KAPITEL 6

Trennungseigenschaften

Die Menge $C((X,\tau),\mathbb{K})$ der stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum (X,τ) mit Werten in $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) ist, wie man leicht nachrechnet bezüglich der punktweise definierten Operationen der Addition, der Multipkikation und der Multiplikation mit Skalaren eine $\mathbb{K}$–Algebra. Die konstante Funktion $1 : x \mapsto 1$ ist offensichtlich stetig auf X und ist das neutrale Element der Multiplikation in $C((X,\tau),\mathbb{K})$. Die Frage stellt sich, ob es außer den konstanten Vielfachen von 1 weitere stetige Funktionen auf X geben muß. Daß dies nicht immer der Fall ist, zeigt das folgende

6.1. Beispiel. Sei X eine nicht leere Menge und sei $\tau = \{X, \emptyset\}$ die indiskrete Topologie auf X. Dann gilt $C((X,\tau),\mathbb{K}) = \{\lambda \cdot 1\,;\, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Ist nämlich $x_0 \in X$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig, so ist $V := f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x_0))\big)$ nicht leer (wegen $x_0 \in V$) und offen, muß also mit X übereinstimmen. Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in X$ gilt also $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Dies ist nur möglich, wenn $f \equiv f(x_0)$ auf X gilt. □

Bevor wir nun Klasse von topologischen Räumen einführen, in denen wir eine Reichhaltigkeitsaussage für die stetigen Funktionen zeigen können, soll rasch die Liste der Trennungseigenschaften vervollständigt werden:

6.2. Definition. Ein topologischer Raum (X,τ) heißt

- T_0*–Raum* oder *Kolmogorovraum*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine offene Menge $U \subset X$ gibt mit $x \in U$, $y \notin U$ *oder* $y \in U$, $x \notin U$.
- T_1*–Raum*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Menge $U, V \subset X$ gibt mit $x \in U$, $y \notin U$ *und* $y \in V$, $x \notin V$.
- T_2*–Raum* oder *Hausdorffraum*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Menge $U, V \subset X$ gibt mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.
- T_3*–Raum*, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem $x \in X \setminus A$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $x \in U$, $A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.
- T_{3a}*–Raum*, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$.
- T_4*–Raum* falls es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Mengen $U, V \subset X$ gibt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

6.3. Definition. Ein T_1–Raum (X,τ) heißt

- *regulär*, falls er auch ein T_3–Raum ist.
- *vollständig regulär*, falls er auch ein T_{3a}–Raum ist.
- *normal*, falls er auch ein T_4–Raum ist.

Da in einem T_1–Raum jede einpunktige Teilmenge abgeschlossen ist (vergl. Aufgabe 6.1), ist jeder reguläre topologische Raum auch Hausdorffsch und jeder normale topologische Raum auch regulär und somit ebenfalls ein Hausdorffraum.

6.4. Bemerkungen. (a) Jeder T_{3a}–Raum ist auch ein T_3–Raum. Insbesondere ist also jeder vollständig reguläre topologische Raum auch regulär und somit ein Hausdorffraum.

(b) Für alle $j \in \{0, 1, 2, 3, 3a\}$ gilt: Jeder topologische Unterraum eines T_j–Raums ist wieder ein T_j–Raum.

(c) Jeder Teilraum eines regulären bzw. vollständig regulären topologischen Raums ist wieder regulär bzw. vollständig regulär.

(d) Abgeschlossene topologische Unterräume eines T_4–Raums bzw. normalen topologischen Raums (X, τ) sind wieder T_4–Räume bzw. normal.

Beweis. (a) Sei (X, τ) ein T_{3a}–Raum und sei $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Nach Definition des T_{3a}–Raumes gibt es dann eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$. Wegen der Stetigkeit von f sind die Mengen $U := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ und $V := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ offen mit $U \cap V = \emptyset$ und es gilt $x \in U$ sowie $A \subseteq V$.

(b) rechnet man nach und (c) folgt unmittelbar aus (b).

(d) Dies rechnet man unmittelbar nach unter Beachtung der Tatsache, daß abgeschlossene Teilmengen eines abgeschlossenen Unterraums von (X, τ) auch in (X, τ) abgeschlossen sind. □

6.5. Beispiele. (a) Jeder metrische Raum (X, d) ist normal.

(b) Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal.

