

Topologie

Ernst Albrecht



Vorlesung im Sommersemester 2007

Universität des Saarlandes

Saarbrücken

Stand: 20. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1.	Topologische Grundbegriffe in metrischen und topologischen Räumen	5
Kapitel 2.	Stetigkeit und Konvergenz	15
Kapitel 3.	Vergleich und Erzeugung von Topologien und topologischen Räumen	22
Kapitel 4.	Kompaktheit in topologischen Räumen	27
Kapitel 5.	Der Kategoriensatz von Baire	40
Kapitel 6.	Trennungseigenschaften	47
Kapitel 7.	Der Satz von Stone und Weierstraß	54
Kapitel 8.	Partition der Eins	59
Literaturverzeichnis		67
Index		68

Vorbemerkung

Dieses Skriptum gibt den Inhalt einer zweistündigen Vorlesung wieder, die ich im Sommersemester 2007 an der Universität des Saarlandes gehalten habe. Es handelt sich um eine erste Einführung in die mengentheoretische Topologie, in der wegen der Kürze des Sommersemesters auf viele Dinge gar nicht eingegangen werden konnte. Das Skriptum kann also nicht die Lehrbuchliteratur ersetzen.

Topologische Grundbegriffe in metrischen und topologischen Räumen

Die topologischen Grundbegriffe *offene Mengen*, *abgeschlossene Mengen*, *Inneres einer Menge* und *Abschließung einer Menge*, *Stetigkeit einer Abbildung*, *Konvergenz*, ... haben wir in den Anfängervorlesungen Analysis 1 und 2 bereits in der speziellen Situation des $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$, (etwa Kapitel 3 in [1]) oder allgemeiner in normierten Räumen, bzw. noch allgemeiner in metrischen Räumen (etwa Kapitel 8 in [1]) kennengelernt. Bevor wir zu noch allgemeineren Situationen übergehen, soll in diesem Kapitel nochmals an die Theorie der metrischen Räume erinnert werden.

1.1. DEFINITION. Sei X eine nicht leere Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Metrik* auf X , falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (M1) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (M2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$. (*Symmetrie*)
- (M3) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (*Dreiecksungleichung*)

(X, d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

1.2. BEISPIELE. (a) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $(E, d_{\|\cdot\|})$ mit $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$ für alle $x, y \in E$ ein metrischer Raum. Wir nennen $d_{\|\cdot\|}$ die von der Norm $\|\cdot\|$ induzierte Metrik auf E . Insbesondere ist also $\mathbb{R}^N$ versehen mit der durch den euklidischen Betrag induzierten Metrik $d_{|\cdot|}$ ein metrischer Raum.

(b) Sei $\emptyset \neq F \subseteq \mathbb{R}^2$ und $p \in F$. Wir definieren die *Zentralismus-Metrik* $d_p : F \times F \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$d_p(x, y) := \begin{cases} |x - p| + |p - y| & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

für alle $x, y \in F$. Man rechnet leicht nach, daß die Bedingungen (M1)–(M3) erfüllt sind.

(c) Sei X eine nicht leere Menge. Wir definieren die *diskrete Metrik* $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für alle $x, y \in X$. Auch hier rechnet man unmittelbar nach, daß die Bedingungen (M1)–(M3) erfüllt sind.

1.3. BEMERKUNG. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Man rechnet unmittelbar nach, daß dann $(Y, d|_{Y \times Y})$ ebenfalls ein metrischer Raum ist. Wir nennen $d|_{Y \times Y}$ die von d auf Y induzierte Metrik. Insbesondere wird also jede nicht leere Teilmenge Y eines normierten Raums, versehen mit der durch $d_{\|\cdot\|}$ auf Y induzierten Metrik zu einem metrischen Raum.

Wir erinnern an die wichtigsten topologischen Grundbegriffe in metrischen Räumen:

1.4. DEFINITION. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$.

- (a) Für $\varepsilon > 0$ heißt die Menge $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X ; d(x, x_0) < \varepsilon\}$ die ε -Umgebung von x_0 in (X, d) .
- (b) $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von x_0 , falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ gibt.
- (c) $\Omega \subseteq X$ heißt *offen* in (X, d) , falls Ω Umgebung eines jeden Punktes von Ω ist, d.h. falls es zu jedem $x \in \Omega$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$.
- (d) x_0 heißt *innerer Punkt* einer Teilmenge M von X , wenn M eine Umgebung von x_0 ist, d.h. wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq M$.
- (e) Für eine Teilmenge M von X heißt die Menge

$$\overset{\circ}{M} := \text{int}(M) := \{x \in M ; x \text{ ist innerer Punkt von } M\}$$

der inneren Punkte von M das *Innere* oder der *offene Kern* von M in (X, d) .

- (f) Eine Teilmenge A von X heißt *abgeschlossen* in (X, d) , falls ihr Komplement $X \setminus A$ offen in (X, d) ist.
- (g) x_0 heißt *Berührungspunkt* einer Menge $M \subseteq X$, falls für jede Umgebung U von x_0 in (X, d) gilt: $U \cap M \neq \emptyset$.
- (h) Für eine Teilmenge M von X heißt die Menge

$$\overline{M} := \{x \in X ; x \text{ Berührungspunkt von } M \text{ in } (X, d)\}$$

der Berührungspunkte von M in (X, d) die *abgeschlossene Hülle* oder die *Abschließung* von M in (X, d) .

BEMERKUNGEN. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$.

- (a) Die Mengen X und $\emptyset$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen in (X, d) .
- (b) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die ε -Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0 in (X, d) offen.
- (c) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Menge

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in X ; d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen in (X, d) .

- (d) Die Menge $(0, 1]$ ist weder offen noch abgeschlossen in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.
- (e) Sei X eine nicht leere Menge und $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ die diskrete Metrik auf X (vergl. Beispiel 1.2 (c)). Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0, 1]$ und alle $x \in X$: $U_\varepsilon(x) = \{x\}$ und für alle $\varepsilon > 1$ ist $U_\varepsilon(x) = X$. Sei $M \subseteq X$ beliebig. Es folgt für alle $x \in M$: $U_1(x) = \{x\} \subseteq M$. Also ist M offen in (X, d) . Da dies auch für $X \setminus M$ gilt, ist M auch abgeschlossen in (X, d) . Alle Teilmengen von X sind somit bezüglich der diskreten Metrik auf X sowohl offen als auch abgeschlossen.

Dies ist alles aus Analysis 2 bekannt.

Das folgende Lemma enthält Aussagen über Durchschnitte bzw. Vereinigungen von offenen und von abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums.

1.5. LEMMA. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (a) Der Durchschnitt von endlich vielen in (X, d) offenen Teilmengen von X ist offen in (X, d) .
- (b) Die Vereinigung von beliebig vielen in (X, d) offenen Teilmengen von X ist offen in (X, d) .
- (c) Die Vereinigung von endlich vielen in (X, d) abgeschlossenen Teilmengen von X ist abgeschlossen in (X, d) .
- (d) Der Durchschnitt von beliebig vielen in (X, d) abgeschlossenen Teilmengen von X ist abgeschlossen in (X, d) .

BEWEIS. (a) Seien $G_1, \dots, G_n$ endlich viele offene Mengen in (X, d) und sei $x \in \bigcap_{j=1}^n G_j$ beliebig. Zu jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt es ein $\varepsilon_j > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq G_j$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ gilt dann: $\varepsilon > 0$ und $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^n G_j$. Nach Definition 1.4 (c) ist $\bigcap_{j=1}^n G_j$ also offen.

(b) Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von in (X, d) offenen Teilmengen von X und sei $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$ beliebig. Dann gibt es ein $i_0 \in I$, so daß $x \in G_{i_0}$. Da G_{i_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Also ist $\bigcup_{i \in I} G_i$ offen in (X, d) .

(c) und (d) erhält man aus (a) bzw. (b) durch Übergang zum Komplement. $\square$

Dieses Lemma legt eine noch allgemeinere Begriffsbildung nahe:

1.6. DEFINITION. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

- (O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.
- (O2) Endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{T}$ liegen in $\mathcal{T}$.
- (O3) Vereinigungen von beliebig vielen Elementen aus $\mathcal{T}$ liegen in $\mathcal{T}$.

Dann heißt $\mathcal{T}$ eine *Topologie* auf X und $(X, \mathcal{T})$ ein *topologischer Raum*. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen die in $(X, \mathcal{T})$ offenen Mengen.

1.7. BEISPIELE. Sei X eine Menge.

- (a) $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ heißt die *größte (leere)* oder *indiskrete Topologie* auf X .
- (b) $\mathcal{T} := \mathfrak{P}(X)$ (:= Potenzmenge) heißt die *diskrete Topologie* auf X .
- (c) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Menge der bzgl. d offenen Teilmengen von X definiert eine Topologie $\mathcal{T}_d$. Es gilt:

$$\mathcal{T}_d = \{G \subset X; \forall x \in G \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G\}.$$

- (d) $\mathcal{T} := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X; X \setminus G \text{ ist endlich}\}$ definiert eine Topologie auf X .
- (e) $\mathcal{T} := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X; X \setminus G \text{ ist höchstens abzählbar unendlich}\}$ definiert eine Topologie auf X .

Es zeigt sich, daß - mit Ausnahme des Begriffs der ε -Umgebung - alle in Definition 1.4 eingeführten Begriffe auch in topologischen Räumen sinnvoll eingeführt werden können.

1.8. DEFINITION. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.

- (a) Eine Teilmenge A von X heißt *abgeschlossen* in (X, d) , falls ihr Komplement $X \setminus A$ offen in $(X, \mathcal{T})$ ist.
- (b) Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von x_0 , falls es eine offene Menge $G \subseteq X$ gibt mit $x_0 \in G \subseteq U$ gibt.
- (c) x_0 heißt *innerer Punkt* einer Teilmenge M von X (bezüglich $\mathcal{T}$), wenn M eine Umgebung von x_0 ist, d.h. wenn es eine offene Menge $G \subseteq X$ gibt mit $x_0 \in G \subseteq M$.
- (d) Für eine Teilmenge M von X heißt die Menge

$$\overset{\circ}{M} := \text{int}(M) := \{x \in M; x \text{ ist innerer Punkt von } M\}$$

der inneren Punkte von M das *Innere* oder der *offene Kern* von M in $(X, \mathcal{T})$.

- (e) x_0 heißt *Berührungspunkt* einer Menge $M \subseteq X$ (bezüglich $\mathcal{T}$), falls für jede Umgebung U von x_0 in $(X, \mathcal{T})$ gilt: $U \cap M \neq \emptyset$.
- (f) Für eine Teilmenge M von X heißt die Menge

$$\overline{M} := \{x \in X; x \text{ Berührungspunkt von } M \text{ in } (X, \mathcal{T})\}$$

der Berührungspunkte von M in $(X, \mathcal{T})$ die *abgeschlossene Hülle* oder die *Ab-schließung* von M in $(X, \mathcal{T})$.

- (g) $x \in X$ heißt *Randpunkt* einer Teilmenge M von X , falls x Berührungspunkt von M und von $X \setminus M$ ist. Die Menge

$$\partial A := \{x \in X \mid x \text{ Randpunkt von } M\}$$

nennen wir den (topologischen) *Rand* von M bzgl. $\mathcal{T}$.

Aus (O1) - (O3) erhält man durch Übergang zu den Komplementen:

1.9. LEMMA. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Menge $\mathcal{A}$ aller abgeschlossenen Teilmengen hat die folgenden Eigenschaften.

(A1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.

(A2) Beliebige Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{A}$ liegen in $\mathcal{A}$.

(A3) Endliche Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{A}$ liegen in $\mathcal{A}$.

Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X , die den Bedingungen (A1) - (A3) genügt, so ist durch

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} := \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

eine Topologie auf X gegeben, für die $\mathcal{A}$ gerade die Menge aller bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossenen Teilmengen von X ist.

1.10. LEMMA. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(x)$ die Menge aller Umgebungen von x in $(X, \mathcal{T})$. Die Menge $\{\mathfrak{U}(x) \mid x \in X\}$ genügt den folgenden Bedingungen (U1) - (U4):

(U1) $U \in \mathfrak{U}(x), V \supseteq U \Rightarrow V \in \mathfrak{U}(x)$.

(U2) $U_1, \dots, U_k \in \mathfrak{U}(x) (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{j=1}^k U_j \in \mathfrak{U}(x)$.

(U3) $U \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow x \in U$.

(U4) $U \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow (\exists V \in \mathfrak{U}(x) \forall y \in V : U \in \mathfrak{U}(y))$.

Dies zeigt man durch direktes Nachrechnen.

1.11. LEMMA. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $V \subset X$ sind äquivalent:

(a) V ist offen.

(b) Für alle $y \in V$ ist $V \in \mathfrak{U}(y)$.

(c) Für alle $y \in V$ gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U \subseteq V$.

BEWEIS. Ist V offen und $y \in V$ beliebig, so ist V nach Definition der Umgebungen insbesondere eine Umgebung von y . Aus (a) folgt also (b).

Die Implikation von (b) nach (c) ist offensichtlich.

Sei nun (c) erfüllt. Dann gibt es zu jedem $y \in V$ eine Umgebung $U_y \subseteq V$ von y . Nach Definition der Umgebung gibt es dann eine offene Menge G_y in $(X, \mathcal{T})$ mit $y \in G_y \subseteq U_y \subseteq V$. Es folgt also

$$V \subseteq \bigcup_{y \in V} G_y \subseteq V \quad \text{und somit} \quad V = \bigcup_{y \in V} G_y.$$

Als Vereinigung von offenen Mengen ist V also nach (O3) offen in $(X, \mathcal{T})$. $\square$

1.12. LEMMA. Ist X eine Menge und ist für alle $x \in X$ ein Mengensystem $\mathfrak{U}(x)$ gegeben, welches die Bedingungen (U1) - (U4) in Lemma 1.10 erfüllt, so ist durch

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{U}} := \{G \subseteq X; \forall y \in G : G \in \mathfrak{U}(y)\}$$

eine Topologie auf X gegeben. Ist $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}(x); x \in X\}$ das Umgebungssystem einer Topologie $\mathcal{T}$, so stimmt $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$ mit $\mathcal{T}$ überein.

Man kann also auch auf diese Weise mit Hilfe der Umgebungsaxiome (U1) - (U4) die Topologien einführen.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, falls es auf X eine Metrik d gibt, so daß die zugehörige Topologie

$$\mathcal{T}_d = \{G \subset X; \forall x \in G \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G\}$$

mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt. Wir werden gleich sehen, daß nicht jeder topologische Raum metrisierbar ist.

1.13. DEFINITION. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *separiert* oder *Hausdorffraum* oder *T_2 -Raum* falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y in $(X, \mathcal{T})$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$. Wir sagen dann auch: *Die Topologie $\mathcal{T}$ ist separiert.*

- 1.14. BEISPIELE. (a) Jeder metrische Raum (X, d) ist versehen mit der durch seine Metrik $\mathcal{T}_d$ definierten Topologie ein Hausdorffraum.
 (b) Besitzt X mehr als ein Element, so ist X versehen mit der indiskreten Topologie *kein* Hausdorffraum. Insbesondere ist die indiskrete Topologie auf Mengen mit mehr als einem Element nicht metrisierbar.

1.15. BEMERKUNG. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum, so ist für alle $x \in X$ die einpunktige Menge $\{x\}$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

BEWEIS. Ist $x \in X$ beliebig, so gibt es wegen der Separiertheit von $\mathcal{T}$ zu jedem $y \in X \setminus \{x\}$ eine Umgebung U_y von y mit $U_y \cap (X \setminus \{x\}) = \emptyset$. Nach Lemma 1.11 ist $\{x\}$ also abgeschlossen. $\square$

1.16. DEFINITION. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Familie $\mathfrak{B}(x) \subset \mathfrak{U}(x)$ von Umgebungen von x heißt *Umgebungsbasis für x* (oder auch *Fundamentalsystem von Umgebungen von x*), falls es zu jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein $V \in \mathfrak{B}(x)$ gibt mit $V \subseteq U$.

Ist für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\mathfrak{B}(x)$ für x gegeben, so nennt man $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{B}(x); x \in X\}$ eine *Umgebungsbasis von $(X, \mathcal{T})$* .

- 1.17. BEISPIELE. (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für alle $x \in X$ ist dann $\mathfrak{B}(x) := \{U_{\frac{1}{n}}(x); n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x (bzgl. der durch d auf X gegebenen Topologie $\mathcal{T}_d$).
 (b) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathfrak{B}(x) := \{G \in \mathcal{T}; x \in G\}$ eine Umgebungsbasis für x .

Wir sagen: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ genügt dem *ersten Abzählbarkeitsaxiom*, falls jeder Punkt aus X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Beispiel 1.17 (a) besagt also insbesondere, daß jeder metrische Raum dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

1.18. BEMERKUNGEN. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- (a) Sei $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis für $x \in X$. Dann erhält man das Umgebungssystem $\mathfrak{U}(x)$ von x durch: $\mathfrak{U}(x) = \{U \subset X; \exists V \in \mathfrak{B}(x) : V \subset U\}$.
 (b) Ist $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis von offenen Mengen in $(X, \mathcal{T})$, so ergeben sich aus (U1) – (U4) und 1.5 die Aussagen:
 (B1) $\forall x \in X : \mathfrak{B}(x) \neq \emptyset$ und $x \in V$ für alle $V \in \mathfrak{B}(x)$.

- (B2) $\forall V_1, V_2 \in \mathfrak{B}(x) \exists V \in \mathfrak{B}(x) : V \subset V_1 \cap V_2$.
 (B3) Ist $y \in V \in \mathfrak{B}(x)$, so existiert $W \in \mathfrak{B}(y)$ mit $W \subset V$.
 (c) Umgekehrt gilt: Ist für jedes Element x einer Menge X eine Familie $\mathfrak{B}(x)$ von Teilmengen von X gegeben, so daß (B1) – (B3) erfüllt sind, so gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X , für die $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{B}(x); x \in X\}$ eine Umgebungsbasis von $(X, \mathcal{T})$ ist, die aus $\mathcal{T}$ -offenen Mengen besteht.

Beweis als Übung.

Die Bezeichnungen *offener Kern* und *abgeschlossene Hülle* in Definition 1.8 werden gerechtfertigt durch das folgende Lemma:

1.19. LEMMA. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.

(a) $\text{int}(M)$ ist die größte in M enthaltene offene Teilmenge von X . Es gilt

$$(1.1) \quad \text{int}(M) = \bigcup \{G \subseteq M; G \text{ ist offen in } (X, \mathcal{T})\}.$$

(b) Es gilt: $M = \text{int}(M) \iff M$ ist offen in $(X, \mathcal{T})$.

(c) $\text{int}(M) = \text{int}(\text{int}(M))$.

(d) $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die M enthält. Es gilt

$$(1.2) \quad \overline{M} = \bigcap \{A \subseteq X; M \subseteq A \text{ und } A \text{ ist abgeschlossen}\}.$$

(e) Es gilt: $\overline{M} = M \iff M$ ist abgeschlossen.

(f) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

BEWEIS. (a) Wir zeigen zunächst, daß $\text{int}(M)$ offen in $(X, \mathcal{T})$ ist. Sei also $x_0 \in \text{int}(M)$ beliebig. Nach Definition von $\text{int}(M)$ gibt es dann eine offene Menge $G \subseteq M$ mit $x_0 \in G$. Da G offen ist, ist M auch Umgebung von allen Punkten $y \in G$. Somit ist also $G \subseteq \text{int}(M)$. Zu jedem Punkt aus $\text{int}(M)$ gibt es also eine Umgebung dieses Punktes, die noch ganz in $\text{int}(M)$ enthalten ist. Nach Lemma 1.11 ist $\text{int}(M)$ also offen.

Ist nun G eine beliebige in $(X, \mathcal{T})$ offene Teilmenge von M , so ist M für alle $x \in G$ eine Umgebung von x und somit $G \subseteq \text{int}(M)$. Insbesondere folgt (1.1).

(b) “ $\implies$ ” folgt unmittelbar aus (a) und “ $\impliedby$ ” ergibt sich unmittelbar aus der Definition der offenen Mengen und des offenen Kerns.

(c) folgt aus (a) und (b).

(d) Wir zeigen zunächst $M \subseteq \overline{M}$. Ist $x \in M$ beliebig, so gilt für alle Umgebungen U von x in $(X, \mathcal{T})$: $x \in U \cap M$ und somit $U \cap M \neq \emptyset$. Jeder Punkt aus M ist also Berührungspunkt von M .

Wir zeigen nun, daß $\overline{M}$ abgeschlossen ist in $(X, \mathcal{T})$, indem wir zeigen, daß $X \setminus \overline{M}$ offen ist. Sei also $x \in X \setminus \overline{M}$ beliebig. Da x kein Berührungspunkt von M ist, gibt es eine Umgebung U_x von x mit $U_x \cap M = \emptyset$. Diese enthält nach Definition der Umgebung eine offene Menge G_x mit $x \in G_x$. Für alle $y \in G_x$ ist also U_x auch eine Umgebung von y mit $U_x \cap M = \emptyset$. Es folgt also $G_x \subseteq X \setminus \overline{M}$. $X \setminus \overline{M}$ ist also Umgebung eines jeden Punktes $x \in X \setminus \overline{M}$. Nach Lemma 1.11 ist $X \setminus \overline{M}$ also offen und $\overline{M}$ somit abgeschlossen.

Sei nun A eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von X mit $M \subseteq A$. Da $X \setminus A$ offen ist, ist $X \setminus A$ zu jedem $x \in X \setminus A$ eine Umgebung von x , die zu A und somit auch zu M disjunkt ist. Die Punkte aus $X \setminus A$ sind daher keine Berührungspunkte von M . Also ist $\overline{M} \subseteq A$ und es folgt die Behauptung.

(e) folgt unmittelbar aus (d) und (f) ist eine Konsequenz von (d) und (e). $\square$

Die folgenden Rechenregeln für die abgeschlossene Hülle und den offenen Kern werden in den Übungen gezeigt:

1.20. LEMMA. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien A und B zwei Teilmengen von X . Dann gilt:

- (a) $\overline{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A)$ und $\text{int}(B) = X \setminus \overline{X \setminus B}$
- (b) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (c) $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ und $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
- (d) $\partial(X \setminus A) = \partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$

1.21. DEFINITION. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge M von X heißt *dicht* in X bezüglich $\mathcal{T}$, falls $\overline{M} = X$. $(X, \mathcal{T})$ heißt *separabel* falls $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Man kann Topologien auch über Kern- oder Hüllenoperationen einführen. Für die Kernoperation führen wir dies im folgenden Lemma aus. Für die Hüllenoperation sei auf Übungsaufgabe verwiesen.

1.22. LEMMA. Sei X eine Menge und sei $\kappa : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

- (a) $\kappa(X) = X$.
- (b) $\forall M \subseteq X: \kappa(M) \subseteq M$.
- (c) $\forall A, B \subseteq X: \kappa(A \cap B) = \kappa(A) \cap \kappa(B)$.
- (d) $\forall M \subseteq X: \kappa(\kappa(M)) = \kappa(M)$.

Dann ist durch

$$\mathcal{T}_\kappa := \{M \subseteq X; \kappa(M) = M\}$$

eine Topologie auf X gegeben. Für diese gilt $\kappa(M) = \text{int}(M)$ für alle $M \subseteq X$.

BEWEIS. Aus (a) und (b) folgt $X \in \mathcal{T}_\kappa$ und $\emptyset \in \mathcal{T}_\kappa$. Mit (c) zeigt man induktiv, daß endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{T}_\kappa$ wieder in $\mathcal{T}_\kappa$ liegen. Ist schließlich $(M_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengen aus $\mathcal{T}_\kappa$ so folgt mit (b) und wegen

$$M_i = \kappa(M_i) = \kappa\left(M_i \cap \bigcup_{j \in I} M_j\right) = \kappa(M_i) \cap \kappa\left(\bigcup_{j \in I} M_j\right) \subseteq \kappa\left(\bigcup_{j \in I} M_j\right)$$

für alle $i \in I$ durch Übergang zur Vereinigung:

$$\bigcup_{i \in I} M_i \subseteq \kappa\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i.$$

Also hat $\mathcal{T}_\kappa$ die definierenden Eigenschaften (O1) - (O3) einer Topologie.

Ist M eine beliebige Teilmenge von X , so ist $\kappa(M) \in \mathcal{T}_\kappa$ (wegen (d)) und es folgt für alle $G = \kappa(G) \in \mathcal{T}_\kappa$ mit $G \subseteq M$:

$$\kappa(G) = \kappa(G \cap M) = \kappa(G) \cap \kappa(M) = G \cap \kappa(M) \subseteq M.$$

$\kappa(M)$ ist also die größte in $(X, \mathcal{T}_\kappa)$ offene Teilmenge von M , stimmt also nach Lemma 1.19 mit dem Inneren von M bezüglich $\mathcal{T}_\kappa$ überein. $\square$

1.23. DEFINITION. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und M eine Teilmenge von X . Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt

- *Häufungspunkt* von M , falls jede Umgebung von x_0 einen von x_0 verschiedenen Punkt aus M enthält.
- *isolierter Punkt* von M , falls es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $U \cap M = \{x_0\}$.

Mit diesen Bezeichnungen sieht man leicht:

1.24. LEMMA. Sei M eine Teilmenge eines topologischen Raums $(X; \mathcal{T})$. Dann gilt

$$\overline{M} = \{x \in X; x \text{ ist ein isolierter Punkt von } M \text{ oder ein Häufungspunkt von } M\},$$

d.h. jeder Berührungspunkt von M ist entweder ein isolierter Punkt von M oder ein Häufungspunkt von M .

1.25. DEFINITION. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B}$ von offenen Teilmengen von X heißt eine *Basis der Topologie* $\mathcal{T}$, falls jede in $(X, \mathcal{T})$ offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

1.26. BEISPIELE. (a) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $\{U_\varepsilon(x); x \in X, \varepsilon > 0\}$ eine Basis der durch die Metrik d definierten Topologie $\mathcal{T}_d$.

(b) Ist X eine Menge, so ist $\{\{x\}; x \in X\}$ eine Basis für die diskrete Topologie auf X .

Man sagt: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ genügt dem *zweiten Abzählbarkeitsaxiom*, falls es in $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare Basis für die Topologie $\mathcal{T}$ gibt.

1.27. BEISPIELE. (a) Der $\mathbb{R}^N$ versehen mit der euklidischen Topologie $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. Eine abzählbare Basis für $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{B} = \{U_{1/n}(x); x \in \mathbb{Q}^N\}.$$

(b) Jede Menge X erfüllt - versehen mit der indiskreten Topologie - das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

1.28. LEMMA. Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge X , welche den folgenden beiden Bedingungen genügt:

(a) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

(b) Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und alle $x \in B_1 \cap B_2$ gibt es eine Menge $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Sei $\mathcal{T} := \{\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B; \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ die Menge aller Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie und jede Topologie auf X , welche $\mathcal{B}$ als eine Basis hat, stimmt mit $\mathcal{T}$ überein.

Zum Beweis rechnet man nach, daß die Forderungen (O1) - (O3) erfüllt sind. Aus der Definition der Basis ergibt sich dann die Eindeutigkeitsaussage. Man beachte hierbei, daß $\emptyset \in \mathcal{T}$ gilt wegen $\emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B$.

