KAPITEL 8

Partition der Eins

8.1. Definition. Seien $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$,$\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ zwei Familien von Teilmengen eines topologischen Raums (X, τ). Wir sagen

- $\mathcal{V}$ ist *lokal endlich*, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung W von x in (X, τ) gibt mit $W \cap V_j \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $j \in J$.
- $\mathcal{V}$ ist *σ-lokal-endlich*, falls $\mathcal{V}$ eine höchstens abzählbar unendliche Vereinigung von lokal endlichen Mengensystemen ist.
- $\mathcal{V}$ ist *punkt-endlich*, falls für alle $x \in X$ gilt: $x \in V_j$ für höchstens endlich viele $j \in J$.
- $\mathcal{V}$ ist eine *Verfeinerung* von $\mathcal{U}$, falls es zu jedem $j \in J$ ein $i(j) \in I$ gibt mit $V_j \subseteq U_{i(j)}$.

8.2. Bemerkung. Ist $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ lokal endliche Familie von Teilmengen eines topologischen Raums (X, τ), so ist auch die Familie $\mathcal{V}^- := (\overline{V_j})_{j\in J}$ ein lokal endliches Mengensystem und es gilt

$$\overline{\bigcup_{j\in J} V_j} = \bigcup_{j\in J} \overline{V_j}\,.$$

Beweis. Ist $x \in X$, so gibt es nach Voraussetzung eine offene Umgebung U von x mit $U \cap V_j \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $j \in J$. Ist nun $j \in J$ mit $U \cap \overline{V_j} \neq \emptyset$, so ist auch $U \cap V_j \neq \emptyset$. Also folgt die Behauptung. □

8.3. Satz. *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen topologischen Raums (X, τ) und sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine punkt–endliche offene Überdeckung von A. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ von A mit $\overline{V_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}_\mathcal{U}$ die Menge aller offenen Überdeckungen $\mathcal{W} = (W_i)_{i\in I}$ von A mit $W_i = U_i$ oder $\overline{W_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. Wegen $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}_\mathcal{U}$ ist $\mathfrak{M}_\mathcal{U} \neq \emptyset$. Für $\mathcal{W} = (W_i)_{i\in I} \in \mathfrak{M}_\mathcal{U}$ sei

$$J(\mathcal{W}) := \{i \in I\,;\, \overline{W_i} \subseteq U_i\}\,.$$

Sind $\mathcal{W}_1 = (W_{1,i})_{i\in I}, \mathcal{W}_2 = (W_{2,i})_{i\in I} \in \mathfrak{M}_\mathcal{U}$, so definieren wir

$$\mathcal{W}_1 \leq \mathcal{W}_2 \quad :\Longleftrightarrow\; J(\mathcal{W}_1) \subseteq J(\mathcal{W}_2) \quad \text{und} \quad W_{1,j} = W_{2,j} \quad \text{für alle} \quad j \in J(\mathcal{W}_1).$$

Hierdurch ist eine partielle Ordnung auf $\mathfrak{M}_\mathcal{U}$ erklärt. Sei nun $\mathfrak{K}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}_\mathcal{U}$. Wir setzen $J := \bigcup_{\mathcal{W}\in\mathfrak{K}} J(\mathcal{W})$, $W_i^* := U_i$ für alle $i \in I \setminus J$ und $W_j^* := W_j$ für alle $j \in J$ und alle $\mathcal{W} = (W_i)_{i\in I} \in \mathfrak{K}$ mit $j \in J(\mathcal{W})$. Da $\mathfrak{K}$ total geordnet ist, ist hierdurch W_i^* wohldefiniert für alle $i \in I$ und $\mathcal{W}^* := (W_i^*)_{i\in I}$ ist eine Familie von offenen Teilmengen von X mit $\overline{W_j^*} \subseteq U_j$ für alle $j \in J$ und $W_i^* := U_i$ für alle $i \in I \setminus J$. Um $\mathcal{W}^* \in \mathfrak{M}_\mathcal{U}$ zu zeigen, müssen wir noch nachweisen, daß $\mathcal{W}^*$ eine Überdeckung von A ist. Sei also $a \in A$ beliebig. Da $\mathcal{U}$ eine punkt–endliche Überdeckung von A ist, ist $K_a := \{i \in I\,;\, a \in U_i\}$ endlich und nicht leer. Gibt es ein $i_0 \in K_a \cap (I \setminus J)$, so folgt $a \in U_{i_0} = W_{i_0}^* \subseteq \bigcup_{i\in I} W_i^*$. Sei nun $K_a \subseteq J$. Da $\mathfrak{K}$ total geordnet ist und K_a endlich ist, gibt es dann eine offene Überdeckung $\mathcal{W} = (W_i)_{i\in I} \in \mathfrak{K}$ von A mit $\emptyset \neq K_a \subseteq J(\mathcal{W})$.