Beweis. (a) Seien A, B zwei beliebige disjunkte, abgeschlossene Teilmengen des metrischen Raums (X, d). Ist eine der beiden Mengen leer, etwa $A = \emptyset$, so ist $U := \emptyset$ offene Obermenge von A und $V := X$ offene Obermenge von B mit $U \cap V = \emptyset$. Seien nun $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Die durch

$$f(x) := \mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(x, B) \qquad (x \in X)$$

definierte Funktion ist stetig. Daher sind die Mengen

$$U := \{x\,;\, f(x) < 0\} = f^{-1}((-\infty, 0)) \qquad \text{und} \qquad V := \{x \in X\,;\, f(x) > 0\} = f^{-1}((0, \infty))$$

disjunkt und offen mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Also ist (X, d) normal.

(b) Seien A, B zwei beliebige abgeschlossene o.B.d.A. nicht leere Teilmengen (andernfalls geht man wie im ersten Teil des Beweises zu (a) vor) des kompakten Hausdorffraums (X, τ). Dann sind A, B nach Folgerung 4.4 kompakt in (X, d). Nach Satz 4.3 gibt es also zu jedem $b \in B$ offene Mengen U_b, V_b mit $U_b \cap V_b = \emptyset$, $A \subseteq U_b$ und $b \in V_b$. Aus der offenen Überdeckung $(V_b)_{b \in B}$ von B können wir wegen der Kompaktheit von B eine endliche Teilüberdeckung $V_{b_1}, \ldots, V_{b_n}$ auswählen. Mit

$$V := \bigcup_{j=1}^{n} V_j \qquad \text{und} \qquad U := \bigcap_{j=1}^{n} U_j$$

gilt dann: U, V sind offen mit $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Also ist (X, τ) normal. □

6.6. Lemma. *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen topologischen Raums (X, τ) und sei $U \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$. Dann gibt es eine offene Teilmenge V von X mit $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Beweis. Da A und $X \setminus U$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X sind und (X, τ) normal ist, gibt es disjunkte offene Mengen $V, W \subseteq X$ mit $A \subseteq V$ und $X \setminus U \subseteq W$. Es folgt $A \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Da $X \setminus W$ als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist, folgt $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$. □

6.7. Satz (Lemma von Urysohn). *Seien A, B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen eines normalen topologischen Raums (X, τ). Dann gilt:*

(a) *Es gibt eine stetige Funktion* $f : X \to \mathbb{R}$ *mit* $f(X) \subseteq [0,1]$, $f|_A \equiv 0$ *und* $f|_B \equiv 1$.
(b) *Sind* $a, b \in \mathbb{R}$ *beliebig mit* $a \leq b$, *so gibt es eine stetige Funktion* $g : X \to \mathbb{R}$ *mit* $g(X) \subseteq [a,b]$, $g|_A \equiv a$ *und* $g|_B \equiv b$.

Beweis. (a) Da $X \setminus B$ eine offene Obermenge von A ist, gibt es nach Lemma 6.6 eine offene Menge $V_{\frac{1}{2}} \subseteq X$ mit $A \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq X \setminus B$. Durch nochmaliges Anwenden von Lemma 6.6 (auf $A \subseteq V_{\frac{1}{2}}$ und $\overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq X \setminus B$) finden wir offene Mengen $V_{\frac{1}{4}}$ und $V_{\frac{3}{4}}$ mit

$$A \subseteq V_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{V_{\frac{1}{4}}} \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq V_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{V_{\frac{3}{4}}} \subseteq X \setminus B$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten durch vollständige Induktion wir für alle dyadischen Brüche $r \in \mathbb{B} := \{\frac{m}{2^n}\,;\, n, m \in \mathbb{N},\, 1 \leq m \leq 2^n - 1\} \subset (0,1)$ offene Mengen V_r in (X, τ), so daß für alle $r, s \in \mathbb{B}$ mit $r < s$ gilt

$$A \subseteq V_r \subseteq \overline{V_r} \subseteq V_s \subseteq \overline{V_s} \subseteq X \setminus B\,.$$

Wir definieren nun eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \sup\{s \in \mathbb{B}\,;\, x \notin V_s\} & x \notin \bigcap_{r \in \mathbb{B}} V_r, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad (x \in X).$$