1.29. DEFINITION. Sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$. Dann ist durch

$$\mathcal{T}_Y := \{G \cap Y; G \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf Y gegeben. $\mathcal{T}_Y$ heißt die *Unterraumtopologie*, *Relativtopologie*, *Spurtopologie* oder die von $\mathcal{T}$ auf Y induzierte Topologie.

Ist Y Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) und $\mathcal{T}_d$ die durch die Metrik auf X gegebene Topologie, so stimmt die durch $d|_{Y \times Y}$ auf Y gegebene Topologie überein mit der von der durch $\mathcal{T}$ auf Y induzierten Topologie. Ist (X, d) separabel, so auch $(Y, d|_{Y \times Y})$. In allgemeinen topologischen Räumen trifft dies im Allgemeinen nicht mehr zu. Dies wollen wir durch ein Beispiel belegen:

1.30. BEISPIEL. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Familie $\mathcal{B} := \{B_{\alpha,\beta}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ aller Teilmengen der Gestalt

$$B_{\alpha,\beta} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq \alpha, y \geq \beta\}.$$

$\mathcal{B}$ erfüllt offensichtlich die Bedingung (a) in Lemma 1.28 und wegen

$$B_{\alpha_1,\beta_1} \cap B_{\alpha_2,\beta_2} = B_{\alpha,\beta} \quad \text{mit } \alpha := \max\{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ und } \beta := \max\{\beta_1, \beta_2\} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R})$$

auch die Bedingung (b). Gemäß Lemma 1.28 ist $\mathcal{B}$ also Basis einer eindeutig bestimmten Topologie $\mathcal{T}$. Dann gilt:

- (a) $M := \{(n, n); n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$. Der topologische Raum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ ist also separabel.
- (b) $Y := \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$ ist (versehen mit der Unterraumtopologie) nicht separabel.
- (c) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ ist nicht separiert, induziert aber auf Y die separierte diskrete Topologie.

BEWEIS. (a) Ist $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und ist U eine beliebige Umgebung von (u, v) in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$, so enthält U eine offene Menge G mit $(u, v) \in G$. Da G eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist, gibt es also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(u, v) \in B_{\alpha,\beta} \subseteq G \subseteq U$. Für alle $n \geq \max\{\alpha, \beta\}$ aus $\mathbb{N}$ gilt dann $(n, n) \in B_{\alpha,\beta} \cap M \subseteq U \cap M$. Also ist $(u, v) \in \overline{M}$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, d.h. M liegt dicht in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x, -x)\} = Y \cap B_{x,-x}$ offen in der durch $\mathcal{T}$ auf Y induzierten Topologie, d.h. $\mathcal{T}$ induziert auf Y die diskrete Topologie. Da $\mathbb{R}$ und somit auch Y nicht abzählbar ist, kann Y keine bezüglich der diskreten Topologie dichte abzählbare Teilmenge enthalten.

(c) ist nun klar. □

1.31. DEFINITION. Sei $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge X . Sei

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} := \left\{ \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S; \mathcal{F} \text{ endliche Teilmenge von } \mathcal{S} \right\}.$$

$\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ erfüllt offensichtlich die Bedingung (b) in Lemma 1.28 und wegen

$$\bigcap_{S \in \emptyset} S = \{x \in X; x \in S \text{ für alle } S \in \emptyset\} = X$$

auch (a). Daher ist $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ Basis einer eindeutig bestimmten Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ auf X . $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ heißt die durch $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie und $\mathcal{S}$ nennt man ein *Erzeugendensystem* oder eine *Subbasis* dieser Topologie.

Übungsaufgaben zu Kapitel 1.

1.1. AUFGABE. Wir betrachten in $\mathbb{R}$ das folgende Mengensystem

$$\mathcal{T} := \{(-\infty, \alpha); \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\} \cup \{\emptyset\}.$$

- (a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.
- (b) Beschreiben Sie die abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
- (c) Berechnen Sie die Menge der Berührungspunkte und den topologischen Rand von $\{2007\}$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
- (d) Berechnen Sie das Innere und die Abschließung von $(-2007, \infty)$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

1.2. AUFGABE. Geben Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X := \{1, 2\}$ an.

1.3. AUFGABE. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie:

- (a) M ist offen in $(X, \mathcal{T})$ genau dann, wenn $M \cap \partial M = \emptyset$.

$$(b) \overline{M} = M \cup \partial M.$$

1.4. AUFGABE. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X . Für $x \in X$ sei $[x] := \{y \in X; y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim$. Mit $X/\sim$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{T}_\sim := \{G \subseteq X/\sim; \{x \in X; [x] \in G\} \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf $X/\sim$ definiert. Diese heißt die *Quotiententopologie* und der topologische Raum $(X/\sim, \mathcal{T}_\sim)$ heißt der *Quotientenraum* von $(X, \mathcal{T})$ bezüglich $\sim$.

1.5. AUFGABE. Zeigen Sie: Ist (X, d) ein separabler metrischer Raum und $\emptyset \neq Y \subseteq X$, so ist auch $(Y, d|_{Y \times Y})$ separabel.

1.6. AUFGABE. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien A und B zwei Teilmengen von X . Zeigen Sie:

- (a) $\overline{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A)$ und $\text{int}(B) = X \setminus \overline{X \setminus B}$.
- (b) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (c) $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ und $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Belegen Sie durch ein Beispiel, daß diese Inklusionen echt sein können.
- (d) $\partial(X \setminus A) = \partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$.

1.7. AUFGABE. Sei X eine Menge und sei $h : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

- (a) $h(\emptyset) = \emptyset$.
- (b) $\forall M \subseteq X: M \subseteq h(M)$.
- (c) $\forall A, B \subseteq X: h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$.
- (d) $\forall M \subseteq X: h(h(M)) = h(M)$.

Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}_h$ auf X , deren abgeschlossene Teilmengen übereinstimmen mit

$$\mathcal{A}_h := \{M \subseteq X; h(M) = M\}.$$

Für diese Topologie gilt $h(M) = \overline{M}$ für alle $M \subseteq X$.

1.8. AUFGABE. Sei $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ versehen mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \{G \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \forall x \in G \exists \varepsilon > 0 : \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; |y - x| < \varepsilon\} \subseteq G\}.$$

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis besitzt, die aus Mengen besteht, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

KAPITEL 2

Stetigkeit und Konvergenz

In metrischen Räumen kann der Begriff der Stetigkeit in einem Punkt auf mehrere Arten eingeführt werden. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von einem metrischen Raum (X, d) in einen metrischen Raum (Y, d') heißt *stetig in einem Punkt* $x_0 \in X$, falls eine der vier äquivalenten Bedingungen des folgenden aus der Analysisvorlesung bekannten Lemmas erfüllt ist.

2.1. LEMMA (Vergl. z.B. Lemma 8.9 in [1]). Seien (X, d) und (Y, d') zwei metrische Räume. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und einen Punkt $x_0 \in X$ sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:

- (a) Für jede Umgebung U von $f(x_0)$ in (Y, d') ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x_0 in (X, d) .
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.
- (c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
- (d) f ist folgenstetig in x_0 , d.h. für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in (X, d) gilt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$.

Während die zweite und dritte dieser äquivalenten Bedingungen in topologischen Räumen keinen Sinn machen, ist die erste problemlos auf den Fall allgemeiner topologischer Räume übertragbar. Wir definieren also:

2.2. DEFINITION. $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ seien topologische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ heißt *stetig in einem Punkt* $x \in X_1$, falls für jede Umgebung U von $f(x)$ die Menge $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in $(X_1, \mathcal{T}_1)$ ist. f heißt *stetig*, falls f in allen $x \in X_1$ stetig ist.

Wie steht es nun mit dem Folgenkriterium? Die Konvergenz von Folgen läßt sich ohne Probleme in topologischen Räumen einführen:

2.3. DEFINITION. Ist x_0 ein Punkt in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, so nennen wir eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ *konvergent* in $(X, \mathcal{T})$ gegen x_0 , falls es zu jeder Umgebung U von x_0 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(x_n) \in U$. Wir schreiben dann $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$.

Der Grenzwert ist im nicht separierten Fall hierdurch nicht eindeutig bestimmt. Ist z.B. $\mathcal{T}$ die indiskrete auf X , so konvergiert jede Folge aus X gegen jeden Wert aus X .

2.4. LEMMA. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}')$, die in einem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist, so ist f in x_0 auch folgenstetig, d.h.: Für jede gegen x_0 in $(X, \mathcal{T})$ konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ gilt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$.

BEWEIS. Sei also $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige in $(X, \mathcal{T})$ gegen x_0 konvergente Folge und sei U eine beliebige Umgebung von $f(x_0)$ in $(Y, \mathcal{T}')$. Wegen der Stetigkeit von f in x ist dann $V := f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x_0 in $(X, \mathcal{T})$. Wegen $x_n \rightarrow x_0$ in $(X, \mathcal{T})$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ $x_n \in V$ und somit auch $f(x_n) \in U$ gilt. Damit folgt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ in $(Y, \mathcal{T}')$ für $n \rightarrow \infty$. $\square$

Anders als in metrischen Räumen gilt die Umkehrung hierzu in topologischen Räumen im allgemeinen nicht. Vergl. hierzu die Aufgabe 2.2.

2.5. SATZ. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ sind äquivalent:

- (a) f ist stetig.
- (b) Für jede Menge $M \subset X$ ist $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.
- (c) Ist $A \subset Y$ abgeschlossen, so ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.
- (d) Ist $G \subset Y$ offen, so ist $f^{-1}(G)$ offen in $(X, \mathcal{T})$.

BEWEIS. “(a) $\implies$ (b)”: Sei f auf X stetig und sei $M \subseteq X$ beliebig. Ist x ein beliebiger Punkt aus $\overline{M}$ und $V \subseteq Y$ eine beliebige Umgebung von $f(x)$ in $(Y, \mathcal{T}')$, so ist wegen der Stetigkeit von f in x die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in $(X, \mathcal{T})$. Da x ein Berührungspunkt von M ist, gibt es daher ein $u \in f^{-1}(V) \cap M$. Es folgt $f(u) \in V \cap f(M)$ und somit $V \cap f(M) \neq \emptyset$ für alle Umgebungen V von $f(x)$. Also ist $f(x) \in \overline{f(M)}$ für alle $x \in \overline{M}$.

“(b) $\implies$ (c)”: Ist (b) erfüllt und ist A eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von Y , so folgt mit $M := f^{-1}(A)$ (wegen $A = \overline{A}$ nach Lemma 1.19) aus (b)

$$f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)} \subseteq \overline{A} = A$$

und hieraus

$$f^{-1}(A) = M \subseteq \overline{M} = \overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(A).$$

Nach Lemma 1.19 ist $f^{-1}(A)$ also abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

“(c) $\implies$ (d)”: Sei (c) erfüllt und sei $G \subseteq Y$ eine beliebige in $(Y, \mathcal{T}')$ offene Menge. Dann ist $Y \setminus G$ abgeschlossen in $(Y, \mathcal{T}')$ und daher nach Voraussetzung auch $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$. Also ist $f^{-1}(G)$ offen in $(X, \mathcal{T})$.

“(d) $\implies$ (a)”: Ist schließlich (d) erfüllt und $x \in X$ beliebig sowie U eine beliebig vorgegebene Umgebung von $f(x)$ in $(Y, \mathcal{T}')$, so gibt es nach Definition der Umgebung eine offene Menge $G \in \mathcal{T}'$ mit $f(x) \in G \subseteq U$. Nach Voraussetzung ist daher $f^{-1}(G)$ offen in $(X, \mathcal{T})$ und erfüllt $x \in f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(U)$. Für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung U von $f(x)$ in $(Y, \mathcal{T}')$ ist daher $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in $(X, \mathcal{T})$, d.h. f ist in allen $x \in X$ stetig. $\square$

2.6. SATZ. Seien $(X_j, \mathcal{T}_j)$ ($j = 1, 2, 3$) topologische Räume und seien $f : X_1 \rightarrow X_2$ und $g : X_2 \rightarrow X_3$ Abbildungen. Sind f und g stetig (bzw. f stetig in x und g stetig in $f(x)$), so ist auch $g \circ f$ stetig (bzw. stetig in x).

Dies rechnet man leicht nach.

2.7. DEFINITION. Eine Menge X heißt *teilweise* oder auch *partiell geordnete Menge* (bei vielen Autoren auch *geordnete Menge*), falls sie mit einer *Ordnungsrelation* “ $\preceq$ ” versehen ist, das ist eine Relation mit den Eigenschaften:

- (i) $\forall x \in X : x \preceq x$.
- (ii) $\forall x, y \in X : (x \preceq y \text{ und } y \preceq x) \Rightarrow x = y$.
- (iii) $\forall x, y, z \in X : (x \preceq y \text{ und } y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$.

Zwei Elemente von X müssen hierbei nicht vergleichbar sein. Gilt jedoch für alle $a, b \in X$ die Beziehung $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, so heißt die Menge X *total geordnet*.

Eine teilweise geordnete Menge $(X, \preceq)$ heißt *nach oben* bzw. *nach unten gerichtet* falls es zu je zwei Elementen $a, b \in X$ eine *obere* bzw. *untere Schranke* $c \in X$ gibt, also ein Element $c \in X$ mit $a \preceq c$ und $b \preceq c$ bzw. mit $c \preceq a$ und $c \preceq b$.

- 2.8. BEISPIELE. (a) Alle Teilmengen X von $\mathbb{R}$ sind bzgl. " $\leq$ " total geordnet und nach oben und unten gerichtet.
- (b) Die Menge aller endlichen Teilmengen einer Menge I ist durch die Inklusion halbgeordnet und nach oben gerichtet.
- (c) Ist $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis eines Punktes x in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, so ist die durch die Inklusion auf $\mathfrak{B}(x)$ gegebene teilweise Ordnung nach unten gerichtet (vergl. (B2) in Bemerkung 1.18).

Ist $(\mathbb{A}, \preceq)$ eine nach unten gerichtete Menge, so ist durch

$$\alpha \sqsubseteq \beta :\Longleftrightarrow \beta \preceq \alpha \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{A})$$

eine Ordnung gegeben, die nach oben gerichtet ist. Wenn im folgenden von gerichteten Mengen die Rede ist, meinen wir stets nach oben gerichtete Mengen. Wegen der eben angegebenen Konstruktion ist dies keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

Eine Folge in einer Menge X ist bekanntlich eine Abbildung von der (nach oben) gerichteten Menge $\mathbb{N}$ (oder von $\{n \in \mathbb{Z}; n \geq m\}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$) nach X . Allgemeiner definieren wir:

2.9. DEFINITION. Unter einem *Netz* oder *einer verallgemeinerten Folge* oder *Moore-Smith-Folge* in einer Menge X verstehen wir eine Abbildung $x : \alpha \mapsto x_\alpha$ von einer gerichteten Menge $\mathbb{A}$ nach X . Wie bei Folgen schreiben wir sie in der Form $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ oder kurz $(x_\alpha)_\alpha$, falls der Indexbereich $\mathbb{A}$ aus dem Zusammenhang her klar ist.

Jede Folge insbesondere ein Netz.

Der Begriff der Konvergenz läßt sich nun leicht auf Netze übertragen:

2.10. DEFINITION. Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ über der gerichteten Indexmenge $(\mathbb{A}, \preceq)$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *konvergent* gegen einen Punkt $x_* \in X$ in $(X, \mathcal{T})$, falls es zu jeder Umgebung U von x_* ein $\alpha_U \in \mathbb{A}$, so daß für alle $\alpha \succeq \alpha_U$ gilt $x_\alpha \in U$. Wir schreiben dann $x_\alpha \rightarrow x_*$.

In einem metrischen Raum (X, d) ist bekanntlich ein Punkt $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt einer Teilmenge M von X , wenn es eine gegen x konvergente Folge aus $M \setminus \{x\}$ gibt. Die Aussage bleibt richtig in allgemeinen topologischen Räumen, wenn wir "Folgen" durch "Netze" ersetzen.

2.11. LEMMA. *Genau dann ist ein Punkt $a \in X$ ein Häufungspunkt einer Teilmenge M eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$, wenn es ein gegen a konvergentes Netz in $M \setminus \{a\}$ gibt.*

BEWEIS. Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein gegen a konvergentes Netz aus $X \setminus M$, indiziert durch eine gerichtete Indexmenge $(\mathbb{A}, \preceq)$ und ist U eine beliebige Umgebung von a in $(X, \mathcal{T})$, so gibt es nach Definition der Konvergenz ein $\alpha_U \in \mathbb{A}$, so daß für alle $\alpha \succeq \alpha_U$ gilt $x_\alpha \in U \cap (M \setminus \{a\})$. Insbesondere ist $U \cap (M \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von a , d.h.: a ist ein Häufungspunkt von M .

Sei nun a ein Häufungspunkt der Menge M . Die Menge $\mathfrak{U}(a)$ aller Umgebungen ist eine durch die Inklusion teilweise geordnet und nach unten gerichtete, also durch

$$U \preceq V :\Longleftrightarrow V \subseteq U \quad (U, V \in \mathfrak{U}(a))$$

noch oben gerichtete Menge. Da a ein Häufungspunkt ist, gibt es zu jeder Umgebung U von a ein $x_U \in M \setminus \{a\}$. Hierdurch ist ein Netz $(x_U)_{U \in \mathfrak{U}(a)}$ von Punkten aus $M \setminus \{a\}$ gegeben. Ist U eine beliebige Umgebung von a , so gilt für alle $V \in \mathfrak{U}(a)$ mit $V \succeq U$ (d.h. mit $V \subseteq U$) $x_V \in V \subseteq U$. Also konvergiert $(x_U)_{U \in \mathfrak{U}(a)}$ gegen a . $\square$

Wie wir schon im Fall konvergenter Folgen gesehen haben, kann es mehrere Punkte geben, gegen die ein Netz konvergiert. In topologischen Hausdorffräumen ist dies jedoch nicht möglich:

2.12. SATZ. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $(X, \mathcal{T})$ ist ein Hausdorffraum.
- (b) Jedes konvergente Netz in $(X, \mathcal{T})$ hat einen eindeutig bestimmten Grenzwert.

BEWEIS. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Hausdorffraum und sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein gegen einen Punkt $a \in X$ und gegen einen Punkt $b \in X$ konvergentes Netz aus X .

Annahme: $a \neq b$. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Umgebung U_a von a und eine Umgebung U_b von b mit $U_a \cap U_b = \emptyset$. Wegen $x_\alpha \rightarrow a$ und $x_\alpha \rightarrow b$ gibt es $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{A}$ mit $x_\alpha \in U_a$ für alle $\alpha \succeq \alpha_a$ und $x_\beta \in U_b$ für alle $\beta \succeq \alpha_b$. Da $(\mathbb{A}, \preceq)$ gerichtet ist, gibt es ein $\gamma \in \mathbb{A}$ mit $\alpha_a \preceq \gamma$ und $\alpha_b \preceq \gamma$. Hieraus erhält man den Widerspruch $x_\gamma \in U_a \cap U_b = \emptyset$. Also war die Annahme falsch. Das Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ kann also nur gegen höchstens einen Punkt konvergieren.

Ist $(X, \mathcal{T})$ kein Hausdorffraum, so gibt es zwei Punkte $a, b \in X$ mit $a \neq b$, so daß für alle Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(a)$ von a und $V \in \mathfrak{U}(b)$ von b wenigstens ein Punkt $x_{(U,V)} \in U \cap V$ existiert. $\mathfrak{U}(a) \times \mathfrak{U}(b)$ wird zu einer gerichteten Indexmenge durch

$$(U_1, V_1) \preceq (U_2, V_2) : \Longleftrightarrow U_2 \subseteq U_1 \text{ und } V_2 \subseteq V_1, \quad (U_1, V_1), (U_2, V_3) \in \mathfrak{U}(a) \times \mathfrak{U}(b).$$

Sind nun $U_a \in \mathfrak{U}(a)$ und $V_b \in \mathfrak{U}(b)$ beliebig vorgegeben, so gilt für alle $(U, V) \in \mathfrak{U}(a) \times \mathfrak{U}(b)$ mit $(U_a, V_b) \preceq (U, V)$: $x_{(U,V)} \in U \cap V \subseteq U_a \cap V_b$. Also folgt $x_{(U,V)} \rightarrow a$ und $x_{(U,V)} \rightarrow b$. $\square$

Das Analogon zum Folgenkriterium (Äquivalenz von (a) und (d) in Lemma 2.1) lautet nun:

2.13. SATZ. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und einen Punkt $a \in X$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist in a stetig.
- (b) Für **jedes** gegen a in $(X, \mathcal{T}_X)$ konvergente Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ gilt $f(x_\alpha) \rightarrow f(a)$.

BEWEIS. Sei f in a stetig und sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein beliebiges in $(X, \mathcal{T})$ gegen a konvergentes Netz in X . Ist U eine beliebige Umgebung von $f(a)$ in $(Y, \mathcal{T}')$, so ist $f^{-1}(U)$ wegen der Stetigkeit von f in a eine Umgebung von a in $(X, \mathcal{T})$. Wegen $x_\alpha \rightarrow a$ gibt es also ein $\alpha_0 \in \mathbb{A}$, so daß für alle $\alpha \succeq \alpha_0$ aus $\mathbb{A}$ gilt $x_\alpha \in f^{-1}(U)$ also auch $f(a) \in U$. Also gilt $f(x_\alpha) \rightarrow f(a)$ in $(Y, \mathcal{T}')$.

Sei nun (b) erfüllt. Wir machen die Annahme, daß f in a unstetig ist. Dann gibt es eine Umgebung U von $f(a)$ in $(Y, \mathcal{T}')$, für die $W := f^{-1}(U)$ keine Umgebung von a ist. Die Menge $\mathfrak{U}(a)$ aller Umgebungen von a in $(X, \mathcal{T})$ ist gerichtet vermöge der Ordnungsrelation

$$V_1 \preceq V_2 \quad : \Longleftrightarrow \quad V_2 \subseteq V_1 \quad (V_1, V_2 \in \mathfrak{U}(a)).$$

Da W keine Umgebung von a ist, gibt es zu jedem $V \in \mathfrak{U}(a)$ ein $x_V \in X \setminus W$. Das Netz $(x_V)_{V \in \mathfrak{U}(a)}$ ist dann ein in $(X, \mathcal{T})$ gegen a konvergentes Netz, denn: Ist $V_0 \in \mathfrak{U}(a)$ beliebig, so gilt für alle $V \succeq V_0$ (d.h. $V \subseteq V_0$) aus $\mathfrak{U}(a)$: $x_V \in V \subseteq V_0$. Nach Voraussetzung gilt $f(x_\alpha) \rightarrow f(a)$ in $(Y, \mathcal{T}')$ im Widerspruch zu $f(x_\alpha) \notin U$ für alle $\alpha \in \mathfrak{U}(a)$. Die Annahme war also falsch und es folgt die Stetigkeit von f in a . $\square$

2.14. DEFINITION. Zwei topologische Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ heißen zueinander *homöomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ gibt, so daß f und f^{-1} stetig sind. Eine solche Abbildung f heißt dann eine *Homöomorphie*.

Zwei zueinander homöomorphe topologische Räume sind im Rahmen der Topologie nicht unterscheidbar, werden also als topologisch nicht wesentlich verschieden angesehen.

- 2.15. BEMERKUNG. (a) Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist $\text{id}_X : X \rightarrow X$ eine Homöomorphie.
 (b) $f : X_1 \rightarrow X_2$ ist genau dann eine Homöomorphie von $(X_1, \mathcal{T}_1)$ auf $(X_2, \mathcal{T}_2)$ wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
 i) $G \subset X_1$ offen $\Rightarrow f(G)$ offen.
 ii) $G \subset X_2$ offen $\Rightarrow f^{-1}(G)$ offen.
 iii) f bijektiv.

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt T_1 -Raum, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ Umgebungen U_j von x_j gibt ($j = 1, 2$) mit $x_2 \notin U_1$ und $x_1 \notin U_2$.

2.1. AUFGABE. Sei X eine überabzählbare Menge und sei $\mathcal{T}_0$ die durch

$$\mathcal{T}_0 := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X ; X \setminus G \text{ ist höchstens abzählbar unendlich}\}$$

gegebene Topologie auf X . Zeigen Sie:

- (a) $(X, \mathcal{T}_0)$ ist ein T_1 -Raum aber kein T_2 -Raum.
- (b) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist genau dann konvergent in $(X, \mathcal{T}_0)$ gegen ein $x_0 \in X$, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $x_n = x_0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
- (c) Jede Folge aus X kann in $(X, \mathcal{T}_0)$ gegen höchstens ein $x_0 \in X$ konvergieren.

2.2. AUFGABE. Sei nun speziell $X = \mathbb{R}$ in Aufgabe 2.1. Zeigen Sie:

- (a) Jede Abbildung von $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$ ist folgenstetig. Hierbei bezeichne $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$.
- (b) Die Abbildungen

$$\text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \quad \text{und} \quad \text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$$

sind in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig.

2.3. AUFGABE. Sei weiterhin $X = \mathbb{R}$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_0$ aus Aufgabe 2.1 und sei $M := \{2006\} \cup (2007, 2008)$.

- (a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von M .
- (b) Zeigen Sie, daß es keine bzgl. $\mathcal{T}_0$ gegen 2007 konvergente Folge aus M gibt.

2.4. AUFGABE. Seien $(X; \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ zwei topologische Räume. $\mathcal{B}_Y$ sei eine Basis und $\mathcal{S}_Y$ sei eine Subbasis für $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Zeigen Sie: Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig.
- (b) $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ für alle $B \in \mathcal{B}_Y$.
- (c) $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ für alle $S \in \mathcal{S}_Y$.

Erinnerung: Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Jede konvergente Folge ist insbesondere eine Cauchy-Folge. (X, d) heißt *vollständig*, falls in (X, d) jede Cauchy-Folge konvergent ist.

In Analogie zu Cauchy-Folgen können wir *Cauchy-Netze* definieren: Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy-Netz, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_0 \in \mathbb{A} \quad \forall \alpha, \beta \succeq \alpha_0 : \quad d(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon.$$

2.5. AUFGABE. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

- (a) Jedes konvergente Netz in (X, d) ist ein Cauchy-Netz.
- (b) (X, d) ist vollständig genau dann, wenn jedes Cauchy-Netz in (X, d) konvergent ist.

2.6. AUFGABE. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, d.h. in dem jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Zeigen Sie:

- (a) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von $(X, \mathcal{T})$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}')$ ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.
- (b) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Häufungspunkt einer Menge $M \subseteq X$, wenn es eine gegen x in $(X, \mathcal{T})$ konvergente Folge gibt.

2.7. AUFGABE. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (versehen mit der euklidischen Topologie). Zeigen Sie: Die Menge $C((X, \mathcal{T}), \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{K}$ ist bezüglich der punktweisen Operationen der Addition, der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren eine Unteralgebra der Algebra aller auf X definierten $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen.