Insbesondere gibt es ein $j \in K_a \subseteq J(\mathcal{W})$ mit $a \in W_j = W_j^* \subseteq \bigcap_{i\in I} W_i^*$. Insgesamt haben wir gezeigt, daß $\mathcal{W}^*$ eine obere Schranke für $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{M}_\mathcal{U}$ ist. Damit sind die Voraussetzungen zum Zornschen Lemma erfüllt. $\mathfrak{M}_\mathcal{U}$ besitzt also wenigstens ein maximales Element $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$.

Annahme: $J(\mathcal{V}) \neq I$. Dann gibt es ein $i_0 \in I \setminus J(\mathcal{V})$. Da $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von A ist, ist $B := A \setminus \bigcup_{i_0\neq i\in I} V_i$ abgeschlossen mit $B \subseteq V_{i_0} = U_{i_0}$. Da (X,τ) normal ist, gibt es nach Lemma 6.6 eine offene Menge $W \subseteq X$ mit $B \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U_{i_0}$. Dann ist aber $\mathcal{V}^* = (V_i^*)$ mit

$$V_i^* := \begin{cases} V_i & \text{für } i_0 \neq i \in I\,, \\ W & \text{für } i = i_0\,, \end{cases}$$

ein Element von $\mathfrak{M}_\mathcal{U}$, welches echt größer als $\mathcal{V}$ ist im Widerspruch zur maximalen Wahl von $\mathcal{V}$. □

8.4. Definition. Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Für eine auf X stetige Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ heißt

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X\,;\, f(x) \neq 0\}}$$

der *Träger von f*.

8.5. Definition. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raums (X,τ). Eine Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von auf X stetigen reellwertigen Funktionen heißt eine *der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins oder Partition der Eins*, falls gilt:

(a) $\forall i \in I\, \forall x \in X: \qquad \varphi(x) \geq 0.$
(b) $\forall i \in I: \qquad \operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i.$
(c) Das Mengensystem der Träger $(\operatorname{supp}(\varphi_i))_{i\in I}$ ist lokal endlich.
(d) $\forall x \in X: \qquad \displaystyle\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1.$

8.6. Satz. *Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine lokal endliche, offene Überdeckung eines normalen topologischen Raums (X,τ). Dann gibt es eine der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.*

Beweis. Nach Satz 8.3 gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{\in\in I}$ mit $\overline{V_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. Da (X,τ) normal ist, gibt es nach Lemma 6.6 offene Mengen W_i, $i \in I$, mit

$$\overline{V_i} \subseteq W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i \qquad \text{für alle } i \in I.$$

