KAPITEL 7

Der Satz von Stone und Weierstraß

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und seien $f, g \in C(X, \mathbb{R})$. Dann sind die durch

$$(7.1) \qquad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) \qquad (x \in X)$$

und

$$(7.2) \qquad (f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) \qquad (x \in X)$$

definierten Funktionen $f \wedge g, f \vee g : X \to \mathbb{R}$ wieder stetige reellwertige Funktionen.

Wir sagen: Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von $C(X, \mathbb{K})$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) *trennt die Punkte von* X, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ gibt mit $f(x) \neq y$.

Bevor wir zum eigentlichen Satz von Stone und Weierstraß kommen beweisen wir zunächst die verbandstheoretische Version dieses Satzes:

7.1. Satz (Satz von Kakutani und Krein). *Sei* (K, τ) *ein kompakter Hausdorffraum und sei* $\mathcal{A}$ *ein Untervektorraum von* $C(K, \mathbb{R})$ *mit*

(a) $1 \in \mathcal{A}$.
(b) $\forall f, g \in \mathcal{A}: \qquad f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{A}$.
(c) $\mathcal{A}$ *trennt die Punkte von* K.

Dann liegt $\mathcal{A}$ *dicht in dem Banachraum* $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_K)$.

Beweis. Seien $h \in C(K, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, daß es eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ gibt mit $\|h - f\|_K < \varepsilon$.

(i) Wir zeigen zunächst, daß es zu je zwei verschiedenen Punkten $s, t \in K$ eine Funktion $f_{s,t} \in \mathcal{A}$ gibt, die h in den Punkten t und s interpoliert. Da $\mathcal{A}$ die Punkte von K trennt gibt es eine Funktion $d \in \mathcal{A}$ mit $g(t) \neq g(s)$. Die durch

$$f_{s,t}(x) := \frac{h(t) - h(s)}{g(t) - g(s)} g(x) + \frac{h(s)g(t) - h(t)g(s)}{g(t) - g(s)} \qquad (x \in K)$$

definierte Funktion $f_{s,z} : K \to \mathbb{R}$ erfüllt in der Tat $f_{s,t} \in \mathcal{A}$ sowie $f_{s,t}(t) = h(t)$ und $f_{s,t}(s) = h(s)$. Wir definieren noch $f_{t,t} \in \mathcal{A}$ durch $f_{t,t}(x) := h(t)$ für alle $x \in K$.

(ii) Wir zeigen nun, daß es für alle $t \in K$ eine Funktion $g_t \in \mathcal{A}$ gibt mit

$$(7.3) \qquad g_t(t) = h(t) \qquad \text{und} \qquad g_t(x) > h(x) - \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in K.$$

Sei also $t \in K$ beliebig. Für alle alle $s \in K$ gibt es wegen der Stetigkeit von $f_{s,t}$ eine offene Umgebung U_s von s, so daß

$$(7.4) \qquad f_{s,t}(x) > h(x) - \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad x \in U_s\,.$$

Aus der offenen Überdeckung $(U_s)_{s \in K}$ von K können wir wegen der Kompaktheit von (K, τ) eine endliche Teilüberdeckung $U_{s_1}, \ldots, U_{s_k}$ auswählen. Wegen (b) ist dann $g_t := f_{s_1,t} \vee \ldots \vee f_{s_k,t}$ eine Funktion aus $\mathcal{A}$ mit

$$g_t(t) = \max_{1 \leq j \leq k} f_{s_j,t}(t) = h(t).$$

Ist nun $x \in K$ beliebig, so ist $x \in U_{s_{j_0}}$ für ein $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ und daher nach (7.4)

$$g_t(x) = \max_{1 \le j \le k} f_{s_j,t}(x) \ge f_{s_{j_0}}(x) > h(x) - \varepsilon\,.$$

Die Funktion g_t erfüllt also (7.3).