2.8. AUFGABE. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige reellwertige Funktionen ($\mathbb{R}$ sei versehen mit der euklidischen Topologie). Zeigen Sie die Stetigkeit der durch

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \quad (x \in X)$$

definierten Funktionen $f \vee g, f \wedge g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

2.9. AUFGABE. Sei M eine nicht leere Menge und sei (X, d) ein metrischer Raum. Mit $F(M, X)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $f : M \rightarrow X$ von M nach X . Sei $\mathfrak{S}$ eine Familie von Teilmengen von M , mit je zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{S}$ auch $A \cup B$ enthält. Für alle $f \in F(M, X)$, $A \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$U_{A, \varepsilon}(f) := \{g \in F(M, X) ; \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)| < \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $\mathfrak{B} := \{U_{A, \varepsilon}(f) ; f \in F(M, X), A \in \mathfrak{S}, \varepsilon > 0\}$ erfüllt die Bedingungen (B1) – (B3) aus Bemerkung 1.18. Nach dieser Bemerkung ist also $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis von offenen Teilmengen einer eindeutig bestimmten Topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$. Man nennt $\tau_{\mathfrak{S}}$ die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus $\mathfrak{S}$* .
- (b) $\tau_{\mathfrak{S}}$ ist genau dann separiert, wenn $\bigcup_{A \in \mathfrak{B}} A = M$.

Im Fall $\mathfrak{S} = \{M\}$ spricht man von der *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf M* . Ist $\mathfrak{F}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M , so heißt $\tau_{\mathfrak{F}}$ die *Topologie der punktweisen Konvergenz*.

2.10. AUFGABE. Zeigen Sie, daß mit den Bezeichnungen und Definitionen aus Aufgabe 2.9 gilt:

- (a) Ein Netz $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in $F(M, X)$ ist genau dann konvergent bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz gegen eine Abbildung $f \in F(M, X)$, wenn sie gleichmäßig auf M gegen f konvergiert d.h., wenn

$$\sup_{x \in M} d(f(x), f_\alpha(x)) \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

- (b) Ist M mit einer Topologie τ versehen und ist $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein Netz von stetigen Funktionen aus $F(M, X)$ welches gleichmäßig auf M gegen eine Abbildung $f : M \rightarrow X$ konvergiert, so ist auch f stetig.

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von A in (X, τ) , falls U für alle $a \in A$ eine Umgebung von a in (X, τ) ist.

KAPITEL 3

Vergleich und Erzeugung von Topologien und topologischen Räumen

3.1. DEFINITION. Auf einer Menge X seien zwei Topologien τ und σ gegeben. Ist jede bezüglich σ offene Menge auch bezüglich τ offen, so heißt σ *größer* (*schwächer*, im Englischen *weaker*) als τ und τ *feiner* (*stärker*, *stronger*) als σ . Soll die Gleichheit von σ und τ hierbei ausdrücklich ausgeschlossen sein, so heißt σ *echt größer* als τ und τ *echt feiner* als σ .

Mit Definition 2.2 und Satz 2.5 erhält man unmittelbar:

3.2. SATZ. Auf der Menge X seien zwei Topologien σ, τ gegeben. Äquivalent sind:

- (a) τ ist feiner als σ bzw. σ ist größer als τ .
- (b) $\text{id}_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ ist stetig.
- (c) Für alle $x \in X$ gilt: Jede Umgebung von x bezüglich σ ist auch Umgebung von x bezüglich τ .
- (d) Jede bezüglich σ abgeschlossene Menge ist auch bezüglich τ abgeschlossen.
- (e) Für jede Menge $A \subseteq X$ ist $\overline{A}^\tau \subseteq \overline{A}^\sigma$.
- (f) $\sigma \subseteq \tau$.

Hierbei bedeute $\overline{A}^\tau$ (bzw. $\overline{A}^\sigma$) die Abschließung von A bezüglich τ (bzw. σ).

- 3.3. BEMERKUNGEN. (a) Die Relation “feiner” definiert eine teilweise Ordnung auf der Menge aller Topologien auf X .
- (b) Die indiskrete Topologie ist die größte und die diskrete Topologie die feinste von allen auf einer Menge X möglichen Topologien.
- (c) Es kann vorkommen, daß es auf einer Menge X zwei nicht vergleichbare Topologien gibt. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt.

3.4. BEISPIEL. Sei $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{T} := \{X, \emptyset, \{1\}\}$ und $\mathcal{T}' := \{X, \emptyset, \{0\}\}$ sind Topologien auf X . $\{0\}$ ist offen bezüglich $\mathcal{T}'$ aber nicht bezüglich $\mathcal{T}$. $\{1\}$ ist offen bezüglich $\mathcal{T}$ aber nicht bezüglich $\mathcal{T}'$. Also sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ nicht vergleichbar.

Wenn man eine Ordnungsrelation vorliegen hat, fragt man natürlich nach der Existenz von oberen und unteren Grenzen.

3.5. SATZ. Sei $(\tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine nicht leere Familie von Topologien auf einer Menge X . Unter den Topologien auf X , die größer sind als alle τ_λ , $\lambda \in \Lambda$, gibt es genau eine feinste Topologie τ_u . Diese heißt der Durchschnitt oder die untere Grenze der Topologien τ_λ .

BEWEIS. Man rechnet nach, daß $\tau_u := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ die Bedingungen (O1) - (O3) erfüllt, also eine Topologie auf X definiert. Wegen $\tau_u \subseteq \tau_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ ist τ_u größer als alle τ_λ , $\lambda \in \Lambda$. Ist nun τ eine weitere Topologie auf X , die größer als alle τ_λ , $\lambda \in \Lambda$, ist, so folgt $\tau \subseteq \tau_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und damit $\tau \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda = \tau_u$. Also ist τ_u feiner als τ . $\square$

Die Frage nach der oberen Grenze einer Familie $(\tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Topologien auf X ist gleichbedeutend mit der Frage, ob es eine grösste Topologie auf X gibt, für die alle Mengen aus $\mathcal{S} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ offen sind. Diese Frage beantworten wir in

3.6. SATZ. *Sei $(\tau_i)_{i \in I}$ eine nicht leere Familie von Topologien auf einer Menge X . Unter den Topologien auf X , die feiner als alle $\tau_i, i \in I$ sind, gibt es eine eindeutig bestimmte grösste Topologie τ_o . Diese nennt man die obere Grenze der Topologien $\tau_i, i \in I$. Sie wird erzeugt durch $\mathcal{S} := \bigcup_{i \in I} \tau_i$.*

BEWEIS. Sei τ_0 die gemäß Definition 1.31 durch $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie. Die Elemente von τ_0 sind nach Definition 1.31 und Lemma 1.28 alle Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$. Da jede Topologie auf X , für die alle Elemente von $\mathcal{S}$ offen sind auch alle Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$ enthalten muß, ist τ_0 die grösste Topologie auf X mit dieser Eigenschaft. $\square$

3.7. SATZ. *Sei X eine Menge und seien topologische Räume (X_i, τ_i) ($i \in I$) und Abbildungen $f_i : X \rightarrow X_i$ für alle $i \in I$ gegeben.*

- (a) *Die durch $\mathcal{S} := \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(G) | G \in \tau_i\}$ gemäß Definition 1.31 erzeugte Topologie τ auf X ist die grösste Topologie auf X , so daß alle f_i ($i \in I$) stetig sind.*
- (b) *Für jeden topologischen Raum (Y, τ_Y) und jede Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gilt: g ist stetig (bezüglich τ) $\iff f_i \circ g$ ist stetig für alle $i \in I$.*
- (c) *Ist σ eine weitere Topologie auf X , für die die Aussage in (b) gilt, so stimmt σ schon mit τ überein. τ heißt die Initialtopologie auf X bzgl. $((X_i, \tau_i, f_i))_{i \in I}$.*
- (d) *Ist $a \in X$, so ist ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in (X, τ) genau dann konvergent gegen a , wenn für alle $i \in I$ das Netz $(f_i(x_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in (X_i, τ_i) gegen $f_i(a)$ konvergiert.*

BEWEIS. (a) Offensichtlich ist τ eine Topologie auf X , für die alle f_i ($i \in I$) stetig sind. Ist τ' eine weitere Topologie auf X mit dieser Eigenschaft, so folgt insbesondere $\mathcal{S} \subseteq \tau'$ und daher auch (wegen (O1) - (O3)) $\tau \subseteq \tau'$, d. h. τ ist gröber als τ' .

(b) " $\Rightarrow$ " Ist g stetig, so auch $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ nach Satz 2.6 und (a).

" $\Leftarrow$ " Sei $S \in \mathcal{S}$ beliebig. Dann gilt $S = f_i^{-1}(G_i)$ für ein $i \in I$ und ein $G_i \in \tau_i$. Also ist $g^{-1}(S) = g^{-1}(f_i^{-1}(G_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(G_i)$ offen bezüglich τ_Y , da nach Vor. $f_i \circ g$ stetig ist. Wegen Satz 2.6 folgt die Stetigkeit von g .

(c) Sei σ eine Topologie auf X , die ebenfalls die Eigenschaft aus (b) besitzt. Da $\text{id} : (X, \sigma) \rightarrow (X, \sigma)$ stetig ist, folgt die Stetigkeit von $f_i = f_i \circ \text{id} : (X, \sigma) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ für alle $i \in I$. Wähle in (b) speziell $Y = X$, $\tau_Y = \sigma$ und betrachte $g_1 : (X, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ mit $g_1(x) = x$ für alle $x \in X$. Dann ist $f_i \circ g_1 = f_i : (X, \sigma) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ stetig für alle $i \in I$ und wegen (b) folgt die Stetigkeit von $\text{id}_X : (X, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$.

Da auch τ die Eigenschaft in (b) hat, folgt analog die Stetigkeit von $\text{id}_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ und damit $\tau = \sigma$.

(d) Die Hinrichtung folgt wegen der Stetigkeit der Abbildungen $f_i : (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ unmittelbar aus Satz 2.13.

Sei umgekehrt $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein Netz, so daß für alle $i \in I$ gilt $f_i(x_\alpha) \rightarrow f_i(a)$ in (X_i, τ_i) , und sei U eine beliebige Umgebung von a in (X, τ) . Da $\mathcal{S}$ eine Subbasis von τ ist, bilden nach Definition 1.31 die endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ eine Basis für τ . Es gibt also endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ und bezüglich τ_{i_k} offene Mengen G_k in X_{i_k} , $k = 1, \dots, n$, mit

$$a \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(G_k) \subseteq V \subseteq U.$$

Wegen $f_{i_k}(x_\alpha) \rightarrow f_{i_k}(a)$ gibt es also $\alpha_k \in \mathbb{A}$ so daß für alle $\alpha \geq \alpha_k$ gilt: $f_{i_k}(x_\alpha) \in G_k$ ($k = 1, \dots, n$). Da $\mathbb{A}$ gerichtet ist gibt es eine obere Schranke zu $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, d.h. ein α_0

mit $\alpha_k \leq \alpha_0$ für $k = 1, \dots, n$. Für alle $\alpha \geq \alpha_0$ und $k = 1, \dots, n$ folgt $f_{i_k}(x_\alpha) \in G_k$. Also gilt für alle $\alpha \geq \alpha_0$:

$$x_\alpha \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(G_k) \subseteq U.$$

Dies zeigt $x_\alpha \rightarrow a$ in (X, τ) . □

Dieser Satz gibt uns die Möglichkeit, mit Hilfe gegebener topologischer Räume, neue topologische Räume einzuführen.

3.8. BEISPIEL. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. $\iota : Y \rightarrow X$ sei die natürliche Inklusionsabbildung ($\iota(y) = y$ für alle $y \in Y$). Die durch (X, τ, ι) gegebene Initialtopologie τ_Y stimmt mit der in Definition 1.29 eingeführten *Unterraumtopologie* überein, denn

$$\tau_Y = \{\iota^{-1}(G) ; G \in \tau\} = \{G \cap Y ; G \in \tau\}.$$

3.9. TOPOLOGISCHE PRODUKTE. Sei $\emptyset \neq I$ eine Indexmenge und sei für jedes $i \in I$ ein topologischer Raum (X_i, τ_i) gegeben. Sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt der Mengen X_i . Wir versehen X mit der Initialtopologie τ bezüglich $((X_i, \tau_i, p_i))_{i \in I}$, wobei $p_j : X \rightarrow X_j$ die kanonischen Projektionen sind (mit $p_j((x_i)_{i \in I}) := x_j$ für $(x_i)_{i \in I} \in X$) ($j \in I$). Gemäß 2.7(a) ist eine Subbasis $\mathcal{S}$ für τ gegeben durch

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{p_i^{-1}(G_i) | G_i \in \tau_i\} = \bigcup_{i \in I} \left\{ \prod_{j \in I} U_{ij} ; U_{ij} = \begin{cases} X_j & j \neq i \\ G_i & j = i \end{cases}, G_i \in \tau_i \right\}.$$

τ heißt die *Produkttopologie* auf X und (X, τ) heißt das *topologische Produkt der Räume* (X_i, τ_i) ($i \in I$).

Für die Funktionalanalysis besonders wichtige Initialtopologien sind die durch ein Dualsystem gegebenen schwachen Topologien.

3.10. DEFINITION. Seien E, F zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

- (a) Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *Bilinearform*, falls für alle $x \in E$ und alle $y \in F$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} f_x : F &\rightarrow \mathbb{K} & \text{mit} & & f_x(v) &:= \langle x, v \rangle & \text{für} & & v \in F & \text{und} \\ g_y : E &\rightarrow \mathbb{K} & \text{mit} & & g_y(u) &:= \langle u, y \rangle & \text{für} & & u \in E \end{aligned}$$

linear sind.

- (b) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform auf $E \times F$. Das Tripel $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt *Dualsystem* und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine *Dualität zwischen E und F* , falls gilt:

$$(S1) \quad \forall 0 \neq x \in E \quad \exists y \in F : \langle x, y \rangle \neq 0.$$

$$(S2) \quad \forall 0 \neq y \in F \quad \exists x \in E : \langle x, y \rangle \neq 0.$$

Statt $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ schreiben wir auch kürzer $\langle E, F \rangle$.

3.11. BEISPIELE. (a) Sei E ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $E^\#$ der Raum aller $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$. Dann ist $\langle E, E^\# \rangle$ mit $\langle x, f \rangle := f(x)$ für $x \in E$, $f \in E^\#$ ein Dualsystem.

- (b) Sei $E := C([0, 1], \mathbb{K})$ und E' der Raum aller bezüglich der sup-Norm auf E stetigen $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$. (E' ist ein Untervektorraum von $E^\#$). Dann ist $\langle E, E' \rangle$ mit $\langle x, f \rangle := f(x)$ für $x \in C([0, 1], \mathbb{K})$ und $f \in E'$ ein Dualsystem.

- (c) Sei wieder $E := C([0, 1], \mathbb{K})$. Dann ist $\langle E, E \rangle$ mit $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ für $f, g \in C([0, 1], \mathbb{K})$ ein Dualsystem.

Der Beweis von (a) ist klar, ebenso die Bilinearität in (b) und (c). Der Nachweis, daß in (b) und (c) die Bedingungen (S1) und (S2) erfüllt sind, wird in den Übungen erbracht.

Wir werden in der Funktionalanalysis sehen, daß für jeden normierten $\mathbb{K}$ -Vektorraum E gilt: Bezeichnet E' den Raum der stetigen $\mathbb{K}$ -Linearformen (d.h. der stetigen $\mathbb{K}$ -linearen Abbildung von E nach $\mathbb{K}$), so ist durch $\langle E, E' \rangle$ mit $\langle x, x' \rangle := x'(x)$ für $x \in E$, $x' \in E'$ ein Dualsystem gegeben. Der Nachweis, daß in diesem Fall stets (S1) erfüllt ist, ist jedoch nicht trivial.

3.12. DEFINITION. Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem. Die *schwache Topologie* $\sigma(E, F)$ (bzw. $\sigma(F, E)$) ist die grösste Topologie auf E (bzw. auf F), für die alle Linearformen $g_y = \langle \cdot, y \rangle$, $y \in F$, (bzw. $f_x = \langle x, \cdot \rangle$, $x \in E$) stetig sind. D.h. also: $\sigma(E, F)$ ist die Initialtopologie auf E bezüglich $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|}, g_y)$ ($y \in F$) und $\sigma(F, E)$ ist die Initialtopologie auf F bezüglich $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|}, f_x)$ ($x \in E$), wobei $\tau_{|\cdot|}$ die durch den Absolutbetrag auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gegebene Topologie sei.

Dual zum Begriff der Initialtopologie ist der Begriff der Finaltopologie:

3.13. SATZ. Sei X eine Menge und seien topologische Räume (X_i, τ_i) ($i \in I$) und Abbildungen $f_i : X_i \rightarrow X$ für alle $i \in I$ gegeben.

- (a) Die durch $\tau := \bigcap_{i \in I} \{G \subseteq X ; f_i^{-1}(G) \in \tau_i\}$ gegebene Topologie τ auf X ist die feinste Topologie auf X , so daß alle f_i ($i \in I$) stetig sind.
- (b) Für jeden topologischen Raum (Y, τ_Y) und jede Abbildung $g : X \rightarrow Y$ gilt: g ist stetig (bezüglich τ) $\iff g \circ f_i$ ist stetig für alle $i \in I$.
- (c) Ist σ eine weitere Topologie auf X , für die die Aussage in (b) gilt, so stimmt σ schon mit τ überein. τ heißt die Finaltopologie auf X bzgl. (X_i, τ_i, f_i) ($i \in I$).

BEWEIS. (a) Man rechnet unmittelbar nach, daß für alle $i \in I$ durch $\sigma_i := \{G \subseteq X ; f_i^{-1}(G) \in \tau_i\}$ eine Topologie σ_i auf X gegeben ist. Nach Satz 3.5 ist τ dann die feinste von allen Topologien auf X die gröber als alle σ_i , $i \in I$ sind. Ist nun σ eine beliebige Topologie auf X , für die alle f_i , $i \in I$, stetig sind und ist $G \in \sigma$ beliebig, so gilt für alle $i \in I$: $f_i^{-1}(G) \in \tau_i$, d.h. $G \in \sigma_i$ für alle $i \in I$ und somit $G \in \tau$. Aus der Definition von τ folgt unmittelbar, daß alle f_i als Abbildungen von (X_i, τ_i) nach (X, τ) stetig sind. τ ist also die feinste Topologie auf X für die alle f_i , $i \in I$, stetig sind.

(b) Ist $g : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von (X, τ) nach (Y, τ_Y) und ist $\Omega \subseteq Y$ offen in (Y, τ_Y) , so ist $g \circ f_i$ als Komposition von stetigen Abbildungen stetig für alle $i \in I$. Ist umgekehrt $g \circ f_i$ stetig für alle $i \in I$ und ist $\Omega \in \tau_Y$ beliebig, so ist nach Satz 2.5 $f_i^{-1}(g^{-1}(\Omega)) = (g \circ f_i)^{-1}(\Omega) \in \tau_i$ für alle $i \in I$ und daher (nach Definition von τ in (a)) $g^{-1}(\Omega) \in \tau$.

(c) Ist τ_* eine Topologie auf X , die ebenfalls die Bedingung in (b) erfüllt, so folgt wegen der Stetigkeit von $\text{id} : (X, \tau_*) \rightarrow (X, \tau_*)$ die Stetigkeit von $f_i = \text{id} \circ f_i$ für alle $i \in I$. Nach (a) ist τ_* gröber als τ . Mit $g := \text{id} : (X, \tau_*) \rightarrow (X, \tau)$ folgt wegen der Stetigkeit von $f_i = g \circ f_i$ für alle $i \in I$ auch die Stetigkeit von $\text{id} : (X, \tau_*) \rightarrow (X, \tau)$, d.h. τ_* ist auch feiner als τ , muß also mit τ übereinstimmen. $\square$

3.14. BEISPIEL. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X . Die in Aufgabe 1.4 konstruierte *Quotiententopologie* $\mathcal{T}_\sim$ auf $X/\sim$ ist gerade die Finaltopologie zu (X, τ, π) , wobei

$$\pi : X \rightarrow X/\sim, \quad x \mapsto \pi(x) := [x] := \{y \in X ; y \sim x\}$$

die kanonische Surjektion ist, die jedem Element $x \in X$ seine Äquivalenzklasse zuordnet. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{T}_\sim$ in Aufgabe 1.4 und aus Teil (a) von Satz 3.13.

3.15. DEFINITION. Sei (X_i, τ_i) ($i \in I$) eine Familie von topologischen Räumen und seien

$$\iota_k : X_k \hookrightarrow X := \bigcup_{i \in I} X_i, \quad x \mapsto x,$$

die kanonischen Inklusionsabbildungen ($k \in I$). Versehen mit finalen Topologie τ zu (X_i, τ_i, ι_i) , $i \in I$, wird X zu einem topologischen Raum. Man nennt (X, τ) die *topologische Summe* der Räume (X_i, τ_i) , $i \in I$.

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.

3.1. AUFGABE. Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie und sei

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z}; x \in \mathbb{R}\}$$

versehen mit der Quotiententopologie $\mathcal{T}_\sim$ bezüglich der durch

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

gegebenen Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{T}_\sim)$ homöomorph ist zu der mit der Unterraumtopologie von $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$ versehenen Einheitskreislinie $\mathbb{T}$ in $\mathbb{C}$.

3.2. AUFGABE. Seien $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ zwei topologische Räume und sei $X := X_1 \times X_2$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie für alle $A \subseteq X_1, B \subseteq X_2$:

- (a) $\text{int}(A \times B) = \text{int}(A) \times \text{int}(B)$.
- (b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
- (c) $\partial(A \times B) = (\partial(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial(B))$.

3.3. AUFGABE. Sei (X, τ) das topologische Produkt einer Familie (X_i, τ_i) ($i \in I$) von topologischen Räumen. Zeigen Sie:

- (a) (X, τ) ist genau dann separiert, wenn alle (X_i, τ_i) , $i \in I$, separiert sind.
- (b) Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in X ist genau dann konvergent in (X, τ) , wenn für alle $i \in I$ das Netz der i -ten Komponenten $(x_{\alpha, i})_{\alpha \in \mathbb{A}}$ in (X_i, τ_i) konvergent ist.

3.4. AUFGABE. Sei $E := C([0, 1], \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und E' der Raum aller bezüglich der sup-Norm auf E stetigen $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$.

- (a) $\langle E, E' \rangle$ mit $\langle x, f \rangle := f(x)$ für $x \in C([0, 1], \mathbb{K})$ und $f \in E'$ ist ein Dualsystem.
- (b) $\langle E, E \rangle$ mit $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ für $f, g \in C([0, 1], \mathbb{K})$ ist ein Dualsystem.

3.5. AUFGABE. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen. Zeigen Sie, daß die Diagonale $D := \{(x, x); x \in X\}$ genau dann in $X \times X$ abgeschlossen ist, wenn τ eine separierte Topologie ist.

Kompaktheit in topologischen Räumen

4.1. DEFINITION. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

- (a) Eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ (I eine beliebige Indexmenge) von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* von A , falls $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Eine solche Überdeckung $(G_i)_{i \in I}$ von A heißt
- *endlich*, falls $|I| < \infty$ und
 - *offen*, falls alle G_i offen in (X, τ) sind ($i \in I$).
- Ist $(G_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X und ist $J \subseteq I$, so daß noch $A \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$ gilt, so heißt $(G_j)_{j \in J}$ eine *Teilüberdeckung* von $(G_i)_{i \in I}$.
- (b) A heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- (c) (X, τ) heißt *kompakt*, falls X kompakt (bzgl. τ) ist.

4.2. BEMERKUNG. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (a) Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.
- (b) $A \subseteq X$ ist kompakt genau dann, wenn A mit der von τ induzierten Topologie τ_A ein kompakter topologischer Raum ist.
- (c) Ist A eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge $K \subseteq X$, so ist auch A kompakt.
- (d) Ist $A \subseteq B \subseteq X$ und $\overline{B}$ kompakt, so ist auch $\overline{A}$ kompakt.

BEWEIS. (a) sieht man durch Nachrechnen.

(b) Man beachte $G \subseteq A$ ist genau dann offen bzgl. τ_A , wenn es eine offene Menge G' in X gibt mit $G = G' \cap A$. Hiermit folgt leicht die Behauptung.

(c) Ist $(G_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von A , so gilt mit $G^* := X \setminus A$:

$$K \subseteq A \cup (X \setminus A) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \cup G^*.$$

Da alle G_i und auch G^* offen sind, gibt es eine endliche Teilmenge J von I , so daß $K \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j \cup G^*$. Es folgt

$$A = K \cap A = \bigcup_{j \in J} (G_j \cap A) \cup \underbrace{(G^* \cap A)}_{=\emptyset} \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$$

und damit die Kompaktheit von A .

(d) ist klar nach (c) und (a). □

4.3. SATZ. Ist K eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums (X, τ) und ist $x \in X \setminus K$, so gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$, $K \subseteq V$.

BEWEIS. Da (X, τ) separiert ist, gibt es zu jedem $t \in K$ offene Umgebungen U_t von x und V_t von t mit $U_t \cap V_t = \emptyset$. Aus der offenen Überdeckung $(V_t)_{t \in K}$ von K können wir eine endliche Teilüberdeckung $(V_{t_j})_{j=1}^k$ auswählen. Mit $V := \bigcup_{j=1}^k V_{t_j}$ und $U := \bigcap_{j=1}^k U_{t_j}$

gilt nun: V ist offene Obermenge von K , U ist offene Umgebung von x und

$$U \cap V = \bigcap_{j=1}^k U_{t_j} \cap \bigcup_{l=1}^k V_{t_l} = \bigcup_{l=1}^k \left(\left(\bigcap_{j=1}^k U_{t_j} \right) \cap V_{t_l} \right) \subseteq \bigcup_{l=1}^k (U_{t_l} \cap V_{t_l}) = \emptyset.$$

□

4.4. FOLGERUNG. Sei (X, τ) ein Hausdorffraum.

- (a) Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist K abgeschlossen in (X, τ) .
- (b) Ist $K \subseteq X$ kompakt und $F \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $F \cap K$ kompakt.

BEWEIS. (a) Nach Satz 4.3 ist jedes $x \in X \setminus K$ innerer Punkt von $X \setminus K$. Also ist $X \setminus K$ offen und damit K abgeschlossen.

(b) Nach (a) ist K und daher auch $K \cap F$ abgeschlossen. Mit 3.2.(c) folgt die Kompaktheit von $K \cap F$. □

4.5. SATZ. Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann kompakt, wenn er die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, d.h. wenn gilt: Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen in (X, τ) mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so gibt es schon endlich viele $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} = \emptyset$.

Der Beweis wird geführt, indem man jeweils zu den Komplementen übergeht: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , so ist $\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = \emptyset$ und $A_i := X \setminus U_i$ abgeschlossen. Ist umgekehrt $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so ist $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i := X \setminus A_i$ eine offene Überdeckung von X . □

4.6. FOLGERUNG. Sei (X, τ) ein Hausdorffraum und $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie von kompakten Teilmengen mit $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Dann gibt es endlich viele $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $\bigcap_{j=1}^k K_{i_j} = \emptyset$.

BEWEIS. Sei $i_1 \in I$ beliebig. K_{i_1} versehen mit der von τ induzierten Topologie ist kompakt. Nach Folgerung 4.4 ist $A_i := K_{i_1} \cap K_i$ abgeschlossen für alle $i \in I$ und $\bigcap_{i \in I} A_i = K_{i_1} \cap \bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Mit Satz 4.5 folgt die Behauptung. □

4.7. SATZ. (X, τ_X) und (Y, τ_Y) seien topologische Räume. Ist $K \subseteq X$ kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist auch $f(K)$ kompakt.