Nach dem Urysohnschen Lemma 6.7 gibt es daher Funktionen $\psi_i \in C(X,[0,1])$, $i \in I$, mit $\psi_i \equiv 1$ auf $\overline{V_i}$ und $\psi_i \equiv 0$ auf $X \setminus W_i$ für alle $i \in I$. Es folgt $\operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. Da $\mathcal{U}$ lokal endlich ist, gibt es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U von x in (X,τ), so daß $U \cap \operatorname{supp}(\psi_i) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $i_1, \ldots, i_k \in I$. Es folgt

$$\forall y \in U: \qquad \psi(y) := \sum_{i\in I} \psi_i(y) = \sum_{j=1}^{k} \psi_{i_j}(y) \geq 1\,,$$

Da $\mathcal{V}$ eine Überdeckung von X ist und $\psi_i \equiv 1$ auf V_i für alle $i \in I$ gilt. Insbesondere ist ψ auf U stetig. Die Funktion

$$\psi : X \to [0,\infty)\,, \qquad x \mapsto \sum_{i\in I} \psi_i(x)$$

ist als wohldefiniert und stetig auf X mit $\psi(x) \geq 1$ für alle $x \in X$. Also sind die Funktionen

$$\varphi_i : x \mapsto \frac{\psi_i(x)}{\psi(x)}$$

stetig auf X mit $0 \leq \varphi_i \leq 1$ auf X und $\operatorname{supp}(\varphi_i) = \operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$ und erfüllen $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$ für alle $i \in I$. □

8.7. Folgerung. *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen topologischen Raums (X, τ) und sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine lokal endliche, offene Überdeckung von A. Dann gibt es eine Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von Funktionen aus $C(X, [0, 1])$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$ und mit $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in A$.*

Beweis. $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ ist eine offene Überdeckung von X. Mit Satz 8.6 folgt die Behauptung. □

8.8. Definition. Ein Hausdorffraum (X, τ) heißt *parakompakt*, falls es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine lokal endliche, offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von X gibt, die eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist.

8.9. Satz. *Jeder parakompakte topologische Raum ist normal.*

Beweis. Sei also (X, τ) parakompakt. Wir zeigen zunächst:

(a) *Sind A und B zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X, so daß es zu jedem $a \in A$ offene Mengen U_a, V_a gibt mit $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$ und $U_a \cap V_a = \emptyset$, so gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

Da die Mengen U_a, $a \in A$, mit $X \setminus A$ zusammen eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X bilden, gibt es wegen der Parakompaktheit von (X, τ) eine lokal endliche, offene Verfeinerung $\mathcal{W} = (W_i)_{i\in I}$ dieser Überdeckung, die immer noch X überdeckt. Die Menge

$$\Omega_A := \bigcup \{W_i\,;\, i \in I,\, W_i \cap A \neq \emptyset\}$$

ist dann eine offene Obermenge von A. Ist $i \in I$ mit $W_i \cap A \neq \emptyset$, so gibt es (da $\mathcal{W}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist) ein $a(i) \in A$ mit $W_i \subseteq U_{a(i)}$. Zu jedem $b \in B$ gibt es, da die Überdeckung $\mathcal{W}$ lokal endlich ist, eine Umgebung N_b von b, so daß die Menge

$$I_b := \{i \in I\,;\, W_i \cap N_b \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Die Menge

$$\Omega_b := N_b \cap \bigcap_{i\in I_b} V_{a(i)}$$

ist dann eine (als endlicher Durchschnitt von offenen Mengen) offene Umgebung von b die zu Ω_A disjunkt ist. Dann ist $\Omega_B := \bigcup_{b\in B} \Omega_b$ eine zu Ω_A disjunkte offene Obermenge von B.

(b) Sei nun $C \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus C$. Da (X, τ) ein Hausdorffraum ist, ist $\{x\}$ abgeschlossen in (X, τ) und es gibt zu jedem $c \in C$ disjunkte offene Umgebungen U_c von c und V_c von x. Wenden wir (a) auf $A = C$ und $B = \{x\}$ an, so folgt daß es zu C und x zwei disjunkte offene Obermengen $\Omega_{C,x}$ von C und Ω_x von x gibt.