Für diese Funktion gilt offensichtlich $f(X) \subseteq [0,1]$, $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$. Zu zeigen ist also noch die Stetigkeit von f. Seien $u, v \in [0,1]$ beliebig mit $0 < v < u < 1$. Nach Definition von f für $x \in X$: $f(x) < u$ genau dann, wenn ein $r < u$ in $\mathbb{B}$ existiert mit $x \in V_r$. Es folgt

$$f^{-1}([0,u)) = \bigcup_{r<u,\, r \in \mathbb{B}} V_r\,.$$

Insbesondere ist $f^{-1}([0,u))$ offen in (X, τ). Für $x \in X$ gilt $f(x) > v$ genau dann, wenn es ein $v < r \in \mathbb{B}$ gibt mit $x \notin V_r$. Da es zu jedem $r > v$ ein $t \in \mathbb{B}$ mit $v < t < r$ und $\overline{V_t} \subseteq V_r$ gilt, ist dies also dazu äquivalent, daß es ein $v < t \in \mathbb{B}$ gibt mit $x \notin \overline{V_t}$. Damit ist gezeigt

$$f^{-1}((v,1]) = \bigcup_{v<t \in \mathbb{B}} (X \setminus \overline{V_t})\,.$$

Also ist auch $f^{-1}((v,1])$ offen und somit auch $f^{-1}((v,u)) = f^{-1}((v,1]) \cap f^{-1}([0,u))$. Hieraus folgt die Stetigkeit von f.

(b) Dies folgt unmittelbar mit

$$g(x) := (b-a)f(x) + a \qquad (x \in X)\,,$$

wobei $f : X \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion aus (a) sei. □

6.8. Folgerung. *Für einen topologischen Raum* (X, τ) *sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) (X, τ) *ist ein kompakter Hausdorffraum.*
(b) *Es gibt eine Menge* M, *so daß* (X, τ) *homöomorph zu einem abgeschlossenen topologischen Unterraum des topologischen Produkts* $[0,1]^M$ *ist.*

Beweis. Ist (a) erfüllt, so bilden wir die Menge $M := \{f \in C(X, \mathbb{R})\,;\, f(X) \subseteq [0,1]\}$ und betrachten die Abbildung

$$\iota : X \to [0,1]^M \qquad x \mapsto \iota(x) := (f(x))_{f \in M}\,.$$

Nach Definition der Produkttopologie und Satz 3.7 ist ι stetig und ist $\iota(X)$ nach Satz 4.7 kompakt. Nach dem Urysohnschen Lemma ist ι injektiv, also bijektiv als Abbildung von X auf $\iota(X)$. Nach Satz 4.9 ist also ι eine Homöomorphie von (X, τ) auf $\iota(X)$ (versehen mit der Unterraumtopologie zur Produkttopologie).

Sei nun (b) erfüllt. Nach dem Satz von Tychonoff ist $[0,1]^M$ ein kompakter Hausdorffraum. Da abgeschlossene topologische Unterräume von kompakten Hausdorffräumen wieder kompakte Hausdorffräume sind, folgt (a). □

Da in normalen Räumen einpunktige Mengen abgeschlossen sind, folgt aus dem Urysohnschen Lemma unmittelbar:

6.9. Folgerung. *Jeder normale topologische Raum ist vollständig regulär.*

Da nach dem Satz 4.23 von Alexandroff über die Einpunktkompaktifizierung jeder lokalkonvexe Hausdorffraum homöomorph zu einem topologischen Unterraum eines kompakten Hausdorffraums ist, folgt mit Bemerkung 6.4 (c) hieraus:

6.10. Folgerung. *Jeder lokalkompakte Hausdorffraum ist vollständig regulär.*

Eine wichtige Anwendung des Urysohnschen Lemmas ist der folgende Fortsetzungssatz von Tietze.

6.11. Satz (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen topologischen Raums (X,τ) und sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig auf A bezüglich der durch τ auf A induzierten Topologie mit $f(A) \subseteq [a,b]$. Dann gibt es eine stetige Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F(X) \subseteq [a,b]$ und $f \equiv F|_X$.*

Beweis. Es genügt, den Beweis zunächst für den Fall $a=-1$ und $b=1$ zu führen. Ist nämlich $a=b$, so ist f auf A konstant und daher konstant auf X fortsetzbar. Ist $a<b$, so ist die durch

$$\varphi(x) := \frac{2f(x)-a-b}{b-a} \qquad (x \in A)$$

definierte Funktion φ stetig auf A mit Werten in $[-1,1]$. Hat φ eine stetige Fortsetzung $\Phi : X \to [-1,1]$, so ist $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \frac{1}{2}((b-a)\Phi(x)+a+b)$, $x \in X$, eine stetige Fortsetzung von f auf ganz X mit $F(Y) \subseteq [a,b]$.