BEWEIS. Ist $(G_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$ in (Y, τ_Y) , so ist $(f^{-1}(G_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K , hat also eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(G_{i_j}))_{j=1}^k$. Es folgt

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{j=1}^k f^{-1}(G_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^k \underbrace{f(f^{-1}(G_{i_j}))}_{\subseteq G_{i_j}} \subseteq \bigcup_{i=1}^k G_{i_j}$$

und damit die Kompaktheit von $f(K)$. □

4.8. FOLGERUNG. Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an.

4.9. SATZ. (X, τ_X) und (Y, τ_Y) seien Hausdorffräume und X sei kompakt. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive und stetige Abbildung, so ist f schon eine Homöomorphie.

BEWEIS. Es ist nur die Stetigkeit von $f^{-1} : Y \rightarrow X$ zu zeigen. Sei A eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von X . Nach Bemerkung 4.2 (c) ist A kompakt und daher auch $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ kompakt (nach Satz 4.5) und somit nach Folgerung 4.4 auch abgeschlossen in (Y, τ_Y) . Nach Satz 2.5 ist f^{-1} stetig. $\square$

Ist speziell $X = Y$ und sind τ_1, τ_2 zwei Topologien auf X , so erhalten wir, indem wir in Satz 4.9 $f = \text{id}_X$ wählen:

4.10. FOLGERUNG. *Zu einer separierten Topologie auf einer Menge X gibt es keine echt feinere kompakte.*

Um zeigen zu können, daß das topologische Produkt kompakter topologischer Räume wieder kompakt ist, benötigen wir das Zornsche Lemma:

4.11. ZORNSCHES LEMMA. *Sei $(X, \leq)$ eine nicht leere partiell geordnete Menge. Besitzt jede total geordnete Teilmenge K von X eine obere Schranke in X , so gibt es in X wenigstens ein maximales Element.*

Das Zornsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom, zum Wohlordnungssatz und auch zum nachfolgenden Satz von Tychonoff. Wir betrachten es hier als ein Axiom.

Ist X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen von X , so nennen wir eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X mit $U_i \in \mathcal{S}$ für alle $i \in I$ eine $\mathcal{S}$ -Überdeckung von X .

4.12. ALEXANDERSCHER SUBBASENSATZ. *Sei $\mathcal{S}$ Subbasis einer Topologie τ auf einer Menge X . Besitzt jede $\mathcal{S}$ -Überdeckung von X schon eine endliche Teilüberdeckung, so ist (X, τ) kompakt.*

BEWEIS. *Annahme:* X ist nicht kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in I}$ von X , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Die Menge

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ offene Überdeckung von } X \text{ ohne endliche Teilüberdeckung}\}$$

ist dann nicht leer und vermöge der Inklusion teilweise geordnet. Sei nun $\mathfrak{K}$ eine beliebige total geordnete Teilmenge von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}_* := \bigcup \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \in \mathfrak{K}\}$. Wir zeigen daß dann auch $\mathcal{G}_*$ eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung ist. Hätte nämlich $\mathcal{G}_*$ eine endliche Teilüberdeckung $(U_j)_{j=1}^k$, so gäbe es $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k \in \mathfrak{K}$ mit $U_j \in \mathcal{G}_j$ für $j = 1, \dots, k$. Da $\mathfrak{K}$ linear geordnet ist, wäre dann $\tilde{\mathcal{G}} := \bigcup_{j=1}^k \mathcal{G}_j \in \mathfrak{K} \subseteq \mathcal{F}$ im Widerspruch dazu, daß $\{U_1, \dots, U_k\}$ endliche Teilüberdeckung zu $\tilde{\mathcal{G}}$ ist. Somit ist $\mathcal{G}_*$ eine obere Schranke von $\mathfrak{K}$. Damit sind alle Voraussetzungen zum Zornschen Lemma erfüllt und $\mathcal{F}$ besitzt wenigstens ein maximales Element $\mathcal{G}_0$.

Wir betrachten $\mathcal{G}_\mathcal{S} := \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{S}$ und zeigen, daß $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ eine Überdeckung von X ist.

Annahme: Es gibt einen Punkt $x \in X \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{G}_\mathcal{S}} G$. Da $\mathcal{G}_0$ offene Überdeckung von X ist, ist $x \in V$ für ein $V \in \mathcal{G}_0$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis von τ ist und daher V eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$. Also gibt es endlich viele $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}$ mit $x \in S_1 \cap \dots \cap S_k$. Es folgt $S_1, \dots, S_k \notin \mathcal{G}_0$ (da sonst $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{G}_\mathcal{S} = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{S}$ im Widerspruch zur Wahl von x). Wegen der maximalen Wahl von $\mathcal{G}_0$ besitzt $\mathcal{G}_0 \cup \{S_j\}$ für alle $j = 1, \dots, k$ eine endliche Teilüberdeckung $\{G_{1,j}, \dots, G_{n(j),j}, S_j\}$. Es folgt

$$X = \left(\bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{n(j)} \underbrace{G_{i,j}}_{\in \mathcal{G}_0} \right) \cup \underbrace{\left(\bigcap_{j=1}^k S_j \right)}_{\subseteq V \in \mathcal{G}_0}$$

im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{G}_0$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. $\square$

4.13. SATZ VON TYCHONOFF. Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein nicht leeres topologisches Produkt topologischer Räume (X_i, τ_i) , $i \in I$. Genau dann ist X kompakt (bzw. kompakt und separiert), wenn alle X_i , $i \in I$, kompakt (bzw. kompakt und separiert) sind.

BEWEIS. Daß die Produkttopologie auf X genau dann separiert ist, wenn alle (X_i, τ_i) , $i \in I$, separiert sind, wurde in den Übungen gezeigt (vergl. Aufgabe 3.3).

Ist X kompakt in der Produkttopologie τ , so sind nach Definition der Produkttopologie die kanonischen Projektionen $p_i : X \rightarrow X_i$ mit $p_i((x_j)_{j \in I}) := x_i$ für alle $i \in I$ stetig und mit Satz 4.7 folgt die Kompaktheit von $X_i = p_i(X)$ für alle $i \in I$.

Seien nun alle X_i , $i \in I$, kompakt. Gemäß 3.9 ist eine Subbasis für die Produkttopologie τ auf X gegeben durch $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{p_i^{-1}(G) | G \in \tau_i\}$. Für $j \in I$ definiert man

$$\mathcal{S}_j := \{p_j^{-1}(G) | G \in \tau_j\}.$$

Insbesondere gilt für alle $j \in I$ und alle $U \in \mathcal{S}_j$: $p_j(U) \in \tau_j$ und $U = p_j^{-1}(p_j(U))$. Sei nun $\mathcal{U} = (U_k)_{k \in K}$ eine beliebige $\mathcal{S}$ -Überdeckung von X und $K_j := \{k \in K | U_k \in \mathcal{S}_j\}$ für $j \in I$. Wegen $\mathcal{S} = \bigcup_{j \in I} \mathcal{S}_j$ folgt $K = \bigcup_{j \in I} K_j$.

Annahme: Keine der Familien $\mathcal{U}_j := (U_k)_{k \in K_j}$ ($j \in I$) überdeckt X . Nach Konstruktion von $\mathcal{U}_j$ ist dies nur möglich, wenn zu jedem $j \in I$ ein $x_j = (x_{j,i})_{i \in I} \in X$ existiert, so daß $p_j^{-1}(x_j) \cap U_k = \emptyset$ für alle $k \in K_j$. Mit $x := (x_{i,i})_{i \in I}$ gilt $p_j(x) = x_{j,j} \notin \bigcup_{k \in K_j} p_j(U_k)$ für alle $j \in I$ und daher $x \notin \bigcup_{k \in K} U_k = \bigcup_{j \in I} \bigcup_{k \in K_j} U_k$ im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist. Also war die Annahme falsch, es muß wenigstens ein $j \in I$ existieren, so daß $X \subseteq \bigcup_{k \in K_j} U_k$.

Somit ist $(p_j(U_k))_{k \in K_j}$ eine offene Überdeckung von X_j , aus der wir wegen der Kompaktheit von (X_j, τ_j) eine endliche Teilüberdeckung $\{p_j(U_{k_1}), \dots, p_j(U_{k_r})\}$ auswählen können. Dann ist $(p_j^{-1}(p_j(U_{k_\nu})))_{\nu=1}^r = (U_{k_\nu})_{\nu=1}^r$ eine endliche Überdeckung von X und Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

Da jede $\mathcal{S}$ -Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt folgt nach dem Alexanderschen Subbasensatz 4.12 die Kompaktheit von (X, τ) . $\square$

Ein metrischer Raum (X, d) ist bekanntlich genau dann kompakt, wenn jede Folge aus (X, d) einen Häufungswert besitzt, d.h. genau dann, wenn jede Folge aus X eine in (X, d) konvergente Teilfolge hat. Das dies ist im nicht metrisierbaren Fall im allgemeinen nicht mehr stimmt, zeigt das folgende Beispiel.

4.14. BEISPIEL. Sei I das kompakte Intervall $[-1, 1]$ versehen mit der euklidischen Topologie. und sei $\mathbb{M}$ die Menge aller streng monoton wachsenden Folgen in $\mathbb{N}$. Nach dem Satz von Tychonoff ist $X := I^{\mathbb{M}} = \prod_{\mu \in \mathbb{M}} I$ versehen mit der Produkttopologie kompakt. Wir definieren eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty = ((x_n(\mu))_{\mu \in \mathbb{M}})_{n=1}^\infty$ von Elementen aus X durch

$$x_n(\mu) := \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = \mu(k) \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Annahme: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Insbesondere ist $\nu = (\nu(k))_{k=1}^\infty \in \mathbb{M}$. Wegen der Stetigkeit der Projektion p_ν von $X = I^{\mathbb{M}}$ auf die Komponente mit Index ν muß dann auch die Folge $(p_\nu(x_{\nu(k)}))_{k=1}^\infty$ in $I = [-1, 1]$ konvergent sein. Dies ist jedoch wegen $p_\nu(x_{\nu(k)}) = x_{\nu(k)}(\nu) = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nicht der Fall. Daher hat die angegebene Folge keine konvergente Teilfolge. In Satz 4.19 werden wir sehen, daß sie aber ein konvergentes Teilnetz besitzt.

Zunächst führen wir den Begriff eines Teilnetzes ein:

4.15. DEFINITION. Seien $(\mathbb{A}, \leq)$ und $(\mathbb{B}, \preceq)$ zwei partiell geordnete Mengen. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ heißt *kofinal*, falls zu jedem $\alpha \in \mathbb{A}$ ein $\beta_\alpha \in \mathbb{B}$ existiert, so daß für alle $\beta \succeq \beta_\alpha$ gilt $\alpha \leq \varphi(\beta)$.

Sind $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ und $(y_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ zwei Netze in einer nicht leeren Menge X . Wir nennen $(y_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ ein *Teilnetz*, falls $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$ für eine kofinale Abbildung $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ und alle $\beta \in \mathbb{B}$ gilt.

Eine Teilfolge einer Folge ist stets auch ein Teilnetz. Jedoch muß ein Teilnetz einer Folge keine Teilfolge sein.

Wie bei Folgen und Teilfolgen gilt:

4.16. SATZ. Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein in einem topologischen Raum (X, τ) gegen einen Punkt $a \in X$ konvergentes Netz, so konvergiert auch jedes Teilnetz von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ gegen a .

BEWEIS. Sei $(y_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ ein beliebiges Teilnetz und sei $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ die entsprechende kofinale Abbildung. Ist U eine beliebige Umgebung U von a in (X, τ) . Wegen $x_\alpha \rightarrow a$ gibt es ein $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \geq \alpha_0$. Da φ kofinal ist, gibt es ein $\beta_0 \in \mathbb{B}$ mit $\alpha_0 \leq \varphi(\beta)$ für alle $\beta \succeq \beta_0$. Also folgt $y_\beta = x_{\varphi(\beta)} \in U$ für alle $\beta \in \mathbb{B}$ mit $\beta \succeq \beta_0$ und es gilt $y_\beta \rightarrow a$. $\square$

Auch der Begriff des Häufungswertes läßt sich auf Netze übertragen:

4.17. DEFINITION. Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein Netz in einem topologischen Raum (X, τ) . Ein Punkt $a \in X$ heißt *Häufungswert* von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$, falls es zu jedem $\alpha \in \mathbb{A}$ und jeder Umgebung U von a ein $\beta \in \mathbb{A}$ existiert mit $\alpha \leq \beta$ und $x_\beta \in U$.

4.18. SATZ. Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein Netz in einem topologischen Raum (X, τ) . Für einen Punkt $a \in X$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) a ist ein Häufungswert von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$.
- (b) Es gibt ein gegen a konvergentes Teilnetz von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$.

BEWEIS. Sei a ein Häufungswert von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Wir setzen $\mathbb{B} := \mathbb{A} \times \mathfrak{U}(a)$, wobei $\mathfrak{U}(a)$ wieder die Menge aller Umgebungen von a in (X, τ) bezeichne. $\mathbb{B}$ ist partiell geordnet vermöge

$$(\alpha_1, U_1) \preceq (\alpha_2, U_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad (\alpha_1 \leq \alpha_2 \quad \text{und} \quad U_2 \subseteq U_1)$$

für alle $(\alpha_1, U_1), (\alpha_2, U_2) \in \mathbb{B}$. Nach Definition des Häufungswertes gibt es zu jedem $(\alpha, U) \in \mathbb{B}$ ein $\varphi(\alpha, U) \in \mathbb{A}$ mit $\alpha \leq \varphi(\alpha, U)$ und $x_{\varphi(\alpha, U)} \in U$. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ ist also kofinal und $(x_{\varphi(\alpha, U)})_{(\alpha, U) \in \mathbb{B}}$ ist ein gegen a konvergentes Teilnetz von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$.

Es gebe nun ein gegen a konvergentes Teilnetz $(y_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Sei $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ die entsprechende kofinale Abbildung und sei U eine beliebige Umgebung von a und $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ beliebig. Dann gibt es ein $\beta_1 \in \mathbb{B}$, mit $y_\beta = x_{\varphi(\beta)} \in U$ für alle $\beta \geq \beta_1$. Da $\mathbb{A}$ gerichtet ist, gibt es ein $\alpha_1 \in \mathbb{A}$ mit $\alpha_0 \leq \alpha_1$ und $\varphi(\beta_1) \leq \alpha_1$. Da $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ kofinal ist, gibt es zu α_1 ein $\beta_0 \in \mathbb{B}$ mit $\alpha_1 \leq \varphi(\beta)$ für alle $\beta \geq \beta_0$. Da $\mathbb{B}$ gerichtet ist gibt es schließlich ein $\beta_* \in \mathbb{B}$ mit $\beta_0 \leq \beta_*$ und $\beta_1 \leq \beta_*$. Insbesondere gilt $y_{\beta_*} = x_{\varphi(\beta_*)} \in U$ und $\alpha_0 \leq \varphi(\beta_*)$. Also ist a ein Häufungswert von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$. $\square$

4.19. SATZ. Für einen topologischen Raum (X, τ) sind äquivalent:

- (a) (X, τ) ist kompakt.
- (b) Jedes Netz in X hat ein in (X, τ) konvergentes Teilnetz.

BEWEIS. Sei (X, τ) kompakt und sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein beliebiges Netz in X .

Annahme: $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ hat kein konvergentes Teilnetz und somit nach Satz 4.18 auch keinen Häufungswert. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung V_x von x und ein $\alpha_x \in \mathbb{A}$ mit $x_\alpha \notin V_x$ für alle $\alpha \geq \alpha_x$. Nach Definition der Umgebung gibt es dann auch eine offene Menge $U_x \subseteq V_x$ mit $x \in U_x$. Diese erfüllt dann ebenfalls $x_\alpha \notin U_x$ für alle $\alpha \geq \alpha_x$. Aus der offenen Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ können wir wegen der Kompaktheit von (X, τ) eine endliche Teilüberdeckung $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ auswählen. Da $\mathbb{A}$ gerichtet ist, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{A}$ mit $\alpha_{x_j} \leq \alpha$ für $j = 1, \dots, n$. Hieraus erhält man den Widerspruch

$$x_\alpha \notin \bigcup_{j=1}^n U_{x_j} = X.$$

Die Annahme war also falsch. Daher hat $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ einen Häufungswert.

Für die Rückrichtung machen wir die *Annahme:* (b) ist erfüllt, aber (X, τ) ist nicht kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Die Menge $\mathcal{F}(I)$ der endlichen Teilmengen von I ist eine durch die Inklusion $\subseteq$ teilweise geordnete, gerichtete Menge. Da $(U_i)_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, gilt:

$$(4.1) \quad \forall F \in \mathcal{F}(I) \quad \exists x_F \notin \bigcup_{i \in F} U_i.$$

Nach Voraussetzung hat das hierdurch definierte Netz $(x_F)_{F \in \mathcal{F}(I)}$ einen Häufungswert $a \in X$.

Die Menge $I_a := \{i \in I; a \in U_i\}$ ist nicht leer, da $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. Sei nun $k \in I_a$ beliebig. Dann ist $\{k\} \in \mathcal{F}(I)$. Nach Definition des Häufungswertes gibt es zu der Umgebung U_k von a ein $F \in \mathcal{F}(I)$ mit $\{k\} \subseteq F$ (d.h. mit $k \in F$) und $x_F \in U_k$. Dies steht im Widerspruch zu (4.1). Also muß (X, τ) doch kompakt sein. $\square$

4.20. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *lokalkompakt*, falls jeder Punkt aus X eine kompakte Umgebung besitzt.

4.21. BEISPIELE. (a) Jeder kompakte topologische Raum ist natürlich auch lokalkompakt.

(b) $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{C}^n$ sind, versehen mit der euklidischen Topologie lokalkompakt aber nicht kompakt.

(c) Ist X eine Menge, so ist X - versehen mit der diskreten Topologie - lokalkompakt, da für jedes $x \in X$ die Menge $\{x\}$ eine kompakte Umgebung von x ist.

4.22. SATZ. Ist (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum, so besitzt (X, τ) eine Umgebungsbasis von kompakten Mengen.

BEWEIS. Sei x ein beliebiger Punkt in X . Wir müssen zeigen, daß jede Umgebung von x eine kompakte Umgebung von x enthält. Sei also U eine beliebige Umgebung von x in (X, τ) . Da (X, τ) lokalkompakt ist, besitzt x eine kompakte Umgebung K . Dann ist auch $U \cap K$ eine Umgebung von x enthält also eine offene Menge G mit $x \in G$. Die Menge $K \setminus G = K \cap (X \setminus G)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von K und daher nach Folgerung 4.4 kompakt mit $x \notin K \setminus G$. Nach Satz 4.3 gibt es dann offene Mengen $V, W \in \tau$ mit $V \cap W = \emptyset$, $x \in V$, $K \setminus G \subseteq W$. Dann ist $G \cap V$ eine offene Umgebung von x , $K \setminus W$ ist kompakt und es gilt

$$x \in G \cap V \subseteq K \setminus W \subseteq G \subseteq U.$$

$K \setminus W$ ist also eine kompakte in U enthaltene Umgebung von x . $\square$

4.23. SATZ (Alexandroffsche Einpunktkompaktifizierung). *Zu jedem lokalkompakten Hausdorffraum (X, τ) gibt es einen bis auf eine Homöomorphie eindeutigen bestimmten kompakten Hausdorffraum (X_∞, τ_∞) , der einen Punkt enthält, den wir mit ∞ bezeichnen, so daß $\tilde{X} := X_\infty \setminus \{\infty\}$ versehen mit der Unterraumtopologie homöomorph zu (X, τ) ist. Ist (X, τ) nicht kompakt, so ist $\tilde{X}$ dicht in (X_∞, τ_∞) .*

BEWEIS. (a) *Existenz:* Wir definieren $X_\infty := X \cup \{\infty\}$, wobei ∞ ein nicht in X enthaltener Punkt sei, und $\tau_\infty := \tau \cup \mathcal{U}_\infty$ wobei

$$\mathcal{U}_\infty := \{X_\infty \setminus K; K \text{ ist kompakte Teilmenge von } (X, \tau)\}.$$

Offensichtlich ist $X_\infty = X_\infty \setminus \emptyset \in \mathcal{U}_\infty \subseteq \tau_\infty$ und $\emptyset \in \tau \subset \tau_\infty$.

Ist $(X_\infty \setminus K_i)_{i \in I}$, $I \neq \emptyset$, eine beliebige Familie aus $\mathcal{U}_\infty$, $K_i \subseteq X$ kompakt für alle $i \in I$, so ist ihre Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} (X \setminus K_i) = X_\infty \setminus \bigcap_{i \in I} K_i \in \mathcal{U}_\infty,$$

da beliebige Durchschnitte von kompakten Mengen nach Folgerung 4.4 kompakt sind. Ist $I = \{1, \dots, n\}$ endlich, so hat man

$$\bigcap_{j=1}^n (X_\infty \setminus K_j) = X_\infty \setminus \bigcup_{j=1}^n K_j \in \mathcal{U}_\infty,$$

da endliche Vereinigungen von kompakten Mengen kompakt sind. Aus der Definition der Topologie folgt ferner, daß beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von Mengen aus τ wieder in τ liegen.

Ist nun $\mathcal{G} \subseteq \tau_\infty$ beliebig mit $\mathcal{G} \cap \mathcal{U}_\infty \neq \emptyset$ und mit $\mathcal{G} \cap \tau \neq \emptyset$, so folgt

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = \bigcup_{G \in \mathcal{G} \cap \mathcal{U}_\infty} G \cup \bigcup_{G \in \mathcal{G} \cap \tau} G = (X_\infty \setminus K) \cup G_0 = X_\infty \setminus (K \cap (X \setminus G_0))$$

mit einer in (X, τ) kompakten Menge K und einer offenen Menge $G_0 \in \tau$. Da $K \cap (X \setminus G_0)$ als Durchschnitt einer kompakten Menge mit einer abgeschlossenen Menge nach Folgerung 4.4 kompakt in (X, τ) ist folgt $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{U}_\infty \subseteq \tau_\infty$.

Ist schließlich $G = \bigcup_{j=1}^n G_j$ endlicher Durchschnitt von Mengen aus τ_∞ mit $G_j \in \tau$ für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, n\}$, So ist G von der Gestalt $G = (X_\infty \setminus K) \cap G_0 = (X \setminus K) \cap G_0$ mit einer τ -kompakten Menge $K \subseteq X$ und einer τ -offenen Menge G_0 . Da $X \setminus K$ als Komplement der nach Folgerung 4.4 abgeschlossenen Menge K offen in (X, τ) ist, folgt $G \in \tau \subset \tau_\infty$.

Damit ist gezeigt, daß τ_∞ eine Topologie auf X_∞ ist. Die von τ_∞ auf X induzierte Unterraumtopologie stimmt offensichtlich mit τ überein.

Die Topologie τ_∞ ist separiert: Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es wegen der Separiertheit von τ offene Mengen $G_x, G_y \in \tau \subset \tau_\infty$ mit $x \in G_x, y \in G_y$ und $G_x \cap G_y = \emptyset$. Ist $x \in X$ und $y = \infty$, so beachten wir, daß x in (X, τ) eine kompakte Umgebung K besitzt, da (X, τ) lokalkompakt ist. K ist auch Umgebung zu x in (X_∞, τ_∞) (wegen $x \in \text{int } K \in \tau \subset \tau_\infty$). Nach Definition von τ_∞ ist $X_\infty \setminus K$ eine zu K disjunkte Umgebung von $y = \infty$.

Ist nun $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X_∞ , so gibt es ein $k \in I$ mit $\infty \in U_k$. Dann hat U_k die Gestalt $U_k = X_\infty \setminus K$ mit einer in (X, τ) kompakten Menge K . Es folgt

$$K = K \cap \bigcup_{i \in I} U_i = K \cap \bigcup_{i \in I} (U_i \cap X) \subseteq \bigcup_{i \in I} (U_i \cap X).$$

Da die Mengen $U_i \cap X$ offen in (X, τ) sind, gibt es wegen der Kompaktheit von K endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ und es folgt $X_\infty = U_k \cup K = U_k \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Damit ist gezeigt, daß jede offene Überdeckung von X_∞ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. daß (X, τ_I) ein kompakter topologischer Raum ist.

Wegen Lemma 4.4 ist X genau dann in (X_∞, τ_∞) abgeschlossen, wenn X kompakte Teilmenge von (X_∞, τ_∞) ist. Da τ mit der von τ_∞ auf X induzierten Unterraumtopologie übereinstimmt, muß dann (X, τ) ein kompakter topologischer Raum sein. Ist (X, τ) also nicht kompakt, so ist die Abschließung $\overline{X}$ von X in (X_∞, τ_∞) von X verschieden, muß also mit X_∞ übereinstimmen.

(b) *Eindeutigkeit*: Sei auch $(X'_\infty, \tau'_\infty)$ ein Raum mit den Eigenschaften des Satzes und X' ein in der von τ'_∞ induzierten Unterraumtopologie τ' zu (X, τ) homöomorpher topologischer Teilraum, so daß $X'_\infty \setminus X' = \{\infty'\}$ mit einem nicht in X' liegenden Punkt ∞' . Ist $f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ eine Homöomorphie, so definieren wir $F : X_\infty \rightarrow X'_\infty$ durch $F(x) := f(x)$ für alle $x \in X$ und $F(\infty) := \infty'$. Dann ist F bijektiv und F sowie F^{-1} sind in allen Punkten aus X bzw. X' stetig, da f und f^{-1} stetig sind. Ist U' eine offene Umgebung von ∞' , so ist $K' := X'_\infty \setminus U'$ abgeschlossen in $(X'_\infty, \tau'_\infty)$ also nach Folgerung 4.4 kompakte Teilmenge von X' . Da f^{-1} auf X' in der Unterraumtopologie stetig ist, ist auch $F^{-1}(K') = f^{-1}(K')$ in (X, τ) kompakt und somit $F^{-1}(U') = X_\infty \setminus F^{-1}(K')$ eine offene Umgebung von ∞ in (X_∞, τ_∞) . Also ist F auch in ∞ stetig. Ist U eine beliebige offene Umgebung von ∞ in (X_∞, τ_∞) , so ist $U = X_\infty \setminus K$ für eine kompakte Teilmenge K von (X, τ) . Wegen der Stetigkeit von f , ist dann $f(K)$ kompakt und daher auch abgeschlossene Menge in (X', τ') und somit $(F^{-1})^{-1}(U) = F(U) = F(X_\infty \setminus K) = X'_\infty \setminus f(K)$ eine offene Umgebung von ∞' in $(X'_\infty, \tau'_\infty)$. Also sind F und F^{-1} auf X_∞ bzw. X'_∞ stetig, d.h. F ist eine Homöomorphie. $\square$

Sei nun (K, τ) ein kompakter topologischer Raum und (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren auf der Menge $C(K, X)$ aller auf K stetigen X -wertigen Funktionen eine Metrik d_K durch

$$d_K(f, g) := \sup_{t \in K} d(f(t), g(t)) \quad (f, g \in C(K, X)).$$

Sind nämlich $f, g \in C(K, X)$, so ist die durch $(f, g)(t) := (f(t), g(t))$, $t \in K$, definierte Funktion $(f, g) : K \rightarrow X \times X$ stetig, wenn wir $X \times X$ mit der durch

$$d_\times((x, y), (u, v)) := d(x, u) + d(y, v) \quad ((x, y), (u, v) \in X \times X)$$

definierten Produktmetrik versehen. Da $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist (vergl. [1], Teil (c) der Bemerkung vor Lemma 8.10), die Kompaktheit und Beschränktheit von

$$\{d(f(t), g(t)) ; t \in K\}$$

nach Folgerung 4.8 (als stetiges Bild des kompakten topologischen Raums K unter der stetigen Abbildung $d_\times \circ (f, g) : K \rightarrow \mathbb{R}$). Insbesondere ist also $d_K(f, g) < \infty$ für alle $f, g \in C(K, X)$. Die Metrikeigenschaften (M1)-(M3) zeigt man durch direkte Rechnung.