(c) Sind nun A, B zwei beliebige disjunkte Teilmengen von X, so ist wegen (b) (mit dort $C = B$ und $x \in A$) die Voraussetzung zu (a) erfüllt und es folgt die Behauptung. □

8.10. Satz. *Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eines parakompakten Raums (X, τ) gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.*

Beweis. Wegen der Parakompaktheit gibt es eine lokal endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ von $\mathcal{U}$. Da (X,τ) nach Satz 8.9 normal ist gibt es zu $\mathcal{V}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins $(\varphi_j)_{j\in J}$. Zu jedem $j \in J$ fixieren wir ein $\alpha(j) \in I$ mit $V_j \subseteq U_{\alpha(j)}$. Hierdurch ist eine Abbildung $\alpha : J \to I$ gegeben. Wir definieren nun für $i \in I$:

$$\psi_i := \sum_{j\in\alpha^{-1}(\{i\})} \varphi_j \,,$$

wobei wie üblich die Summe über eine leere Indexmenge als 0 definiert ist. Dann ist ψ_i stetig auf X mit

$$\operatorname{supp}(\psi_i) = \bigcup_{j\in\alpha^{-1}(\{i\})} \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup_{j\in\alpha^{-1}(\{i\})} V_j \subseteq U_i$$

und für alle $x \in X$ gilt: $\sum_{i\in I} \psi_i(x) = \sum_{i\in I} \sum_{j\in\alpha^{-1}(\{i\})} \varphi_j(x) = \sum_{j\in J} \psi_j(x) = 1$. $\square$

8.11. Satz. *Für einen regulären topologischen Raum (X,τ) sind äquivalent:*

(a) (X,τ) *ist parakompakt.*
(b) *Jede offene Überdeckung von X besitzt eine σ–lokal–endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung.*
(c) *Jede offene Überdeckung von X besitzt eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung.*
(d) *Jede offene Überdeckung von X besitzt eine lokal endliche, abgeschlossene Verfeinerungsüberdeckung.*

Beweis. Die Implikation (a)$\Longrightarrow$(b) ist offensichtlich.

Sei nun (b) vorausgesetzt und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Nach Voraussetzung besitzt diese eine σ–lokal–endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, wobei die Mengensysteme $\mathcal{V}_n$ lokal endlich sind. Wir definieren $H_0 := \emptyset$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$G_n := \bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} V\,, \quad H_n := \bigcup_{k=1}^{n} G_k\,, \quad K_n := H_n \setminus H_{n-1}\,, \quad \mathcal{W} := (K_n \cap V)_{n\in\mathbb{N}, V\in\mathcal{V}_n}\,.$$

Offensichtlich gilt

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

$\mathcal{W}$ ist eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$ also auch von $\mathcal{U}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{W}$ auch eine lokal endliche Überdeckung von X ist. Ist x ein beliebiger Punkt aus X; so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in K_n = H_n \setminus H_{n-1} \subseteq G_n$. Nach Definition von G_n gibt es ein $V \in \mathcal{V}_n$ mit $x \in V$ und es folgt $x \in K_n \cap V \in \mathcal{W}$. Da $\mathcal{V}_k$ eine lokal endlich und H_n offen ist, gibt es eine Umgebung $U_k \subseteq H_n$ von x mit $U_k \cap V \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $V \in \mathcal{V}_k$. Dann ist $U := \bigcap_{k=1}^{n} U_k$ eine Umgebung von x, die nur mit höchstens endliche vielen $V \in \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{V}_k$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Wegen $U \subseteq H_n$ folgt $U \cap K_k = \emptyset$ für alle $k > n$ hat U nur mit höchstens endlich vielen Mengen aus $\mathcal{W}$ einen nicht leeren Durchschnitt. Also ist $\mathcal{W}$ eine lokal endliche Überdeckung von X und es gilt (c).