Sei also nun $a=-1$ und $b=1$. Mit $A_0 := f^{-1}\big([-1,-\frac{1}{3}]\big)$ und $B_0 := f^{-1}\big([\frac{1}{3},1]\big)$ folgt wegen der Stetigkeit von f auf A: A_0 und B_0 sind abgeschlossen in A also auch in X (da A abgeschlossen in X ist) und $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es also eine stetige Funktion $g_0 : X \to [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ mit $g|_{A0} \equiv -\frac{1}{3}$ und $g|_{B0} \equiv \frac{1}{3}$. Mit $f_1 := f - g_0|_A$ folgt $f_1(A) \subseteq [-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ und f_1 ist auf A stetig. Seien nun schon für ein $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_1,\dots,f_n \in C(A,\mathbb{R})$ und $g_0,\dots,g_{n-1} \in C(X,\mathbb{R})$ konstruiert mit

(i$_n$) $f_n = f - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} g_j|_A$,

(ii$_n$) $f_n(A) \subseteq \Big[-\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n, \Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n\Big]$ und

(iii$_n$) $g_{n-1}(X) \subseteq \Big[-\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^{n-1}, \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^{n-1}\Big]$

Dann gilt mit

$$A_n := f_n^{-1}\Big(\Big[-1,-\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\Big]\Big) \qquad \text{und} \qquad B_n := f_n^{-1}\Big(\Big[\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n,1\Big]\Big),$$

die Mengen A_n und B_n sind disjunkt und abgeschlossen (in A also auch) in X. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es also eine Funktion $g_n \in C(X,\mathbb{R})$ mit

$$g_n(X) \subseteq \Big[-\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n, \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\Big], \quad g|_{A_n} \equiv -\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n \quad \text{und} \quad g|_{B_n} \equiv \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n.$$

Mit $f_{n+1} := f_n - g_n|_A = f - \sum_{j=0}^{n} g_j|_A$ sieht man, daß dann die Bedingungen (i$_{n+1}$), (ii$_{n+1}$) und (iii$_{n+1}$) erfüllt sind. Damit ist die induktive Konstruktion beendet.

Es folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_X \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 1 < \infty\,.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ konvergiert also gleichmäßig auf X gegen eine stetige, beschränkte Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ mit $\|F\|_X \leq 1$ also mit $F(X) \subseteq [-1,1]$ (nach Aufgabe 6.3). Für alle $x \in A$ erhalten wir wegen $\|f_n\|_A \leq \big(\frac{2}{3}\big)^n \to 0$ für $n \to \infty$:

$$|f(x) - F(x)| = \lim_{n\to\infty} \Big| f - \sum_{j=0}^{n-1} g_j(x)\Big| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0.$$

Also ist F eine stetige Fortsetzung von f auf X mit $F(X) \subseteq [-1,1]$. □

Die normalen topologischen Räume sind unter den T_1–Räumen durch die Urysohnsche Trennungseigenschaft und die Fortsetzungseigenschaft von Tietze charakterisiert:

6.12. Satz. *Für einen T_1–Raum (X,τ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *(X,τ) ist normal.*
(b) *Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ von X gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(X) \subseteq [0,1]$, $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.*
(c) *Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ von X gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.*
(d) *Für jeden abgeschlossenen Unterraum A von X und jede auf A stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ mit $f(A) \subseteq [a,b]$ gibt es eine Funktion $F \in C(X,\mathbb{R})$ mit $F(X) \subseteq [a,b]$ und $F|_A \equiv f$.*
(e) *Für jeden abgeschlossenen Unterraum A von X und jede auf A stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $F \in C(X,\mathbb{R})$ mit $F|_A \equiv f$.*

Beweis. (a)$\Longrightarrow$(b) ist das Urysohnsche Lemma, (a)$\Longrightarrow$(d) ist der Fortsetzungssatz von Tietze und (b)$\Longrightarrow$(c) ist offensichtlich.

(c)$\Longrightarrow$(a): Seien $A, B \subseteq X$ zwei beliebige disjunkte, abgeschlossene Mengen. und sei $f \in C(X,\mathbb{R})$ eine nach (c) existierende Funktion mit $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$. Dann sind die Mengen $U := f^{-1}\big((-\infty, \frac{1}{2})\big)$ und $V := f^{-1}\big((\frac{1}{2}, \infty)\big)$ disjunkt und offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Also ist (X,τ) normal.