(iii) Wir zeigen nun die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $\|f - h\|_K < \varepsilon$. Für alle $t \in K$ gibt es wegen der Stetigkeit von g_t eine offene Umgebung V_t von t mit

$$g_t(x) < h(x) + \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in V_t\,. \tag{7.5}$$

Aus der offenen Überdeckung $(V_t)_{t\in K}$ können wir wieder wegen der Kompaktheit von (K, τ) eine endliche Teilüberdeckung $V_{t_1}, \ldots, V_{t_n}$ auswählen. Wegen $g_{t_1}, \ldots, g_{t_n} \in \mathcal{A}$ ist dann nach (b) auch $f := g_{t_1} \wedge \ldots \wedge g_{t_n} \in \mathcal{A}$. Wegen (7.3) ist dann

$$f(x) = \min_{1 \le j \le n} g_{t_j}(x) > h(x) - \varepsilon. \tag{7.6}$$

Ist nun $x \in K$ beliebig, so folgt $x \in V_{t_{j_1}}$ für ein $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ und daher

$$f(x) = \min_{1 \le j \le n} g_{t_j}(x) \le g_{t_{j_1}}(x) < h(x) - \varepsilon.$$

Zusammen mit (7.6) ergibt dies $\|f - h\|_K = \max_{x\in K} |f(x) - h(x)| < \varepsilon$. □

Wir zeigen nun die Fassung des Satzes von Stone und Weierstraß für reellwertige Funktionen:

7.2. Satz (Satz von Stone und Weierstraß, reelle Fassung). *Sei (K, τ) ein kompakter Hausdorffraum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C(K, \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $1 \in \mathcal{A}$.

(b) *$\mathcal{A}$ trennt die Punkte von K.*

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_K)$.

Beweis. Wir zeigen, daß die Abschließung $\overline{\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen des Satzes von Kakutani und Krein erfüllt. Mit $\mathcal{A}$ ist auch $\overline{\mathcal{A}}$ ein Unteralgebra von $C(K, \mathbb{R})$. Da $1 \in \mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ und da schon $\mathcal{A}$ die Punkte von K trennt, ist nur zu zeigen, daß die Bedingung (b) in Satz 7.1 für $\overline{\mathcal{A}}$ erfüllt ist. Da $\overline{\mathcal{A}}$ auch ein Untervektorraum ist, genügt es wegen (7.1) und (7.2) hierzu zu zeigen, daß für alle $f \in \overline{\mathcal{A}}$ auch die Funktion $|f| : x \mapsto |f(x)|$ wieder in $\overline{\mathcal{A}}$ ist. Wegen $f^2 \in \overline{\mathcal{A}}$ und $|f(x)| = \sqrt{f(x)^2}$ für alle $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $x \in K$, reicht es aus zu zeigen, daß für alle $0 \le g \in \overline{\mathcal{A}}$ auch $\sqrt{g} : x \mapsto \sqrt{g(x)}$ in $\overline{\mathcal{A}}$ liegt. Sei also $0 \le g \in \overline{\mathcal{A}}$ beliebig. Da g stetig ist, existiert ein $c > 0$ mit $0 \le cg \le 1$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem klassischen Approximationssatz von Weierstraß (Satz 12.3 in [**1**]) gibt es ein Polynom p mit $\|\sqrt{t} - p(t)\|_{[0,1]} < \varepsilon\sqrt{c}$. Da p ein Polynom und $\overline{\mathcal{A}}$ eine Algebra ist folgt $\sqrt{c^{-1}} \cdot (p \circ (cg)) \in \overline{\mathcal{A}}$. Also gilt

$$\|\sqrt{g} - \sqrt{c^{-1}} p \circ g\|_K = \max_{x\in K} \left| \sqrt{c^{-1}} \left(\sqrt{cg(x)} - p(cg(x)) \right) \right| < \sqrt{c^{-1}} \cdot \varepsilon\sqrt{c} = \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß $\sqrt{g} \in \overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$ liegt. □

7.3. Satz (Satz von Stone und Weierstraß, komplexe Fassung). *Sei (K, τ) ein kompakter Hausdorffraum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C(K, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $1 \in \mathcal{A}$.

(b) *$\mathcal{A}$ trennt die Punkte von K.*

(c) *Für alle $f \in \mathcal{A}$ liegt auch die konjugiert komplexe Funktion $x \mapsto \overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ in $\mathcal{A}$.*

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $(C(K,\mathbb{C}), \|\cdot\|_K)$.