Sei nun (c) vorausgesetzt und sei $\mathcal{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Für alle $x \in X$ gibt es ein $U_x \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_x$. Da X nach regulär und U_x eine offene Umgebung von x ist, gibt es eine offene Umgebung V_x von x mit $V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Dann ist $(W_x)_{c\in X}$ eine offene Überdeckung von X, zu der es nach Voraussetzung eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{W}$ gibt. Nach Bemerkung 8.2 ist dann $(\overline{W})_{W\in\mathcal{W}}$ ebenfalls eine lokal endliche Überdeckung von X. Sei $W \in \mathcal{W}$ beliebig. Wegen $W \subseteq V_x$ für ein $x \in X$ folgt $\overline{W} \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x \in \mathcal{U}$. Also ist $\mathcal{W}$ auch eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Damit ist (d) gezeigt.

Sei schließlich (d) erfüllt und sei $\mathcal{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Nach Voraussetzung gibt es zu $\mathcal{U}$ eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{V}$. Für alle $V \in \mathcal{V}$ fixieren wir ein $U_V \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U_V$. Zu jedem $x \in X$ gibt es also eine offene Umgebung U_x von x, die mit höchstens endlich vielen Elementen von $\mathcal{V}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Nach Voraussetzung gibt es zu der offenen Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ eine lokal endliche, abgeschlossene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{W}$, so daß auch alle $W \in \mathcal{W}$ mit höchstens endlich vielen $V \in \mathcal{V}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Für $V \in \mathcal{V}$

$$\tilde{V} := X \setminus \bigcup \{W \in \mathcal{W}\,;\, W \cap V = \emptyset\}\,.$$

Da die Familie $\{W \in \mathcal{W}\,;\, W \cap V = \emptyset\}$ lokal endlich ist und aus abgeschlossenen Mengen besteht, folgt wegen Bemerkung 8.2:

$$\overline{\bigcup \{W \in \mathcal{W}\,;\, W \cap V = \emptyset\}} = \bigcup \{\overline{W}\,;\, W \in \mathcal{W}\,;\, W \cap V = \emptyset\} = \bigcup \{W \in \mathcal{W}\,;\, W \cap V = \emptyset\}\,.$$

Daher ist $\tilde{V}$ und somit auch $U_V \cap \tilde{V}$ eine offene Obermenge von V. Daher ist $\mathcal{U}_\mathcal{V} := (U_V \cap \tilde{V})_{V\in\mathcal{V}}$ eine offene Verfeinerungsüberdeckung zu $\mathcal{U}$. Wir zeigen, daß sie lokal endlich ist. Sei also $x \in X$ beliebig. Da $\mathcal{W}$ lokal endlich ist gibt es eine offene Umgebung Ω_x von x, so daß Ω_x einen nicht leeren Durchschnitt nur mit endlich vielen $W_1, \dots, W_m \in \mathcal{W}$ hat. Da $\mathcal{W}$ eine Überdeckung ist folgt $\Omega_x \subseteq W_1 \cup \ldots \cup W_m$. Ist also $V \in \mathcal{V}$ mit $\tilde{V} \cap \Omega_x \neq \emptyset$, so folgt schon $W_k \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ für ein $k \in \{1, \dots, m\}$. Nach Definition von $\tilde{V}$ ist dann auch $W_k \cap V \neq \emptyset$. Da $W_1, \dots, W_m$ nur mit endlich vielen $V \in \mathcal{V}$ nicht leeren Durchschnitt haben, folgt: $\Omega_x \cap (\tilde{V} \cap U_V) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $V \in \mathcal{V}$. Also ist $\mathcal{U}_\mathcal{V}$ eine lokal endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung zu $\mathcal{U}$. Da jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung besitzt, ist (X, τ) parakompakt. $\square$

Für den Beweis des folgenden Satzes benötigen wir den Wohlordnungssatz, der äquivalent zum Zornschen Lemma ist und damit ein Axiom der Mengenlehre ist. Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt *wohlgeordnet*, falls jede nicht leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. $\leq$ heißt dann auch eine *Wohlordnung* auf I. Jede wohlgeordnete Menge ist insbesondere total geordnet.