4.24. SATZ. *Sei (K, τ) ein kompakter topologischer Raum und sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der metrische Raum $(C(K, X), d_K)$ vollständig.*

BEWEIS. Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Cauchyfolge in $(C(K, X), d_K)$. Wegen

$$d(f_n(s), f_m(s)) \leq \sup_{t \in K} d(f_n(t), f_m(t)) \quad \text{für alle } s \in K, n, m \in \mathbb{N}$$

ist für alle $s \in K$ die Folge $(f_n(s))_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in (X, d) und daher konvergent gegen einen Wert $f(s) \in X$. Hierdurch ist eine Abbildung $f : K \rightarrow X$ definiert. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall s \in K \quad \forall n, m \geq n_0 : \quad d(f_n(s), f_m(s)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mit $m \rightarrow \infty$ folgt wegen der Stetigkeit der Metrik d :

$$\forall s \in K \quad \forall n \geq n_0 : \quad d(f_n(s), f(s)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

und damit insbesondere

$$(4.2) \quad \forall n \geq n_0 : \sup_{s \in K} d(f_n(s), f(s)) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

d.h.

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in K} d(f_n(s), f(s)) = 0.$$

Sei nun $t \in K$ beliebig und $\varepsilon > 0$ sowie $n_0 \in \mathbb{N}$ mit (4.2). Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in t gibt es eine Umgebung U von t in (K, τ) mit

$$\forall s \in U : \quad d(f_{n_0}(s), f_{n_0}(t)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \forall s \in U : \quad d(f(s), f(t)) &\leq d(f(s), f_{n_0}(s)) + d(f_{n_0}(s), f_{n_0}(t)) + d(f_{n_0}(t), f(t)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $f \in C(K, X)$ und wegen (4.3) gilt $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ in $(C(K, X), d_K)$. $\square$

Eine Teilmenge eines topologischen Raums, deren Abschließung kompakt ist, heißt *relativkompakt*.

Eine Familie H von stetigen Abbildungen von einem topologischen Raum (Y, τ) in einen metrischen Raum (X, d) heißt *gleichstetig in einem Punkt* $y_0 \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von y_0 in (Y, τ) gibt mit

$$\forall y \in U \quad \forall h \in H : \quad d(h(y), h(y_0)) < \varepsilon.$$

Ist H in allen Punkte $y \in Y$ gleichstetig, so sagen wir: H ist auf Y gleichstetig.

4.25. SATZ VON ARZELA–ASCOLI. Sei (K, τ) ein kompakter topologischer Raum und (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für $H \subseteq C(K, X)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) H ist relativkompakt in $(C(K, X), d_K)$.
- (b) H erfüllt die beiden folgenden Bedingungen:
 - (i) Für alle $t \in K$ ist $H(t) := \{h(t) ; h \in H\}$ relativkompakt in (X, d) .
 - (ii) H ist gleichstetig.

BEWEIS. “(a) $\implies$ (b)”: Sei also H relativkompakt und somit $\overline{H}$ kompakt in $(C(K, X), d_K)$. Ist $t \in K$ beliebig, so ist die Punktevaluation $\delta_t : (C(K, X), d_K) \rightarrow (X, d)$, $f \mapsto f(t)$ in t , wegen

$$d(\delta_t(f), \delta_t(g)) = d(f(t), g(t)) \leq d_K(f, g) \quad \text{für alle } f, g \in C(K, X)$$

stetig. Also ist $\overline{H}(t) = \delta_t(\overline{H})$ kompakt und $H(t) \subseteq \overline{H}(t)$ somit relativkompakt in (X, d) . Damit ist (i) gezeigt.

Annahme: (ii) ist nicht erfüllt, d.h. es gibt ein $t_0 \in K$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß für alle $U \in \mathfrak{U}(t_0)$ eine Funktion $h_U \in H$ und ein Punkt $t_U \in U$ existiert mit $d(h_U(t_0), h_U(t_U)) \geq \varepsilon_0$. $\mathfrak{U}(t_0)$ ist gerichtet bezüglich der durch $U \preceq V : \iff V \subseteq U$ gegebenen Ordnungsrelation. Da $\overline{H}$ kompakt ist, besitzt das Netz $(h_U)_{U \in \mathfrak{U}(t_0)}$ ein bezüglich d_K gegen eine Abbildung $h \in \overline{H}$ konvergentes Teilnetz $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ mit assoziierter kofinaler Abbildung $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathfrak{U}(t_0)$. Wegen der Stetigkeit von h in t_0 gibt es eine Umgebung U_0 von t_0 mit

$$\forall t \in U_0 : \quad d(h(t_0), h(t)) < \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Wegen $f_\alpha \rightarrow h$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{A}$ mit $\varphi(\alpha) \subseteq U_0$ und $d_K(f_\alpha, h) < \frac{\varepsilon_0}{3}$. Es folgt

$$\begin{aligned} d(h_{\varphi(\alpha)}(t_0), h_{\varphi(\alpha)}(t_{\varphi(\alpha)})) &= d(f_\alpha(t_0), f_\alpha(t_{\varphi(\alpha)})) \\ &\leq d(f_\alpha(t_0), h(t_0)) + d(h(t_0), h(t_{\varphi(\alpha)})) + d(h(t_{\varphi(\alpha)}), f_\alpha(t_{\varphi(\alpha)})) \\ &\leq d_K(f_\alpha, h) + d(h(t_0), h(t_{\varphi(\alpha)})) + d_K(h, f_\alpha) \\ &< \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Definition der Funktionen h_U und der Punkte t_U , $U \in \mathfrak{U}(t_0)$.

“(b) $\implies$ (a)”: Eine direkte Überlegung zeigt, daß die Eigenschaften (i) und (ii) erhalten bleiben, wenn wir bei H zur Abschließung übergehen. Wir setzen daher im weiteren ohne Einschränkung voraus, daß H abgeschlossen ist.

Sei $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein beliebiges Netz in H . Wir zeigen, daß $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein gegen eine Abbildung $h \in H$ konvergentes Teilnetz besitzt. Nach Satz 4.19 folgt dann die Kompaktheit von $\overline{H}$.

Wegen (i) ist $\overline{H(t)}$ kompakt für alle $t \in K$. Nach dem Satz von Tychonoff ist dann auch das topologische Produkt $\prod_{t \in K} \overline{H(t)}$ kompakt. Daher besitzt das Netz $((h_\alpha(t))_{t \in K})_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein in der Produkttopologie gegen ein $(f(t))_{t \in K} \in \prod_{t \in K} \overline{H(t)}$ konvergentes Teilnetz $((f_\beta(t))_{t \in K})_{\beta \in \mathbb{B}}$. Nach Aufgabe 3.3 ist dieses Teilnetz komponentenweise konvergent. Wie in Aufgabe 2.5 gezeigt wurde, ist daher für alle $t \in K$ das Netz $(f_\beta(t))_{\beta \in \mathbb{B}}$ ein Cauchynetz in (X, d) .

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von H gibt es zu jedem $t \in K$ eine offene Umgebung U_t von t mit

$$(4.4) \quad \forall s \in U_t \quad \forall h \in H : \quad d(h(t), h(s)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aus der offenen Überdeckung $(U_t)_{t \in K}$ von K können wir wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $U_{t_1}, \dots, U_{t_m}$ auswählen. Da das Netz $(f_\beta(t_j))_{\beta \in \mathbb{B}}$ ein Cauchynetz in (X, d) ist, gibt es ein $\beta_j \in \mathbb{B}$ mit

$$(4.5) \quad \forall \beta, \gamma \geq \beta_j : \quad d(f_\beta(t_j), f_\gamma(t_j)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

($j=1, \dots, m$). Da $\mathbb{B}$ gerichtet ist, gibt es ein $\beta_0 \in \mathbb{B}$ mit $\beta_j \leq \beta_0$ für alle $j = 1, \dots, m$.

Sei nun $t \in K$ beliebig. Dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $t \in U_{t_j}$. Für alle $\beta, \gamma \in \mathbb{B}$ mit $\beta_0 \leq \beta$ und $\beta_0 \leq \gamma$ folgt dann mit (4.4) und (4.5):

$$\begin{aligned} d(f_\beta(t), f_\gamma(t)) &\leq d(f_\beta(t), f_\beta(t_j)) + d(f_\beta(t_j), f_\gamma(t_j)) + d(f_\gamma(t_j), f_\gamma(t)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{11}{12}\varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $\beta, \gamma \geq \beta_0$:

$$d_K(f_\beta, f_\gamma) = \sup_{t \in K} d(f_\beta(t), f_\gamma(t)) \leq \frac{11}{12}\varepsilon < \varepsilon.$$

$(f_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ ist also ein Cauchynetz in dem nach Satz 4.24 wegen der Vollständigkeit von (X, d) vollständigen metrischen Raum $(C(K, X), d_K)$ und daher nach Aufgabe 2.5 (b) konvergent in $(C(K, X), d_K)$ gegen eine Abbildung $h \in C(K, X)$. Da jede Umgebung von h Punkte aus H enthält, liegt h in $\overline{H} = H$. $\square$

Man beachte, daß im Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli die Kompaktheit von K und die Vollständigkeit von (X, d) nur für den Beweis der Implikation (b) $\implies$ (a) benötigt wurde.

Im Fall das $X = \mathbb{K}^N$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) versehen mit der euklidischen Metrik ist, ist eine Teilmenge von $\mathbb{K}^N$ genau dann relativkompakt, wenn Sie beschränkt ist. Wir erhalten also:

4.26. FOLGERUNG. Ist (K, τ) ein kompakter topologischer Raum und sei $C(K, \mathbb{K}^N)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$. Für eine Teilmenge $H \subset C(K, \mathbb{K}^N)$ sind äquivalent:

- (a) H ist kompakt in $(C(K, \mathbb{K}^N), \|\cdot\|_K)$
- (b) H ist punktweise beschränkt, gleichstetig und abgeschlossen.
- (c) H ist beschränkt in dem Banachraum $(C(K, \mathbb{K}^N), \|\cdot\|_K)$, gleichstetig und abgeschlossen.

BEWEIS. (c) $\implies$ (b) ist offensichtlich. (b) $\implies$ (a) gilt dem Satz 4.25 von Arzelà-Ascoli und (a) $\implies$ (c) folgt aus der Tatsache, daß in einem normierten Raum jede kompakte Teilmenge schon beschränkt und abgeschlossen ist und die Gleichstetigkeit nach dem Satz 4.25 von Arzelà-Ascoli gilt. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 4.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $\alpha \geq 0$ sei $M_\alpha := \prod_{k=1}^\infty \{x \in \mathbb{K}; |x| \leq k^{-\alpha}\}$.

4.1. AUFGABE. Für welche $\alpha \geq 0$ ist M_α eine kompakte Teilmenge von

- (a) $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ bzw. (b) $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$?

4.2. AUFGABE. Seien $K_1, \dots, K_n$ endlich viele kompakte Teilmengen eines topologischen Raums (X, τ) . Zeigen Sie, daß dann auch $K_1 \cup \dots \cup K_n$ kompakt in (X, τ) ist.

4.3. AUFGABE. Sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum (K, τ) und sei $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein punktweise auf K gegen f konvergentes Netz (d.h. mit $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in K$). Es gelte

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{A} : \quad \alpha \leq \beta \implies \forall x \in K : \quad f_\alpha(x) \leq f_\beta(x).$$

Zeigen Sie, daß $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ dann schon gleichmäßig auf K gegen f konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die Mengen $U_\alpha := \{x \in K; 0 \leq f(x) - f_\alpha(x) < \varepsilon\}$.

4.4. AUFGABE. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und seien $G_1, G_2 \subseteq X$ offene Teilmengen von X . Zeigen Sie, daß dann auch $G_1 \setminus G_2$, versehen mit der Relativtopologie von τ , ein lokalkompakter Hausdorffraum ist.

4.5. AUFGABE. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge aus X eine in (X, τ) konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie, daß ein abzählbares topologisches Produkt von folgenkompakten topologischen Räumen wieder folgenkompakt ist.

Hinweis: Diagonalfolgenverfahren.

4.6. AUFGABE. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie, daß es zu jeder kompakten Teilmenge K von X eine offene Menge $G \subseteq X$ und eine kompakte Menge $H \subseteq G$ gibt mit $K \subseteq G \subseteq H$.

4.7. AUFGABE. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *abzählbar im Unendlichen*, falls X eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist. Zeigen Sie: Für einen lokalkompakten Hausdorffraum (X, τ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) (X, τ) ist abzählbar im Unendlichen.
- (b) Der Punkt ∞ hat in der Alexandroffschen Einpunktkompaktifizierung von (X, τ) eine abzählbare Umgebungsbasis.
- (c) (X, τ) hat eine kompakte Ausschöpfung, d.h. Es gibt eine Folge $(K_n)_{n=0}^\infty$ von kompakten Teilmengen von X mit

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad K_n \subseteq \text{int}(K_{n+1}) \subseteq X = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k.$$

Die folgende Aufgabe zeigt, daß in Folgerung 4.4 auf die Voraussetzung der Separiertheit nicht verzichtet werden kann.

4.8. AUFGABE. Sei $X := \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$ versehen mit der euklidischen Topologie. Wir definieren auf X eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$z \sim w : \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = |w| & \text{falls } |z| < 1 \\ z = w & \text{falls } |z| = 1. \end{cases}$$

und versehen den zugehörigen Quotientenraum $X/\sim$ mit der Quotiententopologie $\tau_\sim$. Zeigen Sie:

- (a) $(X/\sim, \tau_\sim)$ ist ein T_1 -Raum aber kein T_2 -Raum.
- (b) $(X/\sim, \tau_\sim)$ ist kompakt.
- (c) Ist $\pi : X \rightarrow X/\sim$ die kanonische Surjektion, so ist π eine offene Abbildung (bildet also offene Teilmengen von X auf offene Teilmengen von $(X/\sim, \tau_\sim)$ ab).
- (d) Sind $z_1, z_2 \in X$ zwei voneinander verschiedene Punkte mit $|z_1| = |z_2| = 1$, so gibt es kompakte Umgebungen V_j von $\pi(z_j)$, $j = 1, 2$, deren Schnittmenge nicht kompakt in $(X/\sim, \tau_\sim)$ ist.

4.9. AUFGABE. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *nach oben* bzw. *nach unten halbstetig*, $x \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x gibt mit $f(y) < f(x) + \varepsilon$ (bzw. $f(y) > f(x) - \varepsilon$) für alle $y \in U$. f heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *halbstetig auf X* , falls f in allen Punkten von X halbstetig ist. Zeigen Sie: Ist (X, τ) kompakt, so gibt es zu jeder nach oben (bzw. nach unten) halbstetigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = \sup f(X)$ (bzw. mit $f(x_0) = \inf f(X)$).

Die folgende Aufgabe zeigt, daß in Satz 4.22 auf die Voraussetzung der Separiertheit nicht verzichtet werden kann.

4.10. AUFGABE. Sei $X = [0, 1]$ versehen mit der Topologie

$$\tau := \{\emptyset, X\} \cup \{[0, 1) \setminus A ; A \text{ ist abzählbare Teilmenge von } X\}$$

Zeigen Sie:

- (a) (X, τ) ist kompakt.
- (b) Die in (X, τ) offene Menge $G := [0, 1)$ enthält für kein $x \in G$ eine kompakte Umgebung von x .

4.11. AUFGABE. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $y_0 \in \mathbb{R}$ und sei $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, stetige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\alpha > 0$ ist durch

$$y_\alpha(t) := \begin{cases} y_0 & \text{für } t \leq a \\ y_0 + \int_a^t f(s, y_\alpha(s - \alpha)) ds & \text{für } a < t \leq 1 \end{cases}$$

eine auf I wohldefinierte stetige Funktion gegeben.

(b) $H := \{y_\alpha; \alpha > 0\}$ ist eine relativkompakte Teilmenge von $(C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_I)$. Insbesondere hat also jede Folge aus H wenigstens einen Häufungswert.

4.12. AUFGABE. Zeigen Sie, daß in der Situation von Aufgabe 4.11 jeder Häufungswert von $(y_{1/n})_{n=1}^\infty$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(t, y(t)), \quad t \in I, \quad y(a) = y_0$$

ist. Insbesondere hat also diese Anfangswertaufgabe wenigstens eine auf ganz I definierte Lösung.

Der Kategoriensatz von Baire

5.1. DEFINITION. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt

- *dicht in X* , falls $\overline{A} = X$.
- *nirgends dicht in X* , falls $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.
- *von erster Kategorie oder mager in X* , falls A abzählbare Vereinigung von in X nirgends dichten Teilmengen ist.
- *von zweiter Kategorie oder nicht mager in X* , falls A nicht von erster Kategorie in X ist.

Ist jede nicht leere offene Teilmenge von X von zweiter Kategorie in X , so nennt man (X, τ) einen Baireschen Raum.

Im folgenden Lemma fassen wir einige leicht zu verifizierenden Permanenzeigenschaften für magere Mengen zusammen.

5.2. LEMMA. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- Ist $A \subseteq B \subseteq X$ und B von erster Kategorie in X , so ist auch A von erster Kategorie in X .
- Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $\text{int } A = \emptyset$, so ist A mager in X .
- Jede abzählbare Vereinigung von in X mageren Mengen ist wieder mager in X .
- Ist $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Homöomorphie von (X, τ) auf einen weiteren topologischen Raum (Y, σ) , so ist für jede Teilmenge A von X die Bildmenge $\varphi(A)$ von der gleichen Kategorie wie A .

Die folgenden Beispiele zeigen, daß „magere“ Mengen ziemlich „dick“ sein können.

5.3. BEISPIELE. (a) $\mathbb{Q}$ ist als abzählbare Vereinigung von einpunktigen (und daher nirgends dichten) Teilmengen von $\mathbb{R}$ mager in $\mathbb{R}$, obwohl $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $I := [0, 1]$. Zu jedem $\varepsilon \in (0, 1)$ gibt es eine abgeschlossene in I nirgends dichte Teilmenge F von I mit $\lambda(F) \geq 1 - \varepsilon$.

(c) Es gibt eine Borelmenge $A \subseteq I$ mit $\lambda(A) = 1$, welche von erster Kategorie in I ist.

BEWEIS. (b) Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen aus $(0, 1)$ und sei $0 < \varepsilon < 1$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta \in (0, 1/2)$ mit $\delta/(1 - \delta) < \varepsilon$.

Für $H \subset I$ mit $\text{int } H \neq \emptyset$ sei $r(H) := \min\{k; x_k \in \text{int}(H)\}$.

Wir konstruieren induktiv eine Folge $(I_n)_{n=0}^\infty$ von abgeschlossenen Teilmengen von I mit den folgenden Eigenschaften:

- (1_n) I_n ist endliche Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen, von denen wenigstens eins nicht zu einem Punkt ausgeartet ist.

$$(2_n) \quad \lambda(I_n) \geq 1 - \sum_{j=1}^n \delta^j.$$

- (3_n) Für $0 \leq j < n$ gilt: $I_n \subset I_j$ und $r(I_j) < r(I_n)$.

Mit $I_0 := I$ sind diese Forderungen für $n = 0$ offensichtlich erfüllt und es ist $r(I_0) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien nun schon die Mengen I_j für $0 \leq j \leq n$ konstruiert. Nach Definition von $r(I_n)$ ist $x_{r(I_n)} \in \text{int}(I_n)$ und $x_j \notin \text{int}(I_n)$ für $1 \leq j < r(I_n)$. Sei $J = [a, b]$ das maximale abgeschlossene Intervall mit $J \subseteq I_n$ und $x_{r(I_n)} \in (a, b)$. Wir wählen $\alpha > 0$ mit $\alpha \leq \min\{\delta^{n+1}/2, (b-a)/3\}$ und setzen $I_{n+1} := I_n \setminus U_\alpha(x_{r(I_n)})$. Man rechnet leicht nach, daß dann die Bedingungen (1_{n+1}) , (2_{n+1}) , (3_{n+1}) erfüllt sind.

Es folgt insbesondere $r(I_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Die Menge $F := \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von I . Wegen der σ -Additivität des Lebesgue-Maßes ist

$$\lambda(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(I_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sum_{j=1}^n \delta^j\right) = 1 - \frac{\delta}{1-\delta} > 1 - \varepsilon.$$

Wäre $\text{int}(F) \neq \emptyset$, so gäbe es eine rationale Zahl $x_k \in \text{int} F$. Nach Konstruktion gilt aber wegen $k \leq r(I_k) < r(I_{k+1})$,

$$x_k \notin \text{int}(I_{k+1}) \supseteq \text{int}(F).$$

Also folgt $\text{int}(F) = \emptyset$. Da F abgeschlossen ist, ist F also nirgends dicht in $[0, 1]$.

(c) Nach (b) gibt es eine Folge $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen, in $[0, 1]$ nirgends dichten Mengen mit $\lambda(F_n) \geq 1 - 1/n$. Die Menge $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ist dann eine Borelmenge, welche von erster Kategorie in $[0, 1]$ ist, mit

$$1 \geq \lambda(A) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda(F_n) = 1.$$

Damit folgt die Behauptung. □

BEISPIEL. Sei $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0, 1]$. Die Funktionenfolge $(\chi_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$\chi_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = r_k, 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ punktweise auf $[0, 1]$ gegen die in allen $x \in [0, 1]$ unstetige Funktion χ mit

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion χ_n punktweiser Limes der stetigen Funktionen $\varphi_\nu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_\nu(x) := \sum_{k=1}^n (1 - |x - r_k|)^\nu \quad (x \in [0, 1]).$$

χ ist also punktweiser Limes einer Folge von Funktionen, die ihrerseits punktweiser Limes von Folgen stetiger Funktionen sind. Es stellt sich die Frage: *Ist χ selbst schon punktweiser Limes einer Folge von stetigen Funktionen?*

Allgemeiner kann man fragen: Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}$ oder in einem Banachraum E auf einem metrischen Raum (X, d) , welche auf X punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. *Kann der Fall eintreten, daß f in allen Punkten unstetig ist oder gibt es zu f immer Punkte, in denen f stetig ist?*

Als ersten Schritt zu einer Antwort zeigen wir:

5.4. SATZ. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sei eine auf X punktweise gegen eine Funktion $f : X \rightarrow E$ konvergente Folge von stetigen E -wertigen Funktionen auf X . Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von f von erster Kategorie in X .*

BEWEIS. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$P_m(\varepsilon) := \{x \in X; \|f(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon\}, \quad G(\varepsilon) := \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{int}(P_m(\varepsilon)) \text{ und } D := \bigcap_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mit Hilfe dieser Definition zeigt man leicht auch die folgende Darstellung für die Menge D :

$$D = \left\{x \in X; \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \text{ und eine Umgebung } U \text{ von } x \forall y \in U : \|f(y) - f_m(y)\| < \frac{1}{n}\right\}$$

Wir zeigen zunächst:

(a) $D = \{x \in X; f \text{ ist stetig in } x\}$.

Sei $x \in D$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 3/\varepsilon$. Dann gibt es nach obiger Darstellung von D ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung U von x mit

$$\forall y \in U : \|f(y) - f_m(y)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Da f_m auf X stetig ist, gibt es eine Umgebung V von x mit

$$\forall y \in V : \|f_m(x) - f_m(y)\| < \frac{1}{n}.$$

Damit folgt für alle y in der Umgebung $U \cap V$ von x :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_m(y)\| + \|f_m(y) - f(y)\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Also ist x ein Stetigkeitspunkt für f .

Sei nun umgekehrt x ein Stetigkeitspunkt für f und sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $f_m(x) \rightarrow f(x)$ in $(E, \|\cdot\|)$ für $m \rightarrow \infty$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\|f(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{3n}$. Da f und f_m nach Voraussetzung beide in x stetig sind, gibt es eine Umgebung U von x mit

$$\forall y \in U : \|f(x) - f(y)\| < \frac{1}{3n} \quad \text{und} \quad \|f_m(x) - f_m(y)\| < \frac{1}{3n}.$$

Damit erhalten wir für alle $y \in U$:

$$\|f(y) - f_m(y)\| \leq \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_m(y)\| < \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{n}.$$

Es folgt $x \in D$ und die Behauptung (a) ist bewiesen.

(b) Wir müssen noch zeigen, daß die Menge $X \setminus D$ der Unstetigkeitspunkte von erster Kategorie in X ist. Für $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$F_m(\varepsilon) := \{x \in X; \forall k \in \mathbb{N} : \|f_m(x) - f_{m+k}(x)\| \leq \varepsilon\}.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen $x \mapsto \|f_m(x) - f_{m+k}(x)\|$ ist $F_m(\varepsilon)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X . Da $f_{m+k}(x) \rightarrow f(x)$ für $k \rightarrow \infty$, folgt

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon) \quad \text{und} \quad F_m(\varepsilon) \subseteq P_m(\varepsilon) \quad \text{also auch} \quad \text{int}(F_m(\varepsilon)) \subseteq \text{int}(P_m(\varepsilon))$$

und damit

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{int}(F_m(\varepsilon)) \subseteq G(\varepsilon).$$

Da $F_m(\varepsilon)$ abgeschlossen ist, ist die Menge $F_m(\varepsilon) \setminus \text{int}(F_m(\varepsilon)) = \partial F_m(\varepsilon)$ nirgends dicht in X . Nach Lemma 5.2 ist daher die folgende Menge von erster Kategorie in X :

$$X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{int}(F_m(\varepsilon)) = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon) \right) \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{int}(F_m(\varepsilon)) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (F_m(\varepsilon) \setminus \text{int}(F_m(\varepsilon))).$$

Wegen

$$X \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus G\left(\frac{1}{n}\right) \right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{int}\left(F_m\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right)$$

ist (wieder mit Lemma 5.2) die Menge $X \setminus D$ der Unstetigkeitspunkte von f mager in X . $\square$

Man fragt sich nun natürlich: Wie „groß“ können „magere“ Mengen in vollständigen metrischen Räumen sein? Der folgende Satz von Baire zeigt, daß die Bezeichnung „mager“ für Mengen von erster Kategorie tatsächlich berechtigt ist.