Beweis. Ist $f \in \mathcal{A}$, so folgt wegen (c) für die Funktionen $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ und $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$:

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in \mathcal{A}\,, \quad \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}) \in \mathcal{A}\,.$$

Da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung die Punkte von K trennt, gibt es zu beliebig vorgegebenen Punkten $a, b \in K$ mit $a \neq b$ eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(a) \neq f(b)$ und daher $\mathrm{Re}(f(a)) \neq \mathrm{Re}(f(b))$ oder $\mathrm{Im}(f(a)) \neq \mathrm{Im}(f(b))$. Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{A}_\mathbb{R} := \{g \in \mathcal{A}\,;\, g(K) \subset \mathbb{R}\}$ die Punkte von K trennt. Da $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ eine die konstante Funktion 1 enthaltende Unteralgebra von $C(K,\mathbb{R})$ ist, liegt $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ nach der reellen Fassung des Satzes von Stone–Weierstraß dicht in $C(K,\mathbb{R})$. Ist nun $f \in C(K,\mathbb{C})$ so sind $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$ und es gibt zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ Funktionen $g_1, g_2 \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$ mit

$$\|\mathrm{Re}(f) - g_1\|_K < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \|\mathrm{Im}(f) - g_2\|_K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt $g := g_1 + ig_2 \in \mathcal{A}$ und

$$\|f-g\|_K = \|\mathrm{Re}(f)+i\,\mathrm{Im}(f)-g_1-ig_2\|K \leq \|\mathrm{Re}(f)-g_1\|_K+\|\mathrm{Im}(f)-g_2\|_K < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Also liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C(K,\mathbb{C})$. □

7.4. Folgerung. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $f : K \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dann gibt es eine Folge von Polynomen in n Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, die gleichmäßig auf K gegen f konvergiert.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar durch Anwendung der reellen bzw. komplexen Fassung des Satzes von Stone–Weierstraß auf die Algebra aller Polynome in n Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{K}$. □

Sei nun (X,τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum. Eine auf (X,τ) stetige $\mathbb{K}$–wertige Funktion ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt *verschwindend im Unendlichen*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ gibt, so daß $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Die Menge aller im Unendlichen verschwinden, $\mathbb{K}$–wertigen, auf (X,τ) stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $C_0(X,\mathbb{K})$. Versehen mit der Supremumsnorm ist $C_0(X,\mathbb{K})$ eine normierte Algebra, die aber nicht notwendig die konstanten Funktionen enthält. Unser Ziel ist eine Version des Satzes von Stone–Weierstraß für $C_0(X,\mathbb{K})$.

7.5. Beispiele. (a) Ist (X,τ) kompakt, so gilt speziell $C(X,\mathbb{K}) = C_0(X,\mathbb{K})$.

(b) Für eine Funktion $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{K})$ gilt, $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{K})$ genau dann, wenn $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Im folgenden Lemma wird gezeigt, daß wir die Funktionen aus $C_0(X,\tau)$ identifizieren können mit den Einschränkungen auf X der im Punkt ∞ verschwindenden stetigen Funktionen auf der Einpunktkompaktifizierung von (X,τ).

7.6. Lemma. *Sei (X,τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei (X_∞,τ_∞) seine Einpunktkompaktifizierung. Dann gilt: $C_0(X,\mathbb{K}) = \{f|_X\,;\, f \in C(X_\infty,\mathbb{K}), f(\infty) = 0\}$. Durch $f \mapsto f_\infty$ mit $f_\infty(x) := f(x)$ für $x \in X$ und $f_\infty(\infty) := 0$ ist ein isometrischer Algebrenisomorphismus von $C_0(X,\mathbb{K})$ auf die abgeschlossene und damit vollständige Unteralgebra*

$$\{F \in C(X_\infty,\mathbb{K})\,;\, F(\infty) = 0\}$$

von $(C(X_\infty,\mathbb{K}), \|\cdot\|_{X_\infty})$ gegeben. Insbesondere ist $(C_0(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_X)$ eine Banachalgebra.