8.12. Satz (Wohlordnungssatz). *Jede Menge besitzt eine Wohlordnung.*

8.13. Satz. *Jeder metrische Raum (X, d) ist parakompakt.*

Beweis. Nach Satz 8.11 genügt es zu zeigen, daß jede offene Überdeckung von X eine σ–lokal–endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung besitzt. Sei also $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. O.B.d.A. gilt $U_i \neq X$ für alle $i \in I$ (sonst überdeckt X schon X). Nach dem Wohlordnungssatz besitzt I eine Wohlordnung $\leq$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I$ definieren wir abgeschlossene Mengen $A_{n,i}$, Mengen $B_{n,i}$ und offene Mengen $V_{n,i}$ durch

$$A_{n,i} := \left\{x \in U_i \;\; \mathrm{dist}(x, X \setminus U_i) \geq 2^{-n}\right\}\,,$$

$$B_{n,i} := \{x \in A_{n,i}\,;\, x \notin A_{n+1,j} \text{ für alle } j < i\}\,, V_{n,i} := \left\{x \in X\,;\, \mathrm{dist}(x, B_{n,i}) < 2^{-n-3}\right\}\,.$$

Offensichtlich gilt $U_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,i}$. Ist $x \in V_{n,i}$, so gibt es ein $y \in B_{n,i} \subseteq A_{n,i}$ mit $d(x,y) \leq 2^{-n-1}$ und wegen $y \in A_{n,i}$ folgt

$$\mathrm{dist}(x, X \setminus U_i) \geq \mathrm{dist}(y, X \setminus U_i) - d(x,y) \geq 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1} > 0$$

und damit $x \in U_i$. Für $x \in X$ sei $i(x)$ der kleinste Index $i \in I$ mit $x \in U_i$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{n,i(x)}$ und nach Definition von $i(x)$ folgt $x \in B_{n,i(x)} \subseteq V_{n,i(x)}$. Mit $\mathcal{S}_n := (V_{n,i})_{i\in I}$ folgt also $\mathcal{S} := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{S}_n$ ist eine offene Überdeckung von X, die eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist.

Wir zeigen nun, daß $\mathcal{S}_n$ lokal endlich ist. Seien $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und (o.B.d.A.) $j < i$ und sei $x \in B_{n,i}$. Nach Definition von $B_{n,i}$ folgt dann $x \notin A_{n+1,j}$, d.h. $\operatorname{dist}(x, X \setminus U_j) < 2^{-n-1}$. Für $y \in A_{n,j}$ ist $\operatorname{dist}(y, X \setminus U_j) \geq 2^{-n}$ und daher $d(x, y) \geq 2^{-n-1}$. Also folgt

$$\operatorname{dist}(B_{n,i}, B_{n,j}) \geq \operatorname{dist}(B_{n,i}, A_{n,j}) \geq 2^{-n-1}.$$

Aus der Definition von $V_{n,i}$ folgt nun

$$\operatorname{dist}(V_{n,i}, V_{n,j}) \geq \operatorname{dist}(B_{n,i}, B_{n,j}) - 2 \cdot 2^{-n-3} \geq 2^{-n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2}.$$

Ist nun $x \in X$ beliebig so folgt für die offene Umgebung

$$W := U_{2^{-n-2}}(x) = \{y \in X \,;\, d(x, y) < 2^{-n-2}\}$$

von x: $W \cap U_{n,i} \neq \emptyset$ für höchstens ein $i \in I$. Also ist $\mathcal{S}_n$ lokal endlich und $\mathcal{S}$ somit eine σ–lokal–endliche, offen Verfeinerungsüberdeckung zu $\mathcal{U}$. X ist somit parakompakt bezüglich der durch die Metrik d definierten Topologie. □

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt

- *F_σ–Menge*, falls A eine abzählbare Vereinigung von in (X, τ) abgeschlossenen Mengen ist,
- *G_δ–Menge*, falls A eine abzählbarer Durchschnitt von in (X, τ) offenen Mengen ist.

