UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 24.04.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Zeigen Sie: Ist K eine kompakte und A eine zu K disjunkte abgeschlossene Teilmenge eines separierten topologischen Vektorraums (E, τ), so gibt es disjunkte offene Mengen $V, W \subset E$ mit $K \subseteq V, A \subseteq W$ und $V \cap W = \emptyset$.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für ein lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ auf einem lokalkonvexen Hausdorffraum (E, τ) folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist stetig.

(ii) Es gibt eine konvexe Nullumgebung U mit $f(U) \subseteq U_1(0) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| \leq 1\}$.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass $\langle E, E' \rangle$ ein Dualsystem ist.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Seien $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem und $\emptyset \neq A \subseteq E$. Dann nennen wir

$$A^{\odot} := \{f \in F;\ \operatorname{Re}\langle x, f \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in A\}$$

die reelle Polare von A. Zeigen Sie, dass die reelle Bipolare $(A^{\odot})_{\odot}$ die $\sigma(E, F)$-Abschließung der konvexen Hülle von $A \cup \{0\}$ ist.

Aufgabe 5* **(4+4+2=10 Punkte)**

Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $|T|$ ist der einzige positive Operator P mit der Eigenschaft, dass $\|Px\| = \|Tx\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.

(b) Ist T invertierbar, so gibt es genau einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $T = U|T|$.

(c) Ist T normal, so gibt es einen unitären Operator U mit $T = U|T| = |T|U$.

Bitte wenden!

Allgemeine Informationen

- Punkte aus *-Aufgaben tragen nicht zur maximal erreichbaren Punktzahl bei, werden jedoch, wenn Sie eine solche bearbeiten, wie Punkte aus normalen Aufgaben gewertet. Auf diesem Blatt sind also 40 Punkte = 100%, aber Sie können 50 Punkte erreichen.

- Um für diese Veranstaltung einen Leistungsnachweis zu erwerben, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:
  (i) erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb, d.h

  - durchgehende Anwesenheit in den Übungsgruppen; es besteht also Anwesenheitspflicht (außer in begründeten Ausnahmefällen),
  - ernsthafte Bearbeitung von mindestens 75 % der Übungsaufgaben,
  - mindestens 50 % der möglichen Übungspunkte,
  - aktive Mitarbeit in den Übungsgruppen; d.h. Vorstellung der von Ihnen erarbeiteten Lösungen,

  und (ii) Bestehen der mündlichen Abschlussprüfung.
  Das Bestehen der mündlichen Prüfung alleine - ohne erfolgreiche Teilnahme an den Übungen - berechtigt **nicht** zum Erwerb eines Leistungsnachweises!

- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

  `www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`