Beweis. Ist $f \in C(X_\infty, \mathbb{K})$ mit $f(\infty) = 0$, so ist wegen der Stetigkeit von f die Menge $V := f^{-1}(U_\varepsilon(0))$ offen in (X_∞, τ_∞) mit $\infty \in V$. Nach Definition von τ_∞ ist $K := X \setminus V$ dann kompakt in (X, τ). Somit gilt für alle $x \in X \setminus K$: $f(x) < \varepsilon$. Also ist $f|_X \in C_0(X, \mathbb{K})$.

Ist umgekehrt $f \in C_0(X, \mathbb{K})$, so definieren wir $f_\infty : X_\infty \to \mathbb{K}$ durch $f_\infty(x) := f(X)$ für $x \in X$ und $f_\infty(\infty) = 0$. f_∞ ist stetig in allen Punkten der offenen Teilmenge X von (X_∞, τ_I), da f auf (X, τ) stetig ist. Zu zeigen ist noch die Stetigkeit von f_∞ in ∞. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es eine kompakte Menge K in (X, τ) mit $|f_\infty(x)| = |f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Also gilt $|f_\infty(x) - f_\infty(\infty)| = |f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X_\infty \setminus K$. Da K nach Definition von τ_∞ offen in (X_∞, τ_∞) ist, folgt die Stetigkeit von f_∞ in ∞.

Den Rest rechnet man unmittelbar nach. □

7.7. Satz. *Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C_0(X, \mathbb{K})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle $x \in X$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$.*
(b) *$\mathcal{A}$ trennt die Punkte von K.*
(c) *Für alle $f \in \mathcal{A}$ liegt auch die Funktion $x \mapsto \overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ in $\mathcal{A}$. (Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist dies stets erfüllt.)*

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $(C_0(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_X)$.

Beweis. Man rechnet nach, daß $\mathcal{A}^\# := \{f_\infty + \lambda 1\,;\, f \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K}\}$ eine Unteralgebra von $C(X_\infty, \mathbb{K})$ ist, die die konstante Funktion 1 enthält und mit $h \in \mathcal{A}^\#$ auch die konjugiert komplexe Funktion $\overline{h}$ enthält. Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt nach (c) eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f_\infty(x) = f(x) \neq f(y) = f_\infty(y)$. Ist $x \in X$ beliebig, so gibt es nach (a) eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f_\infty(x) = f(x) \neq 0 = f_\infty(\infty)$. Also trennt $\mathcal{A}^\#$ die Punkte von X_∞. Damit sind die Voraussetzungen zur reellen bzw. komplexen Fassung des Satzes von Stone–Weierstraß erfüllt. Daher liegt $\mathcal{A}^\#$ dicht in $(C(X_\infty, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{X_\infty})$. Ist $f \in C_0(X, \mathbb{K})$ beliebig, so gibt demnach es eine Funktion $h = g_\infty + \lambda 1$ mit $g \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so daß

$$\|f_\infty - h\|_{X_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Insbesondere folgt wegen $f_\infty(\infty) = 0$

$$|\lambda| = |f_\infty(\infty) - h(\infty)| \leq \|f_\infty - h\|_{X_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher auch

$$\|f - g\|_X = \|f_\infty - g_\infty\|_{X_\infty} \leq \|f_\infty - h\|_{X_\infty} + |\lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Also liegt $\mathcal{A}$ dicht in $(C_0(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_X)$. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 7.

7.1. Aufgabe. Zeigen Sie, daß die Menge der Funktionen der Gestalt

$$z \mapsto g(z) := \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $c_{-n}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ dicht liegen in $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ (mit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$).

7.2. Aufgabe. Zeigen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe, daß die Menge der reellen trigonometrischen Polynome

$$t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ bzgl. der Supremumsnorm dicht liegt in der Menge der 2π–periodischen, stetigen, reellwertigen Funktionen.

7.3. Aufgabe. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei

$$C_c(X, \mathbb{K}) := \{f \in C(X, \mathbb{K})\,;\, \exists K = K_f \subseteq X, K \text{ kompakt, mit } f|_{X \setminus K} \equiv 0\}$$

die Menge aller stetigen Funktionen f auf X mit Werten in $\mathbb{K}$, die außerhalb einer kompakten Teilmenge K_f verschwinden. Zeigen Sie, daß $C_c(X, \mathbb{K})$ dicht in $(C_0(X, \mathbb{K}), \| \cdot \|_X)$ liegt.