Offensichtlich ist eine Menge genau dann eine F_σ–Menge, wenn ihr Komplement eine G_δ–Menge ist.

Zum Beweis des Metrisationssatzes von Bing und Nagata–Smirnow benötigen wir zwei Hilfsaussagen:

8.14. Lemma. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

(a) *Ist (X, τ) regulär und besitzt τ eine σ–lokal–endliche Basis, so ist jede offene Teilmenge von X eine F_σ–Menge.*

(b) *Ist (X, τ) normal, so ist eine abgeschlossene Teilmenge A von X genau dann eine G_δ–Menge, wenn es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ gibt mit $A = f^{-1}(\{0\})$.*

Beweis. (a) Sei $\mathcal{B} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n$ eine σ–lokal–endliche Basis von τ mit lokal endlichen Mengensystemen $\mathcal{B}_n$. Sei G eine beliebige (o.B.d.A.) nicht leere offene Teilmenge von X. Da (X, τ) regulär ist, gibt es zu jedem $x \in G$ eine offene Umgebung U_x von x mit $\overline{U_x} \subseteq G$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie τ ist, gibt es $n(x) \in \mathbb{N}$ und ein $B_{n(x)}(x) \in \mathcal{B}_{n(x)}$ mit $B_{n(x)}(x) \subseteq U_x$. Es folgt $\overline{B_{n(x)}(x)} \subseteq \overline{U_x} \subseteq G$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$B_k := \bigcup \{B_{n(x)}(x) \,;\, x \in G, n(x) = k\}.$$

Da $\mathcal{B}_k$ ein lokal endliches Mengensystem ist folgt nach Bemerkung 8.2

$$\overline{B_k} = \bigcup \{\overline{B_{n(x)}(x)} \,;\, x \in G, n(x) = k\} \subseteq G.$$

Also ist $G = \bigcup_{k=1}^\infty \overline{B_k}$ eine F_σ–Menge.

(b) Ist $A = f^{-1}(\{0\})$ für eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ so ist A wegen

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^\infty \big(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\big)\Big) = \bigcap_{n=1}^\infty f^{-1}\big(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\big)$$

eine G_δ–Menge.

Sei nun umgekehrt $A = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ eine abgeschlossene G_δ–Menge mit offenen Mengen G_n, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es nach dem Lemma von Urysohn Funktionen $f_n : X \to [0, 1]$ mit $f_n \equiv 0$ auf A und $f_n \equiv 1$ auf $X \setminus G_n$. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} f_n$ hat $\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$ als konvergente Majorante, ist also gleichmäßig auf X konvergent gegen eine stetige Funktion f. Nach Konstruktion gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$. $\square$

8.15. Satz (Metrisationssatz von Bing und Nagata–Smirnow). *Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann metrisierbar, wenn er regulär ist und eine σ–lokal–endliche Basis der Topologie τ besitzt.*

Beweis. Sei d eine Metrik auf X, so daß die durch d definierte Topologie τ_d mit τ übereinstimmt. Zu der offenen Überdeckung $(U_{2^{-n}}(x))_{x \in X}$ von X gibt es dann nach Satz 8.13 eine lokal endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{V}_n$. Dann ist $\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ eine σ–lokal–endliche Basis für $\tau = \tau_d$.

Sei umgekehrt (X, τ) regulär und besitze τ eine σ–lokal–endliche Basis $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ mit lokalendlichen Mengensystemen $\mathcal{B}_n = (B_n, i)_{i \in I_n}, \in \mathbb{N}$. Zunächst zeigen wir, daß (X, τ) parakompakt ist. sei also $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Dann ist $\mathcal{V}_n := \{V \in \mathcal{B}_n \,;\, B \subseteq U_i \text{ für ein } i \in I\}$ als Teilmenge von $\mathcal{B}_n$ lokal endlich und $\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ ist eine offene Überdeckung von X, da jedes U_i, $i \in I$, Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Nach Satz 8.11 ist (X, τ) parakompakt, da jede offene Überdeckung von X eine σ–lokal–endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung besitzt.