(d)$\Longrightarrow$(e): Sei (d) erfüllt und sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ eine beliebige in der Unterraumtopologie stetige Funktion auf A. Dann ist $g := \arctan\circ f : A \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(A) \subseteq \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, besitzt also nach Voraussetzung eine Fortsetzung $G \in C(X,\mathbb{R})$ mit $G(X) \subseteq \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$. Da der mögliche Wertebereich dieser Fortsetzung noch nicht im Definitionsbereich der Tangensfunktion enthalten ist, müssen wir nochmals (d) anwenden, um zum Ziel zu kommen: Die Menge $G^{-1}\big(\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}\big)$ ist wegen der Stetigkeit von G abgeschlossen in X und disjunkt zu A. Also ist auch $B := A \cup G^{-1}\big(\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}\big)$ abgeschlossen in (X,τ) und die Mengen A und $G^{-1}\big(\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}\big)$ sind in B versehen mit der von τ induzierten Topologie sowohl offen als auch abgeschlossen. Die Funktion $h : B \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in G^{-1}\big(\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}\big), \\ 1 & \text{für } x \in A, \end{cases} \qquad (x \in B)$$

ist daher stetig und besitzt nach Voraussetzung (d) eine Fortsetzung $H \in C(X,\mathbb{R})$ mit $H(X) \subseteq [0,1]$. Die Funktion $HG : X \to \mathbb{R}$ ist nun eine stetige Fortsetzung von g auf X mit $(HG)(X) \subseteq \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$. Somit ist $F := \tan\circ(HG) \in C(X,\mathbb{R})$ eine stetige Fortsetzung von f auf ganz X.

(e)$\Longrightarrow$(c): Sei nun (e) erfüllt und seien $A; B \subseteq X$ zwei beliebige disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X. Dann ist $C := A \cup B$ ebenfalls abgeschlossen in (X, τ) und A, B sind sowohl offen als auch abgeschlossen in dem mit der Relativtopologie von τ versehenen abgeschlossenen Unterraum C. Daher ist die durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in A, \\ 1 & \text{für } x \in B, \end{cases} \qquad (x \in C)$$

definierte Funktion auf C stetig und besitzt nach Voraussetzung eine Fortsetzung $F \in C(X, \mathbb{R})$ auf ganz X. Wegen $F|_A \equiv 0$ und $F|_B \equiv 1$ ist die Bedingung in (c) erfüllt. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 6.

6.1. Aufgabe. Zeigen Sie, daß für einen topologischen Raum (X, τ) die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) (X, τ) ist ein T_1–Raum.
(b) Für alle $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.
(c) Jede Teilmenge A von X ist der Durchschnitt aller ihrer Umgebungen.

6.2. Aufgabe. Führen Sie die Beweise zu Bemerkung 6.4 (b) aus.

6.3. Aufgabe. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei

$$C_b(X, E) := \{f \in C(X, E)\,;\, \|f\|_X := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

der $\mathbb{K}$–Vektorraum der beschränkten, auf (X, τ) stetigen E–wertigen Funktionen. Zeigen Sie, daß $(C_b(X, E), \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum ist.

6.4. Aufgabe. Sei (X, τ) ein vollständig regulärer Raum und seien $A \subset X$ abgeschlossen und $K \subset X$ kompakt mit $A \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $f \in C(X, [0, 1])$ mit $f \equiv 0$ auf A und $f \equiv 1$ auf K.

6.5. Aufgabe. Zeigen Sie, daß ein T_1–Raum, der eine Basis aus sowohl offenen als auch abgeschlossenen Mengen besitzt, vollständig regulär ist.

Ein topologischer Raum heißt

- *Lindelöfraum*, falls jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.
- *σ–kompakt*, falls X abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen von X ist.

6.6. Aufgabe. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sein $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie τ. Zeigen Sie:

(a) Ist (X, τ) σ–kompakt, so ist (X, τ) ein Lindelöfraum.
(b) Genau dann ist (X, τ) ein Lindelöfraum, wenn jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{B}$ eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.
(c) Jeder abgeschlossene Unterraum eines Lindelöfraums ist wieder ein Lindelöfraum.

6.7. Aufgabe. Sei $X,\tau)$ ein vollständig regulärer Lindelöfraum und seien A, B zwei beliebige abgeschlossene, disjunkte Teilmengen von X. Zeigen Sie:

(a) Zu je zwei Punkten $a \in A$, $b \in B$ gibt es offene Umgebungen U_a von a und V_b von b mit $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ und $\overline{V_b} \cap A = \emptyset$.

(b) Es gibt Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in A und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ in B mit $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{a_n}$ und $B \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} V_{b_n}$.

(c) Die Mengen

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(U_{a_n} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_{b_k}}\Big) \qquad \text{und} \qquad V := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(V_{b_n} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U_{a_k}}\Big)$$

sind offen und disjunkt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. (X, τ) ist also normal.