5.5. KATEGORIENSATZ VON BAIRE. *Sei X ein nicht leerer*

(i) *vollständiger metrischer Raum*

oder

(ii) *lokalkompakter topologischer Hausdorffraum.*

Dann gilt:

- (a) *Abzählbare Durchschnitte von dichten offenen Teilmengen von X sind wieder dicht in X .*
- (b) *X ist von zweiter Kategorie in sich.*

BEWEIS. (a) Sei also $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge von dichten, offenen Teilmengen von X . Zum Beweis der Dichtheit von $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ in X genügt es zu zeigen, daß alle nicht leeren offenen Teilmengen von X nicht leeren Durchschnitt mit G haben. Sei also $U \subseteq X$ offen und nicht leer. Wir konstruieren induktiv eine Folge $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ von nicht leeren, offenen Teilmengen von X mit der Eigenschaft, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ im Fall (i) gilt:

$$(E(i,n)) \quad \overline{U_{j+1}} \subseteq G_{j+1} \cap U_j \text{ für } 0 \leq j < n \text{ und } \text{diam}(\overline{U_j}) \leq \frac{1}{j} \text{ für } 1 \leq j \leq n$$

beziehungsweise im Fall (ii):

$$(E(ii,n)) \quad \overline{U_{j+1}} \subseteq G_{j+1} \cap U_j \text{ für } 0 \leq j < n \text{ und } \overline{U_j} \text{ ist kompakt für } 1 \leq j \leq n.$$

Für $n = 0$ sind mit $U_0 := U$ die gestellten Forderungen erfüllt. Seien nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ nicht leere offene Mengen $U_0, \dots, U_n \subseteq X$ so konstruiert, daß die Forderungen aus (E(i,n)) bzw. (E(ii,n)) erfüllt sind. Da G_{n+1} in X dicht ist gibt es einen Punkt $x_n \in U_n \cap G_{n+1}$.

Im Fall (i) gibt es, da $U_n \cap G_{n+1}$ offen ist, ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_n) \subseteq U_n \cap G_{n+1}$. Wir setzen nun $U_{n+1} := U_\delta(x_n)$ mit $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2(n+1)}\}$. Dann folgt

$$\overline{U_{n+1}} \subseteq \{x \in X; d(x, x_n) \leq \delta\} \subseteq U_\varepsilon(x_n) \subseteq U_n \cap G_{n+1}$$

und

$$\text{diam}(\overline{U_{n+1}}) = \sup_{x,y \in \overline{U_{n+1}}} d(x,y) \leq \sup_{x,y \in \overline{U_{n+1}}} (d(x, x_n) + d(x_n, y)) \leq 2\delta \leq \frac{1}{n+1}.$$

Also sind die in (E(i,n+1)) gestellten Forderungen erfüllt.

Im Fall (ii) gehen wir wie folgt vor: Da X lokalkompakt ist und $U_n \cap G_{n+1}$ eine Umgebung von x_n ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von x_n mit $K \subseteq U_n \cap G_{n+1}$. $U_{n+1} := \text{int}(K)$ ist dann offen und nicht leer. Damit gilt nun auch (E(ii,n+1)).

In beiden Fällen setzen wir nun $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$. Dann ist $A \neq \emptyset$. Im Fall (i) folgt dies aus dem Cantorschen Durchschnittssatz und in Fall (ii) wegen der Kompaktheit von

$\overline{U_n}$ aus der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen (Folgerung 4.6). Nach Konstruktion gilt:

$$\emptyset \neq A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap U) = G \cap U.$$

Damit ist (a) bewiesen.

(b) Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von nirgends dichten Teilmengen von X . Dann ist $X \setminus \overline{A_n}$ offen und dicht in X für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (a) ist dann aber auch die Menge

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_n}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

dicht in X . Wegen $X \neq \emptyset$ muß dann $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ gelten. Also ist X von zweiter Kategorie in sich. $\square$

5.6. FOLGERUNG. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist von zweiter Kategorie in $\mathbb{R}$.

BEWEIS. Wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von erster Kategorie in $\mathbb{R}$, so wäre auch $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ nach Lemma 5.2 mager in $\mathbb{R}$, was im Widerspruch zu dem Kategoriensatz von Baire stünde. $\square$

5.7. FOLGERUNG. Ist $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum oder ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist X ein Baire-Raum.

BEWEIS. Sei G eine beliebige nicht leere offene Teilmenge von X .

(a) Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist auch G versehen mit der Relativtopologie von X wieder ein lokalkompakter Hausdorffraum und daher nach 5.5 von zweiter Kategorie in sich, also auch von zweiter Kategorie in X . (Man beachte, daß jede in X nirgends dichte Teilmenge von G auch bezüglich der Relativtopologie nirgends dicht in G ist).

(b) Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist auch $\overline{G}$ versehen mit der von d induzierten Metrik $\delta := d|_{\overline{G} \times \overline{G}}$ ein vollständiger metrischer Raum und daher nach 5.5 von zweiter Kategorie in sich.

Annahme: G ist von erster Kategorie in X also

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{mit} \quad \text{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da der Abschluß von A_n in (X, d) und $(\overline{G}, \delta)$ übereinstimmt, ist auch das Innere von $\overline{A_n}$ in $(\overline{G}, \delta)$ leer. Nun ist auch ∂G eine abgeschlossene Teilmenge von $(\overline{G}, \delta)$. Wegen $\overline{G} = \partial G \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ ergibt dies einen Widerspruch zu der Tatsache, daß $\overline{G}$ von zweiter Kategorie in $(\overline{G}, \delta)$ ist. $\square$

5.8. FOLGERUNG. In der Situation von Satz 5.4 sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist die Menge der Stetigkeitspunkte von f nicht leer und von zweiter Kategorie in (X, d) .

5.9. BEISPIEL. Die Funktion $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

kann nach Folgerung 5.8 nicht punktwiser Limes einer Folge von auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen sein, da die Menge der Stetigkeitspunkte von h leer ist.

Wir werden den Baireschen Kategoriensatz häufig in der folgenden Form anwenden:

5.10. FOLGERUNG. Sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum oder ein lokalkompakter Hausdorffraum. Ist $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\text{int}(A_n) \neq \emptyset$.

Übungsaufgaben zu Kapitel 5.

5.1. AUFGABE. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und F ein Untervektorraum von E mit $\text{int}(F) \neq \emptyset$. Dann ist schon $F = E$.

5.2. AUFGABE. Zeigen Sie

- (a) Sei E ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} E = \aleph_0$, d.h. es gibt eine abzählbar unendliche, linear unabhängige Teilmenge $B = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ von E mit $E = \text{LH}(B)$. Dann gibt es keine Norm auf E bezüglich der E vollständig ist. Insbesondere ist also jeder unendlich dimensionale Banachraum schon überabzählbar unendlich dimensional.
- (b) Auf dem Raum $\mathbb{K}[X]$ aller Polynome gibt es keine Norm, bezüglich der $\mathbb{K}[X]$ vollständig ist.

5.3. AUFGABE. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger komplexwertiger Funktionen auf einem vollständigen metrischen Raum X , so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in X$.

- (a) Zeigen Sie, daß eine nichtleere offene Teilmenge V in X und ein $0 < M < \infty$ existieren, so daß $\sup\{|f_n(x)| : x \in V, n \in \mathbb{N}\} < M$ ist.
- (b) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, daß eine nichtleere offene Teilmenge V in X und eine natürliche Zahl N existieren, so daß $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ ist für alle $x \in V$ und $n \geq N$.

Hinweis: Betrachte für $N \in \mathbb{N}$ die Mengen $A_N := \{x \in X, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \text{ für } m, n \geq N\}$.

5.4. AUFGABE. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *isoliert*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$. Zeigen Sie:

- (a) Hat (X, d) keine isolierten Punkte, so ist X überabzählbar.
- (b) Ist X abzählbar, so liegt die Menge der isolierten Punkte dicht in (X, d) .

5.5. AUFGABE. Sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige Funktion. Ist I ein nicht zu einem Punkt ausgeartetes Intervall, so heißt

$$\omega_f(I) := \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$$

die *Oszillation von f auf I* . Zeigen Sie:

- (a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f((x - \delta, x + \delta))$$

in $[0, \infty]$; er heißt die *Oszillation von f in x* .

- (b) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen für alle $\varepsilon > 0$.
- (c) Die Menge

$$\bigcup_{n=1}^\infty \{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

ist die Menge aller Unstetigkeitspunkte von f .

- (d) Die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist genau dann von erster Kategorie in $\mathbb{R}$, wenn es eine dichte Menge gibt, in deren Punkten f stetig ist.

5.6. AUFGABE. Zeigen Sie: Es gibt stetige Funktionen auf $[0, 1]$, die an keiner Stelle differenzierbar sind.

Hinweis: Betrachte $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ mit

$$E_n := \left\{ f \in C[0, 1]; \sup_{0 < |h| \leq 1} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n \quad \forall t \in [0, 1] \right\}.$$

Trennungseigenschaften

Die Menge $C((X, \tau), \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum (X, τ) mit Werten in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist, wie man leicht nachrechnet bezüglich der punktweise definierten Operationen der Addition, der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren eine $\mathbb{K}$ -Algebra. Die konstante Funktion $1 : x \mapsto 1$ ist offensichtlich stetig auf X und ist das neutrale Element der Multiplikation in $C((X, \tau), \mathbb{K})$. Die Frage stellt sich, ob es außer den konstanten Vielfachen von 1 weitere stetige Funktionen auf X geben muß. Daß dies nicht immer der Fall ist, zeigt das folgende

6.1. BEISPIEL. Sei X eine nicht leere Menge und sei $\tau = \{X, \emptyset\}$ die indiskrete Topologie auf X . Dann gilt $C((X, \tau), \mathbb{K}) = \{\lambda \cdot 1; \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Ist nämlich $x_0 \in X$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig, so ist $V := f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ nicht leer (wegen $x_0 \in V$) und offen, muß also mit X übereinstimmen. Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in X$ gilt also $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Dies ist nur möglich, wenn $f \equiv f(x_0)$ auf X gilt. $\square$

Bevor wir nun Klasse von topologischen Räumen einführen, in denen wir eine Reichthaltigkeitsaussage für die stetigen Funktionen zeigen können, soll rasch die Liste der Trennungseigenschaften vervollständigt werden:

6.2. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt

- T_0 -Raum oder *Kolmogorovraum*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine offene Menge $U \subset X$ gibt mit $x \in U, y \notin U$ oder $y \in U, x \notin U$.
- T_1 -Raum, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Menge $U, V \subset X$ gibt mit $x \in U, y \notin U$ und $y \in V, x \notin V$.
- T_2 -Raum oder *Hausdorffraum*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Menge $U, V \subset X$ gibt mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.
- T_3 -Raum, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem $x \in X \setminus A$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $x \in U, A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.
- T_{3a} -Raum, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$.
- T_4 -Raum falls es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Mengen $U, V \subset X$ gibt mit $A \subseteq U, B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

6.3. DEFINITION. Ein T_1 -Raum (X, τ) heißt

- *regulär*, falls er auch ein T_3 -Raum ist.
- *vollständig regulär*, falls er auch ein T_{3a} -Raum ist.
- *normal*, falls er auch ein T_4 -Raum ist.

Da in einem T_1 -Raum jede einpunktige Teilmenge abgeschlossen ist (vergl. Aufgabe 6.1), ist jeder reguläre topologische Raum auch Hausdorffsch und jeder normale topologische Raum auch regulär und somit ebenfalls ein Hausdorffraum.

6.4. BEMERKUNGEN. (a) Jeder T_{3a} -Raum ist auch ein T_3 -Raum. Insbesondere ist also jeder vollständig reguläre topologische Raum auch regulär und somit ein Hausdorffraum.

(b) Für alle $j \in \{0, 1, 2, 3, 3a\}$ gilt: Jeder topologische Unterraum eines T_j -Raums ist wieder ein T_j -Raum.

(c) Jeder Teilraum eines regulären bzw. vollständig regulären topologischen Raums ist wieder regulär bzw. vollständig regulär.

(d) Abgeschlossene topologische Unterräume eines T_4 -Raums bzw. normalen topologischen Raums (X, τ) sind wieder T_4 -Räume bzw. normal.

BEWEIS. (a) Sei (X, τ) ein T_{3a} -Raum und sei $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Nach Definition des T_{3a} -Raumes gibt es dann eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$. Wegen der Stetigkeit von f sind die Mengen $U := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ und $V := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ offen mit $U \cap V = \emptyset$ und es gilt $x \in U$ sowie $A \subseteq V$.

(b) rechnet man nach und (c) folgt unmittelbar aus (b).

(d) Dies rechnet man unmittelbar nach unter Beachtung der Tatsache, daß abgeschlossene Teilmengen eines abgeschlossenen Unterraums von (X, τ) auch in (X, τ) abgeschlossen sind. $\square$

6.5. BEISPIELE. (a) Jeder metrische Raum (X, d) ist normal.

(b) Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal.

BEWEIS. (a) Seien A, B zwei beliebige disjunkte, abgeschlossene Teilmengen des metrischen Raums (X, d) . Ist eine der beiden Mengen leer, etwa $A = \emptyset$, so ist $U := \emptyset$ offene Obermenge von A und $V := X$ offene Obermenge von B mit $U \cap V = \emptyset$. Seien nun $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Die durch

$$f(x) := \text{dist}(x, A) - \text{dist}(x, B) \quad (x \in X)$$

definierte Funktion ist stetig. Daher sind die Mengen

$$U := \{x; f(x) < 0\} = f^{-1}((-\infty, 0)) \quad \text{und} \quad V := \{x \in X; f(x) > 0\} = f^{-1}((0, \infty))$$

disjunkt und offen mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Also ist (X, d) normal.

(b) Seien A, B zwei beliebige abgeschlossene o.B.d.A. nicht leere Teilmengen (andernfalls geht man wie im ersten Teil des Beweises zu (a) vor) des kompakten Hausdorffraums (X, τ) . Dann sind A, B nach Folgerung 4.4 kompakt in (X, d) . Nach Satz 4.3 gibt es also zu jedem $b \in B$ offene Mengen U_b, V_b mit $U_b \cap V_b = \emptyset$, $A \subseteq U_b$ und $b \in V_b$. Aus der offenen Überdeckung $(V_b)_{b \in B}$ von B können wir wegen der Kompaktheit von B eine endliche Teilüberdeckung $V_{b_1}, \dots, V_{b_n}$ auswählen. Mit

$$V := \bigcup_{j=1}^n V_{b_j} \quad \text{und} \quad U := \bigcap_{j=1}^n U_{b_j}$$

gilt dann: U, V sind offen mit $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Also ist (X, τ) normal. $\square$

6.6. LEMMA. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen topologischen Raums (X, τ) und sei $U \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$. Dann gibt es eine offene Teilmenge V von X mit $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

BEWEIS. Da A und $X \setminus U$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X sind und (X, τ) normal ist, gibt es disjunkte offene Mengen $V, W \subseteq X$ mit $A \subseteq V$ und $X \setminus U \subseteq W$. Es folgt $A \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Da $X \setminus W$ als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist, folgt $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$. $\square$

6.7. SATZ (Lemma von Urysohn). Seien A, B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen eines normalen topologischen Raums (X, τ) . Dann gilt:

- (a) Es gibt eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(X) \subseteq [0, 1]$, $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.
 (b) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig mit $a \leq b$, so gibt es eine stetige Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(X) \subseteq [a, b]$, $g|_A \equiv a$ und $g|_B \equiv b$.

BEWEIS. (a) Da $X \setminus B$ eine offene Obermenge von A ist, gibt es nach Lemma 6.6 eine offene Menge $V_{\frac{1}{2}} \subseteq X$ mit $A \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq X \setminus B$. Durch nochmaliges Anwenden von Lemma 6.6 (auf $A \subseteq V_{\frac{1}{2}}$ und $\overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq X \setminus B$) finden wir offene Mengen $V_{\frac{1}{4}}$ und $V_{\frac{3}{4}}$ mit

$$A \subseteq V_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{V_{\frac{1}{4}}} \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq V_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{V_{\frac{3}{4}}} \subseteq X \setminus B$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten durch vollständige Induktion wir für alle dyadischen Brüche $r \in \mathbb{B} := \{\frac{m}{2^n}; n, m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 2^n - 1\} \subset (0, 1)$ offene Mengen V_r in (X, τ) , so daß für alle $r, s \in \mathbb{B}$ mit $r < s$ gilt

$$A \subseteq V_r \subseteq \overline{V_r} \subseteq V_s \subseteq \overline{V_s} \subseteq X \setminus B.$$

Wir definieren nun eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \sup\{s \in \mathbb{B}; x \notin V_s\} & x \notin \bigcap_{r \in \mathbb{B}} V_r, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (x \in X).$$

Für diese Funktion gilt offensichtlich $f(X) \subseteq [0, 1]$, $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$. Zu zeigen ist also noch die Stetigkeit von f . Seien $u, v \in [0, 1]$ beliebig mit $0 < v < u < 1$. Nach Definition von f für $x \in X$: $f(x) < u$ genau dann, wenn ein $r < u$ in $\mathbb{B}$ existiert mit $x \in V_r$. Es folgt

$$f^{-1}([0, u)) = \bigcup_{r < u, r \in \mathbb{B}} V_r.$$

Insbesondere ist $f^{-1}([0, u))$ offen in (X, τ) . Für $x \in X$ gilt $f(x) > v$ genau dann, wenn es ein $v < r \in \mathbb{B}$ gibt mit $x \notin V_r$. Da es zu jedem $r > v$ ein $t \in \mathbb{B}$ mit $v < t < r$ und $\overline{V_t} \subseteq V_r$ gilt, ist dies also dazu äquivalent, daß es ein $v < t \in \mathbb{B}$ gibt mit $x \notin \overline{V_t}$. Damit ist gezeigt

$$f^{-1}((v, 1]) = \bigcup_{v < t \in \mathbb{B}} (X \setminus \overline{V_t}).$$

Also ist auch $f^{-1}((v, 1])$ offen und somit auch $f^{-1}((v, u)) = f^{-1}((v, 1]) \cap f^{-1}([0, u))$. Hieraus folgt die Stetigkeit von f .

(b) Dies folgt unmittelbar mit

$$g(x) := (b - a)f(x) + a \quad (x \in X),$$

wobei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Funktion aus (a) sei. □

6.8. FOLGERUNG. Für einen topologischen Raum (X, τ) sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) (X, τ) ist ein kompakter Hausdorffraum.
 (b) Es gibt eine Menge M , so daß (X, τ) homöomorph zu einem abgeschlossenen topologischen Unterraum des topologischen Produkts $[0, 1]^M$ ist.

BEWEIS. Ist (a) erfüllt, so bilden wir die Menge $M := \{f \in C(X, \mathbb{R}); f(X) \subseteq [0, 1]\}$ und betrachten die Abbildung

$$\iota : X \rightarrow [0, 1]^M \quad x \mapsto \iota(x) := (f(x))_{f \in M}.$$

Nach Definition der Produkttopologie und Satz 3.7 ist ι stetig und ist $\iota(X)$ nach Satz 4.7 kompakt. Nach dem Urysohnschen Lemma ist ι injektiv, also bijektiv als Abbildung von X auf $\iota(X)$. Nach Satz 4.9 ist also ι eine Homöomorphie von (X, τ) auf $\iota(X)$ (versehen mit der Unterraumtopologie zur Produkttopologie).

Sei nun (b) erfüllt. Nach dem Satz von Tychonoff ist $[0, 1]^M$ ein kompakter Hausdorffraum. Da abgeschlossene topologische Unterräume von kompakten Hausdorffräumen wieder kompakte Hausdorffräume sind, folgt (a). $\square$

Da in normalen Räumen einpunktige Mengen abgeschlossen sind, folgt aus dem Urysohnschen Lemma unmittelbar:

6.9. FOLGERUNG. *Jeder normale topologische Raum ist vollständig regulär.*

Da nach dem Satz 4.23 von Alexandroff über die Einpunktkompaktifizierung jeder lokalkonvexe Hausdorffraum homöomorph zu einem topologischen Unterraum eines kompakten Hausdorffraums ist, folgt mit Bemerkung 6.4 (c) hieraus:

6.10. FOLGERUNG. *Jeder lokalkompakte Hausdorffraum ist vollständig regulär.*

Eine wichtige Anwendung des Urysohnschen Lemmas ist der folgende Fortsetzungssatz von Tietze.

6.11. SATZ (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen topologischen Raums (X, τ) und sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf A bezüglich der durch τ auf A induzierten Topologie mit $f(A) \subseteq [a, b]$. Dann gibt es eine stetige Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(X) \subseteq [a, b]$ und $f \equiv F|_A$.*

BEWEIS. Es genügt, den Beweis zunächst für den Fall $a = -1$ und $b = 1$ zu führen. Ist nämlich $a = b$, so ist f auf A konstant und daher konstant auf X fortsetzbar. Ist $a < b$, so ist die durch

$$\varphi(x) := \frac{2f(x) - a - b}{b - a} \quad (x \in A)$$

definierte Funktion φ stetig auf A mit Werten in $[-1, 1]$. Hat φ eine stetige Fortsetzung $\Phi : X \rightarrow [-1, 1]$, so ist $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := \frac{1}{2}((b-a)\Phi(x) + a + b)$, $x \in X$, eine stetige Fortsetzung von f auf ganz X mit $F(X) \subseteq [a, b]$.

Sei also nun $a = -1$ und $b = 1$. Mit $A_0 := f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}])$ und $B_0 := f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$ folgt wegen der Stetigkeit von f auf A : A_0 und B_0 sind abgeschlossen in A also auch in X (da A abgeschlossen in X ist) und $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es also eine stetige Funktion $g_0 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ mit $g|_{A_0} \equiv -\frac{1}{3}$ und $g|_{B_0} \equiv \frac{1}{3}$. Mit $f_1 := f - g_0|_A$ folgt $f_1(A) \subseteq [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ und f_1 ist auf A stetig. Seien nun schon für ein $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_1, \dots, f_n \in C(A, \mathbb{R})$ und $g_0, \dots, g_{n-1} \in C(X, \mathbb{R})$ konstruiert mit

$$\begin{aligned} \text{(i}_n\text{)} \quad f_n &= f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j|_A, \\ \text{(ii}_n\text{)} \quad f_n(A) &\subseteq \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \text{ und} \\ \text{(iii}_n\text{)} \quad g_{n-1}(X) &\subseteq \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

Dann gilt mit

$$A_n := f_n^{-1}\left(\left[-1, -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right) \quad \text{und} \quad B_n := f_n^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, 1\right]\right),$$

die Mengen A_n und B_n sind disjunkt und abgeschlossen (in A also auch) in X . Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es also eine Funktion $g_n \in C(X, \mathbb{R})$ mit

$$g_n(X) \subseteq \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right], \quad g|_{A_n} \equiv -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{und} \quad g|_{B_n} \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Mit $f_{n+1} := f_n - g_n|_A = f - \sum_{j=0}^n g_j|_A$ sieht man, daß dann die Bedingungen (i_{n+1}), (ii_{n+1}) und (iii_{n+1}) erfüllt sind. Damit ist die induktive Konstruktion beendet.

Es folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_X \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 < \infty.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ konvergiert also gleichmäßig auf X gegen eine stetige, beschränkte Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|F\|_X \leq 1$ also mit $F(X) \subseteq [-1, 1]$ (nach Aufgabe 6.3). Für alle $x \in A$ erhalten wir wegen $\|f_n\|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$:

$$|f(x) - F(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f - \sum_{j=0}^{n-1} g_j(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = 0.$$

Also ist F eine stetige Fortsetzung von f auf X mit $F(X) \subseteq [-1, 1]$. $\square$

Die normalen topologischen Räume sind unter den T_1 -Räumen durch die Urysohnsche Trennungseigenschaft und die Fortsetzungseigenschaft von Tietze charakterisiert:

6.12. SATZ. Für einen T_1 -Raum (X, τ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) (X, τ) ist normal.
- (b) Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ von X gibt es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(X) \subseteq [0, 1]$, $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.
- (c) Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ von X gibt es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.
- (d) Für jeden abgeschlossenen Unterraum A von X und jede auf A stetige Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(A) \subseteq [a, b]$ gibt es eine Funktion $F \in C(X, \mathbb{R})$ mit $F(X) \subseteq [a, b]$ und $F|_A \equiv f$.
- (e) Für jeden abgeschlossenen Unterraum A von X und jede auf A stetige Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $F \in C(X, \mathbb{R})$ mit $F|_A \equiv f$.

BEWEIS. (a) $\implies$ (b) ist das Urysohnsche Lemma, (a) $\implies$ (d) ist der Fortsetzungssatz von Tietze und (b) $\implies$ (c) ist offensichtlich.

(c) $\implies$ (a): Seien $A, B \subseteq X$ zwei beliebige disjunkte, abgeschlossene Mengen. und sei $f \in C(X, \mathbb{R})$ eine nach (c) existierende Funktion mit $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$. Dann sind die Mengen $U := f^{-1}\left((-\infty, \frac{1}{2})\right)$ und $V := f^{-1}\left((\frac{1}{2}, \infty)\right)$ disjunkt und offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Also ist (X, τ) normal.

(d) $\implies$ (e): Sei (d) erfüllt und sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige in der Unterraumtopologie stetige Funktion auf A . Dann ist $g := \arctan \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g(A) \subseteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, besitzt also nach Voraussetzung eine Fortsetzung $G \in C(X, \mathbb{R})$ mit $G(X) \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Da der mögliche Wertebereich dieser Fortsetzung noch nicht im Definitionsbereich der Tangensfunktion enthalten ist, müssen wir nochmals (d) anwenden, um zum Ziel zu kommen: Die Menge $G^{-1}\left(\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\right)$ ist wegen der Stetigkeit von G abgeschlossen in X und disjunkt zu A . Also ist auch $B := A \cup G^{-1}\left(\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\right)$ abgeschlossen in (X, τ) und die Mengen A und $G^{-1}\left(\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\right)$ sind in B versehen mit der von τ induzierten Topologie sowohl offen als auch abgeschlossen. Die Funktion $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in G^{-1}\left(\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\right), \\ 1 & \text{für } x \in A, \end{cases} \quad (x \in B)$$

ist daher stetig und besitzt nach Voraussetzung (d) eine Fortsetzung $H \in C(X, \mathbb{R})$ mit $H(X) \subseteq [0, 1]$. Die Funktion $HG : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist nun eine stetige Fortsetzung von g auf X mit $(HG)(X) \subseteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Somit ist $F := \tan \circ (HG) \in C(X, \mathbb{R})$ eine stetige Fortsetzung von f auf ganz X .

(e) $\implies$ (c): Sei nun (e) erfüllt und seien $A, B \subseteq X$ zwei beliebige disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X . Dann ist $C := A \cup B$ ebenfalls abgeschlossen in (X, τ) und A, B sind sowohl offen als auch abgeschlossen in dem mit der Relativtopologie von τ versehenen abgeschlossenen Unterraum C . Daher ist die durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in A, \\ 1 & \text{für } x \in B, \end{cases} \quad (x \in C)$$

definierte Funktion auf C stetig und besitzt nach Voraussetzung eine Fortsetzung $F \in C(X, \mathbb{R})$ auf ganz X . Wegen $F|_A \equiv 0$ und $F|_B \equiv 1$ ist die Bedingung in (c) erfüllt. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 6.

6.1. AUFGABE. Zeigen Sie, daß für einen topologischen Raum (X, τ) die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) (X, τ) ist ein T_1 -Raum.
- (b) Für alle $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.
- (c) Jede Teilmenge A von X ist der Durchschnitt aller ihrer Umgebungen.