Nach Lemma 8.14 ist jedes $B_{n,i}$ eine F_σ–Menge und somit $X \setminus B_{n,i}$ eine G_δ–Menge, zu der nach Lemma 8.14 eine stetige Funktion $\varphi_{n,i} : X \to [0, 1]$ existiert mit $B_{n,i} = \{x \in X \,;\, \varphi_{n,i}(x) > 0\}$. Da $\mathcal{B}_n$ lokal endlich ist, ist durch $\sigma_n(x) := \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x)$ eine stetige Funktion definiert und auch die Funktionen $\psi_{n,i} : X \to [0, 1]$ sowie $\sum_{i \in I_n} \psi_{n,i}$ mit

$$\psi_{n,i}(x) := \frac{\varphi_{n,i}(x)}{1 + \sigma_n(x)} \qquad (x \in X)$$

sind stetig mit

$$0 \leq \sum_{i \in I_n} \psi_{n,i}(x) < 1 \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Wir definieren nun

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{i \in I} |\psi_{n,i}(x) - \psi_{n,i}(y)| \,, \qquad (x, y \in X)$$

und weisen nach, daß $d : X \times X \to [0, \infty)$ eine Metrik ist. Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in I_n$ mit $x \in B_n, i \subseteq X \setminus \{y\}$. Daher ist $\psi_{n,i}(y) = 0 < \psi_{n,1}(x)$ und somit $d(x, y) > 0$. Offensichtlich gilt auch $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$ und auch die Dreiecksungleichung ist unmittelbar klar. d ist also eine Metrik auf X.

Als gleichmäßig konvergente Reihe von stetigen Funktionen ist für alle $x \in X$ die Funktion $d(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto d(x, y)$ stetig auf (X, τ). Insbesondere ist für alle $x \in X$, $\varepsilon > 0$, die Menge $U_\varepsilon(x) := \{y \in X \,;\, d(x, y) < \varepsilon\}$ offen in (X, τ). Ist umgekehrt U eine beliebige Umgebung von $x \in X$ in (X, τ), so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in I_n$ mit $x \in B_{n,i} = \{y \in X \,;\, \psi_{n,i}(y) > 0\} \subseteq U$. Insbesondere ist $\delta := 2^{-n}\psi_{n,i}(x) > 0$ und somit $U_\delta(x) \subseteq B_{n,i} \subseteq U$. Also ist U auch eine Umgebung von x in der durch die Metrik d gegebenen Topologie τ_d und es folgt $\tau = \tau_d$. $\square$

8.16. Folgerung. *Das topologische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ von mindestens zweielementigen metrischen Räumen (X_i, d_i), $i \in I$ ist genau dann metrisierbar, wenn I abzählbar ist.*

8.17. Folgerung (Zweiter Metrisationssatz von Urysohn). *Ein kompakter Hausdorffraum (X, τ) ist genau dann metrisierbar, wenn τ eine abzählbare Basis besitzt.*

Beweis. Als kompakter Hausdorffraum ist (X, τ) insbesondere normal, also auch regulär. Ist $\mathcal{S}$ ein lokal endliches Mengensystem, so gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x, so daß $U_x \cap S \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $S \in \mathcal{S}$. Da wir aus der offenen Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ wegen der Kompaktheit von (X, τ) eine endliche Teilüberdeckung auswählen können, kann $\mathcal{S}$ nur endlich viele Elemente haben. Insbesondere ist jedes σ–lokal–endliche Mengensystem in X schon abzählbar. Mit dem Metrisationssatz 8.15 folgt die Behauptung. $\square$