$ offen und dicht in X für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (a) ist dann aber auch die Menge

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus \overline{A_n}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

dicht in X. Wegen $X \neq \emptyset$ muß dann $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ gelten. Also ist X von zweiter Kategorie in sich. □

5.6. Folgerung. *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist von zweiter Kategorie in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von erster Kategorie in $\mathbb{R}$, so wäre auch $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ nach Lemma 5.2 mager in $\mathbb{R}$, was im Widerspruch zu zum Kategoriensatz von Baire stünde. □

5.7. Folgerung. *Ist $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum oder ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist X ein Baire–Raum.*

Beweis. Sei G eine beliebige nicht leere offene Teilmenge von X.

(a) Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist auch G versehen mit der Relativtopologie von X wieder ein lokalkompakter Hausdorffraum und daher nach 5.5 von zweiter Kategorie in sich, also auch von zweiter Kategorie in X. (Man beachte, daß jede in X nirgends dichte Teilmenge von G auch bezüglich der Relativtopologie nirgends dicht in G ist).

(b) Ist (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist auch $\overline{G}$ versehen mit der von d induzierten Metrik $\delta := d|_{\overline{G}\times\overline{G}}$ ein vollständiger metrischer Raum und daher nach 5.5 von zweiter Kategorie in sich.

Annahme: G ist von erster Kategorie in X also

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{mit} \quad \operatorname{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Da der Abschluß von A_n in (X, d) und $(\overline{G}, \delta)$ übereinstimmt, ist auch das Innere von $\overline{A_n}$ in $(\overline{G}, \delta)$ leer. Nun ist auch ∂G eine abgeschlossene Teilmenge von $(\overline{G}, \delta)$. Wegen $\overline{G} = \partial G \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ergibt dies einen Widerspruch zu der Tatsache, daß $\overline{G}$ von zweiter Kategorie in $(\overline{G}, \delta)$ ist. □

5.8. Folgerung. *In der Situation von Satz 5.4 sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist die Menge der Stetigkeitspunkte von f nicht leer und von zweiter Kategorie in (X, d).*

5.9. Beispiel. Die Funktion $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

kann nach Folgerung 5.8 nicht punktweiser Limes einer Folge von auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen sein, da die Menge der Stetigkeitspunkte von h leer ist.

Wir werden den Baireschen Kategoriensatz häufig in der folgenden Form anwenden:

5.10. FOLGERUNG. *Sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum oder ein lokalkompakter Hausdorffraum. Ist $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(A_n) \neq \emptyset$.*

Übungsaufgaben zu Kapitel 5.

5.1. AUFGABE. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und F ein Untervektorraum von E mit $\operatorname{int}(F) \neq \emptyset$. Dann ist schon $F = E$.

5.2. AUFGABE. Zeigen Sie

(a) Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} E = \aleph_0$, d.h. es gibt eine abzählbar unendliche, linear unabhängige Teilmenge $B = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ von E mit $E = \operatorname{LH}(B)$. Dann gibt es keine Norm auf E bezüglich der E vollständig ist. Insbesondere ist also jeder unendlich dimensionale Banachraum schon überabzählbar unendlich dimensional.

(b) Auf dem Raum $\mathbb{K}[X]$ aller Polynome gibt es keine Norm, bezüglich der $\mathbb{K}[X]$ vollständig ist.

5.3. AUFGABE. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger komplexwertiger Funktionen auf einem vollständigen metrischen Raum X, so daß $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in X$.

(a) Zeigen Sie, daß eine nichtleere offene Teilmenge V in X und ein $0 < M < \infty$ existieren, so daß $\sup\{|f_n(x)| : x \in V,\, n \in \mathbb{N}\} < M$ ist.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, daß eine nichtleere offene Teilmenge V in X und eine natürliche Zahl N existieren, so daß $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ ist für alle $x \in V$ und $n \geq N$.
Hinweis: Betrachte für $N \in \mathbb{N}$ die Mengen $A_N := \{x \in X,\, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ für $m, n \geq N\}$.

5.4. AUFGABE. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *isoliert*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$. Zeigen Sie:

(a) Hat (X, d) keine isolierten Punkte, so ist X überabzählbar.

(b) Ist X abzählbar, so liegt die Menge der isolierten Punkte dicht in (X, d).

5.5. AUFGABE. Sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige Funktion. Ist I ein nicht zu einem Punkt ausgeartetes Intervall, so heißt

$$\omega_f(I) := \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$$

die *Oszillation von f auf I*. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta\to 0} \omega_f((x-\delta, x+\delta))$$

in $[0, \infty]$; er heißt die *Oszillation von f in x*.

(b) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen für alle $\varepsilon > 0$.

(c) Die Menge

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

ist die Menge aller Unstetigkeitspunkte von f.

(d) Die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist genau dann von erster Kategorie in $\mathbb{R}$, wenn es eine dichte Menge gibt, in deren Punkten f stetig ist.

5.6. Aufgabe. Zeigen Sie: Es gibt stetige Funktionen auf $[0,1]$, die an keiner Stelle differenzierbar sind.
Hinweis: Betrachte $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ mit

$$E_n := \left\{ f \in C[0,1]\,;\ \sup_{0<|h|\leq 1} \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| > n \quad \forall\ t \in [0,1] \right\}.$$