6.2. AUFGABE. Führen Sie die Beweise zu Bemerkung 6.4 (b) aus.

6.3. AUFGABE. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei

$$C_b(X, E) := \{f \in C(X, E); \|f\|_X := \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty\}$$

der $\mathbb{K}$ -Vektorraum der beschränkten, auf (X, τ) stetigen E -wertigen Funktionen. Zeigen Sie, daß $(C_b(X, E), \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum ist.

6.4. AUFGABE. Sei (X, τ) ein vollständig regulärer Raum und seien $A \subset X$ abgeschlossen und $K \subset X$ kompakt mit $A \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $f \in C(X, [0, 1])$ mit $f \equiv 0$ auf A und $f \equiv 1$ auf K .

6.5. AUFGABE. Zeigen Sie, daß ein T_1 -Raum, der eine Basis aus sowohl offenen als auch abgeschlossenen Mengen besitzt, vollständig regulär ist.

Ein topologischer Raum heißt

- *Lindelöfraum*, falls jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.
- *σ -kompakt*, falls X abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen von X ist.

6.6. AUFGABE. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sein $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie τ . Zeigen Sie:

- (a) Ist (X, τ) σ -kompakt, so ist (X, τ) ein Lindelöfraum.
- (b) Genau dann ist (X, τ) ein Lindelöfraum, wenn jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{B}$ eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.
- (c) Jeder abgeschlossene Unterraum eines Lindelöfraums ist wieder ein Lindelöfraum.

6.7. AUFGABE. Sei (X, τ) ein vollständig regulärer Lindelöfraum und seien A, B zwei beliebige abgeschlossene, disjunkte Teilmengen von X . Zeigen Sie:

- (a) Zu je zwei Punkten $a \in A, b \in B$ gibt es offene Umgebungen U_a von a und V_b von b mit $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ und $\overline{V_b} \cap A = \emptyset$.
- (b) Es gibt Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ in A und $(b_n)_{n=1}^\infty$ in B mit $A \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty U_{a_n}$ und $B \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty V_{b_n}$.
- (c) Die Mengen

$$U := \bigcup_{n=1}^\infty \left(U_{a_n} \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{V_{b_k}} \right) \quad \text{und} \quad V := \bigcup_{n=1}^\infty \left(V_{b_n} \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{U_{a_k}} \right)$$

sind offen und disjunkt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. (X, τ) ist also normal.

KAPITEL 7

Der Satz von Stone und Weierstraß

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und seien $f, g \in C(X, \mathbb{R})$. Dann sind die durch

$$(7.1) \quad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) \quad (x \in X)$$

und

$$(7.2) \quad (f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) \quad (x \in X)$$

definierten Funktionen $f \wedge g, f \vee g : X \rightarrow \mathbb{R}$ wieder stetige reellwertige Funktionen.

Wir sagen: Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von $C(X, \mathbb{K})$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) *trennt die Punkte von X* , falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ gibt mit $f(x) \neq f(y)$.

Bevor wir zum eigentlichen Satz von Stone und Weierstraß kommen beweisen wir zunächst die verbandstheoretische Version dieses Satzes:

7.1. SATZ (Satz von Kakutani und Krein). *Sei (K, τ) ein kompakter Hausdorffraum und sei $\mathcal{A}$ ein Untervektorraum von $C(K, \mathbb{R})$ mit*

- (a) $1 \in \mathcal{A}$.
- (b) $\forall f, g \in \mathcal{A} : f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{A}$.
- (c) $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von K .

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in dem Banachraum $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_K)$.

BEWEIS. Seien $h \in C(K, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, daß es eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ gibt mit $\|h - f\|_K < \varepsilon$.

(i) Wir zeigen zunächst, daß es zu je zwei verschiedenen Punkten $s, t \in K$ eine Funktion $f_{s,t} \in \mathcal{A}$ gibt, die h in den Punkten t und s interpoliert. Da $\mathcal{A}$ die Punkte von K trennt gibt es eine Funktion $d \in \mathcal{A}$ mit $d(t) \neq d(s)$. Die durch

$$f_{s,t}(x) := \frac{h(t) - h(s)}{d(t) - d(s)} d(x) + \frac{h(s)d(t) - h(t)d(s)}{d(t) - d(s)} \quad (x \in K)$$

definierte Funktion $f_{s,t} : K \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt in der Tat $f_{s,t} \in \mathcal{A}$ sowie $f_{s,t}(t) = h(t)$ und $f_{s,t}(s) = h(s)$. Wir definieren noch $f_{t,t} \in \mathcal{A}$ durch $f_{t,t}(x) := h(t)$ für alle $x \in K$.

(ii) Wir zeigen nun, daß es für alle $t \in K$ eine Funktion $g_t \in \mathcal{A}$ gibt mit

$$(7.3) \quad g_t(t) = h(t) \quad \text{und} \quad g_t(x) > h(x) - \varepsilon \quad \text{für alle } x \in K.$$

Sei also $t \in K$ beliebig. Für alle $s \in K$ gibt es wegen der Stetigkeit von $f_{s,t}$ eine offene Umgebung U_s von s , so daß

$$(7.4) \quad f_{s,t}(x) > h(x) - \varepsilon \quad \text{für alle } x \in U_s.$$

Aus der offenen Überdeckung $(U_s)_{s \in K}$ von K können wir wegen der Kompaktheit von (K, τ) eine endliche Teilüberdeckung $U_{s_1}, \dots, U_{s_k}$ auswählen. Wegen (b) ist dann $g_t := f_{s_1,t} \vee \dots \vee f_{s_k,t}$ eine Funktion aus $\mathcal{A}$ mit

$$g_t(t) = \max_{1 \leq j \leq k} f_{s_j,t}(t) = h(t).$$

Ist nun $x \in K$ beliebig, so ist $x \in U_{s_{j_0}}$ für ein $j_0 \in \{1, \dots, k\}$ und daher nach (7.4)

$$g_t(x) = \max_{1 \leq j \leq k} f_{s_j, t}(x) \geq f_{s_{j_0}}(x) > h(x) - \varepsilon.$$

Die Funktion g_t erfüllt also (7.3).

(iii) Wir zeigen nun die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $\|f - h\|_K < \varepsilon$.

Für alle $t \in K$ gibt es wegen der Stetigkeit von g_t eine offene Umgebung V_t von t mit

$$(7.5) \quad g_t(x) < h(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in V_t.$$

Aus der offenen Überdeckung $(V_t)_{t \in K}$ können wir wieder wegen der Kompaktheit von (K, τ) eine endliche Teilüberdeckung $V_{t_1}, \dots, V_{t_n}$ auswählen. Wegen $g_{t_1}, \dots, g_{t_n} \in \mathcal{A}$ ist dann nach (b) auch $f := g_{t_1} \wedge \dots \wedge g_{t_n} \in \mathcal{A}$. Wegen (7.3) ist dann

$$(7.6) \quad f(x) = \min_{1 \leq j \leq n} g_{t_j}(x) > h(x) - \varepsilon.$$

Ist nun $x \in K$ beliebig, so folgt $x \in V_{t_{j_1}}$ für ein $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ und daher

$$f(x) = \min_{1 \leq j \leq n} g_{t_j}(x) \leq g_{t_{j_1}}(x) < h(x) + \varepsilon.$$

Zusammen mit (7.6) ergibt dies $\|f - h\|_K = \max_{x \in K} |f(x) - h(x)| < \varepsilon$. $\square$

Wir zeigen nun die Fassung des Satzes von Stone und Weierstraß für reellwertige Funktionen:

7.2. SATZ (Satz von Stone und Weierstraß, reelle Fassung). *Sei (K, τ) ein kompakter Hausdorffraum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C(K, \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (a) $1 \in \mathcal{A}$.
- (b) $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von K .

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_K)$.

BEWEIS. Wir zeigen, daß die Abschließung $\overline{\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen des Satzes von Kakutani und Krein erfüllt. Mit $\mathcal{A}$ ist auch $\overline{\mathcal{A}}$ eine Unteralgebra von $C(K, \mathbb{R})$. Da $1 \in \mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ und da schon $\mathcal{A}$ die Punkte von K trennt, ist nur zu zeigen, daß die Bedingung (b) in Satz 7.1 für $\overline{\mathcal{A}}$ erfüllt ist. Da $\overline{\mathcal{A}}$ auch ein Untervektorraum ist, genügt es wegen (7.1) und (7.2) hierzu zu zeigen, daß für alle $f \in \overline{\mathcal{A}}$ auch die Funktion $|f| : x \mapsto |f(x)|$ wieder in $\overline{\mathcal{A}}$ ist. Wegen $f^2 \in \overline{\mathcal{A}}$ und $|f(x)| = \sqrt{f(x)^2}$ für alle $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $x \in K$, reicht es aus zu zeigen, daß für alle $0 \leq g \in \overline{\mathcal{A}}$ auch $\sqrt{g} : x \mapsto \sqrt{g(x)}$ in $\overline{\mathcal{A}}$ liegt. Sei also $0 \leq g \in \overline{\mathcal{A}}$ beliebig. Da g stetig ist, existiert ein $c > 0$ mit $0 \leq cg \leq 1$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem klassischen Approximationssatz von Weierstraß (Satz 12.3 in [1]) gibt es ein Polynom p mit $\|\sqrt{t} - p(t)\|_{[0,1]} < \varepsilon\sqrt{c}$. Da p ein Polynom und $\overline{\mathcal{A}}$ eine Algebra ist folgt $\sqrt{c^{-1}} \cdot (p \circ (cg)) \in \overline{\mathcal{A}}$. Also gilt

$$\|\sqrt{g} - \sqrt{c^{-1}}p \circ g\|_K = \max_{x \in K} \left| \sqrt{c^{-1}} \left(\sqrt{cg(x)} - p(cg(x)) \right) \right| < \sqrt{c^{-1}} \cdot \varepsilon\sqrt{c} = \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß $\sqrt{g} \in \overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$ liegt. $\square$

7.3. SATZ (Satz von Stone und Weierstraß, komplexe Fassung). *Sei (K, τ) ein kompakter Hausdorffraum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C(K, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (a) $1 \in \mathcal{A}$.
- (b) $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von K .
- (c) Für alle $f \in \mathcal{A}$ liegt auch die konjugiert komplexe Funktion $x \mapsto \overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ in $\mathcal{A}$.

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $(C(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_K)$.

BEWEIS. Ist $f \in \mathcal{A}$, so folgt wegen (c) für die Funktionen $\operatorname{Re}(f) : x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ und $\operatorname{Im}(f) : x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$:

$$\operatorname{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in \mathcal{A}, \quad \operatorname{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in \mathcal{A}.$$

Da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung die Punkte von K trennt, gibt es zu beliebig vorgegebenen Punkten $a, b \in K$ mit $a \neq b$ eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(a) \neq f(b)$ und daher $\operatorname{Re}(f(a)) \neq \operatorname{Re}(f(b))$ oder $\operatorname{Im}(f(a)) \neq \operatorname{Im}(f(b))$. Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \{g \in \mathcal{A}; g(K) \subset \mathbb{R}\}$ die Punkte von K trennt. Da $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ eine die konstante Funktion 1 enthaltende Unteralgebra von $C(K, \mathbb{R})$ ist, liegt $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ nach der reellen Fassung des Satzes von Stone–Weierstraß dicht in $C(K, \mathbb{R})$. Ist nun $f \in C(K, \mathbb{C})$ so sind $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ und es gibt zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ Funktionen $g_1, g_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ mit

$$\|\operatorname{Re}(f) - g_1\|_K < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \|\operatorname{Im}(f) - g_2\|_K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt $g := g_1 + ig_2 \in \mathcal{A}$ und

$$\|f - g\|_K = \|\operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f) - g_1 - ig_2\|_K \leq \|\operatorname{Re}(f) - g_1\|_K + \|\operatorname{Im}(f) - g_2\|_K < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C(K, \mathbb{C})$. $\square$

7.4. FOLGERUNG. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $f : K \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetige Funktion ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dann gibt es eine Folge von Polynomen in n Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, die gleichmäßig auf K gegen f konvergiert.

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar durch Anwendung der reellen bzw. komplexen Fassung des Satzes von Stone–Weierstraß auf die Algebra aller Polynome in n Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{K}$. $\square$

Sei nun (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum. Eine auf (X, τ) stetige $\mathbb{K}$ -wertige Funktion ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt *verschwindend im Unendlichen*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ gibt, so daß $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Die Menge aller im Unendlichen verschwinden, $\mathbb{K}$ -wertigen, auf (X, τ) stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $C_0(X, \mathbb{K})$. Versehen mit der Supremumsnorm ist $C_0(X, \mathbb{K})$ eine normierte Algebra, die aber nicht notwendig die konstanten Funktionen enthält. Unser Ziel ist eine Version des Satzes von Stone–Weierstraß für $C_0(X, \mathbb{K})$.

7.5. BEISPIELE. (a) Ist (X, τ) kompakt, so gilt speziell $C(X, \mathbb{K}) = C_0(X, \mathbb{K})$.

(b) Für eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ gilt, $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Im folgenden Lemma wird gezeigt, daß wir die Funktionen aus $C_0(X, \tau)$ identifizieren können mit den Einschränkungen auf X der im Punkt ∞ verschwindenden stetigen Funktionen auf der Einpunktkompaktifizierung von (X, τ) .

7.6. LEMMA. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei (X_∞, τ_∞) seine Einpunktkompaktifizierung. Dann gilt: $C_0(X, \mathbb{K}) = \{f|_X; f \in C(X_\infty, \mathbb{K}), f(\infty) = 0\}$. Durch $f \mapsto f_\infty$ mit $f_\infty(x) := f(x)$ für $x \in X$ und $f_\infty(\infty) := 0$ ist ein isometrischer Algebrenisomorphismus von $C_0(X, \mathbb{K})$ auf die abgeschlossene und damit vollständige Unteralgebra

$$\{F \in C(X_\infty, \mathbb{K}); F(\infty) = 0\}$$

von $(C(X_\infty, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{X_\infty})$ gegeben. Insbesondere ist $(C_0(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_X)$ eine Banachalgebra.

BEWEIS. Ist $f \in C(X_\infty, \mathbb{K})$ mit $f(\infty) = 0$, so ist wegen der Stetigkeit von f die Menge $V := f^{-1}(U_\varepsilon(0))$ offen in (X_∞, τ_∞) mit $\infty \in V$. Nach Definition von τ_∞ ist $K := X \setminus V$ dann kompakt in (X, τ) . Somit gilt für alle $x \in X \setminus K$: $f(x) < \varepsilon$. Also ist $f|_X \in C_0(X, \mathbb{K})$.

Ist umgekehrt $f \in C_0(X, \mathbb{K})$, so definieren wir $f_\infty : X_\infty \rightarrow \mathbb{K}$ durch $f_\infty(x) := f(x)$ für $x \in X$ und $f_\infty(\infty) = 0$. f_∞ ist stetig in allen Punkten der offenen Teilmenge X von (X_∞, τ_I) , da f auf (X, τ) stetig ist. Zu zeigen ist noch die Stetigkeit von f_∞ in ∞ . Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es eine kompakte Menge K in (X, τ) mit $|f_\infty(x)| = |f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Also gilt $|f_\infty(x) - f_\infty(\infty)| = |f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X_\infty \setminus K$. Da K nach Definition von τ_∞ offen in (X_∞, τ_∞) ist, folgt die Stetigkeit von f_∞ in ∞ .

Den Rest rechnet man unmittelbar nach. $\square$

7.7. SATZ. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C_0(X, \mathbb{K})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Für alle $x \in X$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$.
- (b) $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von X .
- (c) Für alle $f \in \mathcal{A}$ liegt auch die Funktion $x \mapsto \overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ in $\mathcal{A}$. (Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist dies stets erfüllt.)

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $(C_0(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_X)$.

BEWEIS. Man rechnet nach, daß $\mathcal{A}^\# := \{f_\infty + \lambda 1; f \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K}\}$ eine Unteralgebra von $C(X_\infty, \mathbb{K})$ ist, die die konstante Funktion 1 enthält und mit $h \in \mathcal{A}^\#$ auch die konjugiert komplexe Funktion $\bar{h}$ enthält. Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es nach (c) eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f_\infty(x) = f(x) \neq f(y) = f_\infty(y)$. Ist $x \in X$ beliebig, so gibt es nach (a) eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f_\infty(x) = f(x) \neq 0 = f_\infty(\infty)$. Also trennt $\mathcal{A}^\#$ die Punkte von X_∞ . Damit sind die Voraussetzungen zur reellen bzw. komplexen Fassung des Satzes von Stone–Weierstraß erfüllt. Daher liegt $\mathcal{A}^\#$ dicht in $(C(X_\infty, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{X_\infty})$. Ist $f \in C_0(X, \mathbb{K})$ beliebig, so gibt es demnach eine Funktion $h = g_\infty + \lambda 1$ mit $g \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so daß

$$\|f_\infty - h\|_{X_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insbesondere folgt wegen $f_\infty(\infty) = 0$

$$|\lambda| = |f_\infty(\infty) - h(\infty)| \leq \|f_\infty - h\|_{X_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher auch

$$\|f - g\|_X = \|f_\infty - g_\infty\|_{X_\infty} \leq \|f_\infty - h\|_{X_\infty} + |\lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also liegt $\mathcal{A}$ dicht in $(C_0(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_X)$. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 7.

7.1. AUFGABE. Zeigen Sie, daß die Menge der Funktionen der Gestalt

$$z \mapsto g(z) := \sum_{k=-n}^n c_k z^k$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $c_{-n}, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ dicht liegen in $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ (mit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$).

7.2. AUFGABE. Zeigen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe, daß die Menge der reellen trigonometrischen Polynome

$$t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ bzgl. der Supremumsnorm dicht liegt in der Menge der 2π -periodischen, stetigen, reellwertigen Funktionen.

7.3. AUFGABE. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei

$$C_c(X, \mathbb{K}) := \{f \in C(X, \mathbb{K}) ; \exists K = K_f \subseteq X, K \text{ kompakt, mit } f|_{X \setminus K} \equiv 0\}$$

die Menge aller stetigen Funktionen f auf X mit Werten in $\mathbb{K}$, die außerhalb einer kompakten Teilmenge K_f verschwinden. Zeigen Sie, daß $C_c(X, \mathbb{K})$ dicht in $(C_0(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_X)$ liegt.

KAPITEL 8

Partition der Eins

8.1. DEFINITION. Seien $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ zwei Familien von Teilmengen eines topologischen Raums (X, τ) . Wir sagen

- $\mathcal{V}$ ist *lokal endlich*, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung W von x in (X, τ) gibt mit $W \cap V_j \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $j \in J$.
- $\mathcal{V}$ ist *σ -lokal-endlich*, falls $\mathcal{V}$ eine höchstens abzählbar unendliche Vereinigung von lokal endlichen Mengensystemen ist.
- $\mathcal{V}$ ist *punkt-endlich*, falls für alle $x \in X$ gilt: $x \in V_j$ für höchstens endlich viele $j \in J$.
- $\mathcal{V}$ ist eine *Verfeinerung* von $\mathcal{U}$, falls es zu jedem $j \in J$ ein $i(j) \in I$ gibt mit $V_j \subseteq U_{i(j)}$.

8.2. BEMERKUNG. Ist $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ lokal endliche Familie von Teilmengen eines topologischen Raums (X, τ) , so ist auch die Familie $\mathcal{V}^- := (\overline{V_j})_{j \in J}$ ein lokal endliches Mengensystem und es gilt

$$\overline{\bigcup_{j \in J} V_j} = \bigcup_{j \in J} \overline{V_j}.$$

BEWEIS. Ist $x \in X$, so gibt es nach Voraussetzung eine offene Umgebung U von x mit $U \cap V_j \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $j \in J$. Ist nun $j \in J$ mit $U \cap \overline{V_j} \neq \emptyset$, so ist auch $U \cap V_j \neq \emptyset$. Also folgt die Behauptung. $\square$

8.3. SATZ. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen topologischen Raums (X, τ) und sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine punkt-*endlich* offene Überdeckung von A . Dann gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ von A mit $\overline{V_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$.

BEWEIS. Sei $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ die Menge aller offenen Überdeckungen $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I}$ von A mit $W_i = U_i$ oder $\overline{W_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. Wegen $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ ist $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Für $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ sei

$$J(\mathcal{W}) := \{i \in I; \overline{W_i} \subseteq U_i\}.$$

Sind $\mathcal{W}_1 = (W_{1,i})_{i \in I}$, $\mathcal{W}_2 = (W_{2,i})_{i \in I} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$, so definieren wir

$$\mathcal{W}_1 \leq \mathcal{W}_2 \quad : \iff J(\mathcal{W}_1) \subseteq J(\mathcal{W}_2) \quad \text{und} \quad W_{1,j} = W_{2,j} \quad \text{für alle} \quad j \in J(\mathcal{W}_1).$$

Hierdurch ist eine partielle Ordnung auf $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ erklärt. Sei nun $\mathfrak{K}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$. Wir setzen $J := \bigcup_{\mathcal{W} \in \mathfrak{K}} J(\mathcal{W})$, $W_i^* := U_i$ für alle $i \in I \setminus J$ und $W_j^* := W_j$ für alle $j \in J$ und alle $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I} \in \mathfrak{K}$ mit $j \in J(\mathcal{W})$. Da $\mathfrak{K}$ total geordnet ist, ist hierdurch W_i^* wohldefiniert für alle $i \in I$ und $\mathcal{W}^* := (W_i^*)_{i \in I}$ ist eine Familie von offenen Teilmengen von X mit $\overline{W_j^*} \subseteq U_j$ für alle $j \in J$ und $W_i^* := U_i$ für alle $i \in I \setminus J$. Um $\mathcal{W}^* \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ zu zeigen, müssen wir noch nachweisen, daß $\mathcal{W}^*$ eine Überdeckung von A ist. Sei also $a \in A$ beliebig. Da $\mathcal{U}$ eine punkt-*endlich* Überdeckung von A ist, ist $K_a := \{i \in I; a \in U_i\}$ endlich und nicht leer. Gibt es ein $i_0 \in K_a \cap (I \setminus J)$, so folgt $a \in U_{i_0} = W_{i_0}^* \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i^*$. Sei nun $K_a \subseteq J$. Da $\mathfrak{K}$ total geordnet ist und K_a endlich ist, gibt es dann eine offene Überdeckung $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I} \in \mathfrak{K}$ von A mit $\emptyset \neq K_a \subseteq J(\mathcal{W})$.

Insbesondere gibt es ein $j \in K_a \subseteq J(\mathcal{W})$ mit $a \in W_j = W_j^* \subseteq \bigcap_{i \in I} W_i^*$. Insgesamt haben wir gezeigt, daß $\mathcal{W}^*$ eine obere Schranke für $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ ist. Damit sind die Voraussetzungen zum Zornschen Lemma erfüllt. $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ besitzt also wenigstens ein maximales Element $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$.

Annahme: $J(\mathcal{V}) \neq I$. Dann gibt es ein $i_0 \in I \setminus J(\mathcal{V})$. Da $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von A ist, ist $B := A \setminus \bigcup_{i_0 \neq i \in I} V_i$ abgeschlossen mit $B \subseteq V_{i_0} = U_{i_0}$. Da (X, τ) normal ist, gibt es nach Lemma 6.6 eine offene Menge $W \subseteq X$ mit $B \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U_{i_0}$. Dann ist aber $\mathcal{V}^* = (V_i^*)$ mit

$$V_i^* := \begin{cases} V_i & \text{für } i_0 \neq i \in I, \\ W & \text{für } i = i_0, \end{cases}$$

ein Element von $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$, welches echt größer als $\mathcal{V}$ ist im Widerspruch zur maximalen Wahl von $\mathcal{V}$. $\square$

8.4. DEFINITION. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Für eine auf X stetige Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ heißt

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von f .

8.5. DEFINITION. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raums (X, τ) . Eine Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ von auf X stetigen reellwertigen Funktionen heißt eine *der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins oder Partition der Eins*, falls gilt:

- (a) $\forall i \in I \forall x \in X : \varphi_i(x) \geq 0$.
- (b) $\forall i \in I : \text{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$.
- (c) Das Mengensystem der Träger $(\text{supp}(\varphi_i))_{i \in I}$ ist lokal endlich.
- (d) $\forall x \in X : \sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$.

8.6. SATZ. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine lokal endliche, offene Überdeckung eines normalen topologischen Raums (X, τ) . Dann gibt es eine der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

BEWEIS. Nach Satz 8.3 gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ mit $\overline{V_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. Da (X, τ) normal ist, gibt es nach Lemma 6.6 offene Mengen W_i , $i \in I$, mit

$$\overline{V_i} \subseteq W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i \quad \text{für alle } i \in I.$$

Nach dem Urysohnschen Lemma 6.7 gibt es daher Funktionen $\psi_i \in C(X, [0, 1])$, $i \in I$, mit $\psi_i \equiv 1$ auf $\overline{V_i}$ und $\psi_i \equiv 0$ auf $X \setminus W_i$ für alle $i \in I$. Es folgt $\text{supp}(\psi_i) \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. Da $\mathcal{U}$ lokal endlich ist, gibt es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U von x in (X, τ) , so daß $U \cap \text{supp}(\psi_i) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $i_1, \dots, i_k \in I$. Es folgt

$$\forall y \in U : \quad \psi(y) := \sum_{i \in I} \psi_i(y) = \sum_{j=1}^k \psi_{i_j}(y) \geq 1,$$

Da $\mathcal{V}$ eine Überdeckung von X ist und $\psi_i \equiv 1$ auf V_i für alle $i \in I$ gilt. Insbesondere ist ψ auf U stetig. Die Funktion

$$\psi : X \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \sum_{i \in I} \psi_i(x)$$

ist als wohldefiniert und stetig auf X mit $\psi(x) \geq 1$ für alle $x \in X$. Also sind die Funktionen

$$\varphi_i : x \mapsto \frac{\psi_i(x)}{\psi(x)}$$

stetig auf X mit $0 \leq \varphi_i \leq 1$ auf X und $\text{supp}(\varphi_i) = \text{supp}(\psi_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$ und erfüllen $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in X$. $\square$

8.7. FOLGERUNG. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen topologischen Raums (X, τ) und sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine lokal endliche, offene Überdeckung von A . Dann gibt es eine Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ von Funktionen aus $C(X, [0, 1])$ mit $\text{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$ und mit $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in A$.

BEWEIS. $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ ist eine offene Überdeckung von X . Mit Satz 8.6 folgt die Behauptung. $\square$

8.8. DEFINITION. Ein Hausdorffraum (X, τ) heißt *parakompakt*, falls es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine lokal endliche, offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von X gibt, die eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist.

8.9. SATZ. Jeder parakompakte topologische Raum ist normal.

BEWEIS. Sei also (X, τ) parakompakt. Wir zeigen zunächst:

(a) Sind A und B zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X , so daß es zu jedem $a \in A$ offene Mengen U_a, V_a gibt mit $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$ und $U_a \cap V_a = \emptyset$, so gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Da die Mengen U_a , $a \in A$, mit $X \setminus A$ zusammen eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X bilden, gibt es wegen der Parakompaktheit von (X, τ) eine lokal endliche, offene Verfeinerung $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I}$ dieser Überdeckung, die immer noch X überdeckt. Die Menge

$$\Omega_A := \bigcup \{W_i; i \in I, W_i \cap A \neq \emptyset\}$$

ist dann eine offene Obermenge von A . Ist $i \in I$ mit $W_i \cap A \neq \emptyset$, so gibt es (da $\mathcal{W}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist) ein $a(i) \in A$ mit $W_i \subseteq U_{a(i)}$. Zu jedem $b \in B$ gibt es, da die Überdeckung $\mathcal{W}$ lokal endlich ist, eine Umgebung N_b von b , so daß die Menge

$$I_b := \{i \in I; W_i \cap N_b \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Die Menge

$$\Omega_b := N_b \cap \bigcap_{i \in I_b} V_{a(i)}$$

ist dann eine (als endlicher Durchschnitt von offenen Mengen) offene Umgebung von b die zu Ω_A disjunkt ist. Dann ist $\Omega_B := \bigcup_{b \in B} \Omega_b$ eine zu Ω_A disjunkte offene Obermenge von B .

(b) Sei nun $C \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus C$. Da (X, τ) ein Hausdorffraum ist, ist $\{x\}$ abgeschlossen in (X, τ) und es gibt zu jedem $c \in C$ disjunkte offene Umgebungen U_c von c und V_c von x . Wenden wir (a) auf $A = C$ und $B = \{x\}$ an, so folgt daß es zu C und x zwei disjunkte offene Obermengen $\Omega_{C,x}$ von C und Ω_x von x gibt.

(c) Sind nun A, B zwei beliebige disjunkte Teilmengen von X , so ist wegen (b) (mit dort $C = B$ und $x \in A$) die Voraussetzung zu (a) erfüllt und es folgt die Behauptung. $\square$

8.10. SATZ. Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eines parakompakten Raums (X, τ) gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

BEWEIS. Wegen der Parakompaktheit gibt es eine lokal endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ von $\mathcal{U}$. Da (X, τ) nach Satz 8.9 normal ist gibt es zu $\mathcal{V}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins $(\varphi_j)_{j \in J}$. Zu jedem $j \in J$ fixieren wir ein $\alpha(j) \in I$ mit $V_j \subseteq U_{\alpha(j)}$. Hierdurch ist eine Abbildung $\alpha : J \rightarrow I$ gegeben. Wir definieren nun für $i \in I$:

$$\psi_i := \sum_{j \in \alpha^{-1}(\{i\})} \varphi_j,$$

wobei wie üblich die Summe über eine leere Indexmenge als 0 definiert ist. Dann ist ψ_i stetig auf X mit

$$\text{supp}(\psi_i) = \bigcup_{j \in \alpha^{-1}(\{i\})} \text{supp}(\varphi_j) \subseteq \bigcup_{j \in \alpha^{-1}(\{i\})} V_j \subseteq U_i$$

und für alle $x \in X$ gilt: $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in \alpha^{-1}(\{i\})} \varphi_j(x) = \sum_{j \in J} \psi_j(x) = 1$. $\square$

8.11. SATZ. Für einen regulären topologischen Raum (X, τ) sind äquivalent:

- (a) (X, τ) ist parakompakt.
- (b) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine σ -lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung.
- (c) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung.
- (d) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine lokal endliche, abgeschlossene Verfeinerungsüberdeckung.

BEWEIS. Die Implikation (a) $\implies$ (b) ist offensichtlich.

Sei nun (b) vorausgesetzt und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X . Nach Voraussetzung besitzt diese eine σ -lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, wobei die Mengensysteme $\mathcal{V}_n$ lokal endlich sind. Wir definieren $H_0 := \emptyset$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$G_n := \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V, \quad H_n := \bigcup_{k=1}^n G_k, \quad K_n := H_n \setminus H_{n-1}, \quad \mathcal{W} := (K_n \cap V)_{n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{V}_n}.$$

Offensichtlich gilt

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

$\mathcal{W}$ ist eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$ also auch von $\mathcal{U}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{W}$ auch eine lokal endliche Überdeckung von X ist. Ist x ein beliebiger Punkt aus X ; so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in K_n = H_n \setminus H_{n-1} \subseteq G_n$. Nach Definition von G_n gibt es ein $V \in \mathcal{V}_n$ mit $x \in V$ und es folgt $x \in K_n \cap V \in \mathcal{W}$. Da $\mathcal{V}_k$ eine lokal endlich und H_n offen ist, gibt es eine Umgebung $U_k \subseteq H_n$ von x mit $U_k \cap V \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $V \in \mathcal{V}_k$. Dann ist $U := \bigcap_{k=1}^n U_k$ eine Umgebung von x , die nur mit höchstens endlich vielen $V \in \bigcup_{k=1}^n \mathcal{V}_k$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Wegen $U \subseteq H_n$ folgt $U \cap K_k = \emptyset$ für alle $k > n$ hat U nur mit höchstens endlich vielen Mengen aus $\mathcal{W}$ einen nicht leeren Durchschnitt. Also ist $\mathcal{W}$ eine lokal endliche Überdeckung von X und es gilt (c).

Sei nun (c) vorausgesetzt und sei $\mathcal{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von X . Für alle $x \in X$ gibt es ein $U_x \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_x$. Da X nach regulär und U_x eine offene Umgebung von x ist, gibt es eine offene Umgebung V_x von x mit $V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Dann ist $(W_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X , zu der es nach Voraussetzung eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{W}$ gibt. Nach Bemerkung 8.2 ist dann $(\overline{W})_{W \in \mathcal{W}}$ ebenfalls eine lokal endliche Überdeckung von X . Sei $W \in \mathcal{W}$ beliebig. Wegen $W \subseteq V_x$ für ein $x \in X$ folgt $\overline{W} \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x \in \mathcal{U}$. Also ist $\mathcal{W}$ auch eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Damit ist (d) gezeigt.

Sei schließlich (d) erfüllt und sei $\mathcal{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von X . Nach Voraussetzung gibt es zu $\mathcal{U}$ eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{V}$. Für alle $V \in \mathcal{V}$ fixieren wir ein $U_V \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U_V$. Zu jedem $x \in X$ gibt es also eine offene Umgebung U_x von x , die mit höchstens endlich vielen Elementen von $\mathcal{V}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Nach Voraussetzung gibt es zu der offenen Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ eine lokal endliche, abgeschlossene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{W}$, so daß auch alle $W \in \mathcal{W}$ mit höchstens endlich vielen $V \in \mathcal{V}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Für $V \in \mathcal{V}$

$$\tilde{V} := X \setminus \bigcup \{W \in \mathcal{W}; W \cap V = \emptyset\}.$$

Da die Familie $\{W \in \mathcal{W}; W \cap V = \emptyset\}$ lokal endlich ist und aus abgeschlossenen Mengen besteht, folgt wegen Bemerkung 8.2:

$$\bigcup \{W \in \mathcal{W}; W \cap V = \emptyset\} = \bigcup \{\overline{W}; W \in \mathcal{W}; W \cap V = \emptyset\} = \bigcup \{W \in \mathcal{W}; W \cap V = \emptyset\}.$$

Daher ist $\tilde{V}$ und somit auch $U_V \cap \tilde{V}$ eine offene Obermenge von V . Daher ist $\mathcal{U}_{\mathcal{V}} := (U_V \cap \tilde{V})_{V \in \mathcal{V}}$ eine offene Verfeinerungsüberdeckung zu $\mathcal{U}$. Wir zeigen, daß sie lokal endlich ist. Sei also $x \in X$ beliebig. Da $\mathcal{W}$ lokal endlich ist gibt es eine offene Umgebung Ω_x von x , so daß Ω_x einen nicht leeren Durchschnitt nur mit endlich vielen $W_1, \dots, W_m \in \mathcal{W}$ hat. Da $\mathcal{W}$ eine Überdeckung ist folgt $\Omega_x \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_m$. Ist also $V \in \mathcal{V}$ mit $\tilde{V} \cap \Omega_x \neq \emptyset$, so folgt schon $W_k \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ für ein $k \in \{1, \dots, m\}$. Nach Definition von $\tilde{V}$ ist dann auch $W_k \cap V \neq \emptyset$. Da $W_1, \dots, W_m$ nur mit endlich vielen $V \in \mathcal{V}$ nicht leeren Durchschnitt haben, folgt: $\Omega_x \cap (\tilde{V} \cap U_V) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $V \in \mathcal{V}$. Also ist $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ eine lokal endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung zu $\mathcal{U}$. Da jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung besitzt, ist (X, τ) parakompakt. $\square$

Für den Beweis des folgenden Satzes benötigen wir den Wohlordnungssatz, der äquivalent zum Zornschen Lemma ist und damit ein Axiom der Mengenlehre ist. Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt *wohlgeordnet*, falls jede nicht leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. $\leq$ heißt dann auch eine *Wohlordnung* auf I . Jede wohlgeordnete Menge ist insbesondere total geordnet.

8.12. SATZ (Wohlordnungssatz). *Jede Menge besitzt eine Wohlordnung.*

8.13. SATZ. *Jeder metrische Raum (X, d) ist parakompakt.*

BEWEIS. Nach Satz 8.11 genügt es zu zeigen, daß jede offene Überdeckung von X eine σ -lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung besitzt. Sei also $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X . O.B.d.A. gilt $U_i \neq X$ für alle $i \in I$ (sonst überdeckt X schon X). Nach dem Wohlordnungssatz besitzt I eine Wohlordnung $\leq$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I$ definieren wir abgeschlossene Mengen $A_{n,i}$, Mengen $B_{n,i}$ und offene Mengen $V_{n,i}$ durch

$$A_{n,i} := \{x \in U_i \mid \text{dist}(x, X \setminus U_i) \geq 2^{-n}\},$$

$$B_{n,i} := \{x \in A_{n,i}; x \notin A_{n+1,j} \text{ für alle } j < i\}, V_{n,i} := \{x \in X; \text{dist}(x, B_{n,i}) < 2^{-n-3}\}.$$

Offensichtlich gilt $U_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,i}$. Ist $x \in V_{n,i}$, so gibt es ein $y \in B_{n,i} \subseteq A_{n,i}$ mit $d(x, y) \leq 2^{-n-1}$ und wegen $y \in A_{n,i}$ folgt

$$\text{dist}(x, X \setminus U_i) \geq \text{dist}(y, X \setminus U_i) - d(x, y) \geq 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1} > 0$$

und damit $x \in U_i$. Für $x \in X$ sei $i(x)$ der kleinste Index $i \in I$ mit $x \in U_i$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{n,i(x)}$ und nach Definition von $i(x)$ folgt $x \in B_{n,i(x)} \subseteq V_{n,i(x)}$. Mit $\mathcal{S}_n := (V_{n,i})_{i \in I}$ folgt also $\mathcal{S} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ ist eine offene Überdeckung von X , die eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist.

Wir zeigen nun, daß $\mathcal{S}_n$ lokal endlich ist. Seien $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und (o.B.d.A.) $j < i$ und sei $x \in B_{n,i}$. Nach Definition von $B_{n,i}$ folgt dann $x \notin A_{n+1,j}$, d.h. $\text{dist}(x, X \setminus U_j) < 2^{-n-1}$. Für $y \in A_{n,j}$ ist $\text{dist}(y, X \setminus U_j) \geq 2^{-n}$ und daher $d(x, y) \geq 2^{-n-1}$. Also folgt

$$\text{dist}(B_{n,i}, B_{n,j}) \geq \text{dist}(B_{n,i}, A_{n,j}) \geq 2^{-n-1}.$$

Aus der Definition von $V_{n,i}$ folgt nun

$$\text{dist}(V_{n,i}, V_{n,j}) \geq \text{dist}(B_{n,i}, B_{n,j}) - 2 \cdot 2^{-n-3} \geq 2^{-n-1} - 2^{-n-2} = 2^{-n-2}.$$

Ist nun $x \in X$ beliebig so folgt für die offene Umgebung

$$W := U_{2^{-n-2}}(x) = \{y \in X; d(x, y) < 2^{-n-2}\}$$

von x : $W \cap U_{n,i} \neq \emptyset$ für höchstens ein $i \in I$. Also ist $\mathcal{S}_n$ lokal endlich und $\mathcal{S}$ somit eine σ -lokal-endliche, offen Verfeinerungsüberdeckung zu $\mathcal{U}$. X ist somit parakompakt bezüglich der durch die Metrik d definierten Topologie. $\square$

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt

- F_σ -Menge, falls A eine abzählbare Vereinigung von in (X, τ) abgeschlossenen Mengen ist,
- G_δ -Menge, falls A eine abzählbarer Durchschnitt von in (X, τ) offenen Mengen ist.

Offensichtlich ist eine Menge genau dann eine F_σ -Menge, wenn ihr Komplement eine G_δ -Menge ist.

Zum Beweis des Metrisationssatzes von Bing und Nagata-Smirnow benötigen wir zwei Hilfsaussagen:

8.14. LEMMA. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

- (a) *Ist (X, τ) regulär und besitzt τ eine σ -lokal-endliche Basis, so ist jede offene Teilmenge von X eine F_σ -Menge.*
- (b) *Ist (X, τ) normal, so ist eine abgeschlossene Teilmenge A von X genau dann eine G_δ -Menge, wenn es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ gibt mit $A = f^{-1}(\{0\})$.*

BEWEIS. (a) Sei $\mathcal{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ eine σ -lokal-endliche Basis von τ mit lokal endlichen Mengensystemen $\mathcal{B}_n$. Sei G eine beliebige (o.B.d.A.) nicht leere offene Teilmenge von X . Da (X, τ) regulär ist, gibt es zu jedem $x \in G$ eine offene Umgebung U_x von x mit $\overline{U_x} \subseteq G$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie τ ist, gibt es $n(x) \in \mathbb{N}$ und ein $B_{n(x)}(x) \in \mathcal{B}_{n(x)}$ mit $B_{n(x)}(x) \subseteq U_x$. Es folgt $\overline{B_{n(x)}(x)} \subseteq \overline{U_x} \subseteq G$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$B_k := \bigcup \{B_{n(x)}(x); x \in G, n(x) = k\}.$$

Da $\mathcal{B}_k$ ein lokal endliches Mengensystem ist folgt nach Bemerkung 8.2

$$\overline{B_k} = \bigcup \{\overline{B_{n(x)}(x)}; x \in G, n(x) = k\} \subseteq G.$$

Also ist $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B_k}$ eine F_σ -Menge.

- (b) Ist $A = f^{-1}(\{0\})$ für eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ so ist A wegen

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

eine G_δ -Menge.

Sei nun umgekehrt $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ eine abgeschlossene G_δ -Menge mit offenen Mengen G_n , $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es nach dem Lemma von Urysohn Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f_n \equiv 0$ auf A und $f_n \equiv 1$ auf $X \setminus G_n$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n$ hat $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ als

konvergente Majorante, ist also gleichmäßig auf X konvergent gegen eine stetige Funktion f . Nach Konstruktion gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$. $\square$

8.15. SATZ (Metrisationssatz von Bing und Nagata–Smirnow). *Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann metrisierbar, wenn er regulär ist und eine σ -lokal-endliche Basis der Topologie τ besitzt.*

BEWEIS. Sei d eine Metrik auf X , so daß die durch d definierte Topologie τ_d mit τ übereinstimmt. Zu der offenen Überdeckung $(U_{2^{-n}}(x))_{x \in X}$ von X gibt es dann nach Satz 8.13 eine lokal endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{V}_n$. Dann ist $\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ eine σ -lokal-endliche Basis für $\tau = \tau_d$.

Sei umgekehrt (X, τ) regulär und besitze τ eine σ -lokal-endliche Basis $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ mit lokalendlichen Mengensystemen $\mathcal{B}_n = (B_{n,i})_{i \in I_n}$, $\in \mathbb{N}$. Zunächst zeigen wir, daß (X, τ) parakompakt ist. Sei also $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X . Dann ist $\mathcal{V}_n := \{V \in \mathcal{B}_n; B \subseteq U_i \text{ für ein } i \in I\}$ als Teilmenge von $\mathcal{B}_n$ lokal endlich und $\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ ist eine offene Überdeckung von X , da jedes U_i , $i \in I$, Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Nach Satz 8.11 ist (X, τ) parakompakt, da jede offene Überdeckung von X eine σ -lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung besitzt.

Nach Lemma 8.14 ist jedes $B_{n,i}$ eine F_σ -Menge und somit $X \setminus B_{n,i}$ eine G_δ -Menge, zu der nach Lemma 8.14 eine stetige Funktion $\varphi_{n,i} : X \rightarrow [0, 1]$ existiert mit $B_{n,i} = \{x \in X; \varphi_{n,i}(x) > 0\}$. Da $\mathcal{B}_n$ lokal endlich ist, ist durch $\sigma_n(x) := \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x)$ eine stetige Funktion definiert und auch die Funktionen $\psi_{n,i} : X \rightarrow [0, 1]$ sowie $\sum_{i \in I_n} \psi_{n,i}$ mit

$$\psi_{n,i}(x) := \frac{\varphi_{n,i}(x)}{1 + \sigma_n(x)} \quad (x \in X)$$

sind stetig mit

$$0 \leq \sum_{i \in I_n} \psi_{n,i}(x) < 1 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Wir definieren nun

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{i \in I} |\psi_{n,i}(x) - \psi_{n,i}(y)|, \quad (x, y \in X)$$

und weisen nach, daß $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ eine Metrik ist. Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in I_n$ mit $x \in B_{n,i} \subseteq X \setminus \{y\}$. Daher ist $\psi_{n,i}(y) = 0 < \psi_{n,i}(x)$ und somit $d(x, y) > 0$. Offensichtlich gilt auch $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$ und auch die Dreiecksungleichung ist unmittelbar klar. d ist also eine Metrik auf X .

Als gleichmäßig konvergente Reihe von stetigen Funktionen ist für alle $x \in X$ die Funktion $d(x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto d(x, y)$ stetig auf (X, τ) . Insbesondere ist für alle $x \in X$, $\varepsilon > 0$, die Menge $U_\varepsilon(x) := \{y \in X; d(x, y) < \varepsilon\}$ offen in (X, τ) . Ist umgekehrt U eine beliebige Umgebung von $x \in X$ in (X, τ) , so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in I_n$ mit $x \in B_{n,i} = \{y \in X; \psi_{n,i}(y) > 0\} \subseteq U$. Insbesondere ist $\delta := 2^{-n} \psi_{n,i}(x) > 0$ und somit $U_\delta(x) \subseteq B_{n,i} \subseteq U$. Also ist U auch eine Umgebung von x in der durch die Metrik d gegebenen Topologie τ_d und es folgt $\tau = \tau_d$. $\square$

8.16. FOLGERUNG. *Das topologische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ von mindestens zweielementigen metrischen Räumen (X_i, d_i) , $i \in I$ ist genau dann metrisierbar, wenn I abzählbar ist.*

8.17. FOLGERUNG (Zweiter Metrisationssatz von Urysohn). *Ein kompakter Hausdorffraum (X, τ) ist genau dann metrisierbar, wenn τ eine abzählbare Basis besitzt.*

BEWEIS. Als kompakter Hausdorffraum ist (X, τ) insbesondere normal, also auch regulär. Ist $\mathcal{S}$ ein lokal endliches Mengensystem, so gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x , so daß $U_x \cap S \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $S \in \mathcal{S}$. Da wir aus der offenen Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ wegen der Kompaktheit von (X, τ) eine endliche Teilüberdeckung auswählen können, kann $\mathcal{S}$ nur endlich viele Elemente haben. Insbesondere ist jedes σ -lokal-endliche Mengensystem in X schon abzählbar. Mit dem Metrisationssatz 8.15 folgt die Behauptung. $\square$

Literaturverzeichnis

- [1] E. ALBRECHT, *Analysis 1 und 2*, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, **2006**.
- [2] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique: Livre III, Topologie générale*. Herman **1948**. Auch auf Englisch bei Addison–Wesley **1966**.
- [3] J. DUGUNDJI, *Topology*. Allyn and Bacon **1966**.
- [4] R. ENGELKING, *General Topology*. Heldermann **1989**.
- [5] W. FRANZ, *Topologie I*. Göschenbändchen **1960**.
- [6] KABALLO, WINFRIED, *Einführung in die Analysis II*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg–Berlin–Oxford 1997.
- [7] J. L. KELLEY, *General Topology*. Springer **1975**.
- [8] J. R. MUNKRES, *Topology: a first course*, Prentice–Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., **1975**,
- [9] G. PREUSS, *Allgemeine Topologie*. Springer **1972**.
- [10] BOTO VON QUERENBURG, *Mengentheoretische Topologie*. Springer **1976**.
- [11] V. RUNDE, *A Taste of Topology*, Springer **2005**.
- [12] H. SCHUBERT, *Topologie*. Teubner, Stuttgart. 4. Auflage **1975**.

Index

- F_σ -Menge, 64
- G_δ -Menge, 64
- T_0 -Raum, 47
- T_1 -Raum, 19
- T_2 -Raum, 9
- T_3 -Raum, 47
- T_4 -Raum, 47
- T_{3a} -Raum, 47
- ε -Umgebung, 6
- σ -kompakt, 52
- σ -lokal-endliches Mengensystem, 59
- Überdeckung, 27
 - endliche, 27
 - offene, 27
- abgeschlossen, 6, 7
- abgeschlossene Hülle, 6, 7
- Abschließung einer Menge, 6, 7
- abzählbar im Unendlichen, 38
- Abzählbarkeitsaxiom
 - erstes, 9
 - zweites, 12
- Alexanderscher Subbasensatz, 29
- Alexandroffsche Einpunktkompaktifizierung, 33
- Arzelà-Ascoli
 - Satz von, 35
- Baire
 - Kategoriensatz von, 43
- Basis einer Topologie, 12
- Berührungspunkt, 6, 7
- Bilinearform, 24
- Bing, 65
- Cauchy-Folge, 19
- Cauchy-Netz, 20
- dicht, 11
- Dualität, 24
- Dualsystem, 24
- Einpunktkompaktifizierung, 33
- Erzeugendensystem einer Topologie, 13
- erzeugte Topologie (zu einer Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen der gegebenen Menge), 13
- Finaltopologie, 25
- Folge
 - Moore-Smith-, 17
 - verallgemeinerte, 17
- folgenkompakt, 37
- Folgenkriterium
 - für Stetigkeit, 15
- folgenstetig, 15
- Fortsetzungssatz von Tietze, 50
- Fundamentalsystem von Umgebungen, 9
- Funktion
 - im Unendlichen verschwindende, 56
- gerichtete Menge, 16
- Häufungspunkt, 11
- Häufungswert, 31
- halbstetig, 38
- Hausdorffraum, 9
- homöomorph, 18
- Homöomorphie, 18
- Initialtopologie, 23
- innerer Punkt, 6, 7
- isolierter Punkt, 11
- Kategoriensatz von Baire, 43
- kofinal, 31
- Kolmogorovraum, 47
- kompakt, 27
- Konvergenz
 - von Folgen, 15
 - von Netzen, 17
- Lemma
 - von Urysohn, 48
 - von Zorn, 29
- Lindelöfraum, 52
- lokal endliches Mengensystem, 59
- lokalkompakt, 32
- magere, 40
- Menge
 - abgeschlossene, 6, 7
 - gerichtete, 16
 - mager, 40
 - offene, 6, 7
 - teilweise geordnete, 16
 - total geordnete, 16
 - von erster Kategorie, 40

- von zweiter Kategorie, 40
- Metrik, 5
- Metrisationssatz
 - von Bing und Nagata–Smirnow, 65
 - zweiter von Urysohn, 65
- metrischer Raum, 5
- metrisierbar, 9
- Moore–Smith–Folge, 17
- Nagata–Smirnow
 - Metrisationssatz von, 65
- Netz, 17
- nirgends dicht, 40
- normaler topologischer Raum, 47
- offen, 6
- offener Kern, 6, 7
- Ordnung
 - partielle, 16
 - teilweise, 16
 - totale, 16
- Ordnungsrelation, 16
- Oszillation, 45
- parakompakt, 61
- Partition der Eins, 60
- Produkttopologie, 24
- Punkt
 - Berührungs-, 6
 - Häufungs-, 11
 - innerer, 6
 - isolierter, 11
- punkt–endliches Mengensystem, 59
- Punkte trennende Funktionenmengen, 54
- Quotiententopologie, 14
- Rand
 - topologischer, 8
- Randpunkt, 8
- Raum
 - T_0 –, 47
 - T_1 –, 19
 - T_2 –, 9
 - T_3 –, 47
 - T_4 –, 47
 - Hausdorff–, 9
 - Kolmogorov–, 47
 - Lindelöf, 52
 - metrischer, 5
 - metrisierbarer topologischer, 9
 - topologischer, 7
- regulärer topologischer Raum, 47
- relativkompakt, 35
- Relativtopologie, 12
- Satz
 - Alexanderscher Subbasensatz, 29
 - Fortsetzungssatz von Tietze, 50
 - von Arzelà–Ascoli, 35
 - von Baire, 43
 - von Stone und Weierstraß
 - komplexe Fassung, 55
 - reelle Fassung, 55
 - von Tychonoff, 30
- separabel, 11
- separierte Topologie, 9
- Spurtopologie, 12
- stetig in einem Punkt, 15
- Stetigkeit, 15
- Stone und Weierstraß
 - Satz von
 - komplexe Fassung, 55
 - reelle Fassung, 55
- Subbasis einer Topologie, 13
- Teilüberdeckung, 27
- Teilnetz, 31
- teilweise Ordnung, 16
- Tietze
 - Fortsetzungssatz von, 50
- Topologie, 7
 - der gleichmäßigen Konvergenz auf allen
 - Mengen eines Teilmengensystems $\mathfrak{S}$, 20
 - der gleichmäßigen Konvergenz auf einer
 - Menge, 20
 - der punktweisen Konvergenz, 20
 - diskrete, 7
 - feinere, 22
 - Final-, 25
 - größere, 22
 - größte, 7
 - indiskrete, 7
 - Initial-, 23
 - lokalkompakte, 32
 - Quotienten-, 14
 - Relativ-, 12
 - schwächere, 22
 - separierte, 9
 - Spur-, 12
 - stärkere, 22
 - Unterraum-, 12, 24
- topologische Summe, 26
- topologischer Raum, 7
 - folgenkompakter, 37
 - kompakter, 27
 - lokalkompakter, 32
 - normaler, 47
 - parakompakter, 61
 - regulärer, 47
 - separierter, 9
 - vollständig regulärer, 47
- topologisches Produkt, 24
- total geordnete Menge, 16
- Träger einer Funktion, 60
- Trennungseigenschaften, 47
- Umgebung, 6, 7
 - ε –Umgebung, 6

- einer Menge, 21
- Umgebungsbasis
 - eines Punktes, 9
 - eines topologischen Raums, 9
- Unterraumtopologie, 12, 24
- Urysohn
 - Lemma von, 48
 - zweiter Metrisationssatz von, 65
- verallgemeinerte Folge, 17
- Verfeinerung, 59
- verschwindend in ∞ , 56
- vollständig, 19
- vollständig reglärer topologischer Raum, 47
- Wohlordnung, 63
- Wohlordnungssatz, 63
- Zerlegung der Eins, 60
- Zorn
 - Lemma von, 29
- Zweiter Metrisationssatz von Urysohn, 65