**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

# Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

**Blatt 1**

**Abgabe:** Donnerstag, 24.04.2008, vor der Vorlesung

---

**Aufgabe 1** **(10 Punkte)**

Zeigen Sie: Ist $K$ eine kompakte und $A$ eine zu $K$ disjunkte abgeschlossene Teilmenge eines separierten topologischen Vektorraums $(E, \tau)$, so gibt es disjunkte offene Mengen $V, W \subset E$ mit $K \subseteq V, A \subseteq W$ und $V \cap W = \emptyset$.

---

**Aufgabe 2** **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für ein lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ auf einem lokalkonvexen Hausdorffraum $(E, \tau)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $f$ ist stetig.

(ii) Es gibt eine konvexe Nullumgebung $U$ mit $f(U) \subseteq U_1(0) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| \leq 1\}$.

---

**Aufgabe 3** **(10 Punkte)**

Sei $(E, \tau)$ ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass $\langle E, E' \rangle$ ein Dualsystem ist.

---

**Aufgabe 4** **(10 Punkte)**

Seien $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem und $\emptyset \neq A \subseteq E$. Dann nennen wir

$$A^{\odot} := \{f \in F;\ \operatorname{Re}\langle x, f \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in A\}$$

die reelle Polare von $A$. Zeigen Sie, dass die reelle Bipolare $(A^{\odot})_{\odot}$ die $\sigma(E, F)$-Abschließung der konvexen Hülle von $A \cup \{0\}$ ist.

---

**Aufgabe 5*** **(4+4+2=10 Punkte)**

Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $|T|$ ist der einzige positive Operator $P$ mit der Eigenschaft, dass $\|Px\| = \|Tx\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.

(b) Ist $T$ invertierbar, so gibt es genau einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $T = U|T|$.

(c) Ist $T$ normal, so gibt es einen unitären Operator $U$ mit $T = U|T| = |T|U$.

---

**Bitte wenden!**

## Allgemeine Informationen

- Punkte aus *-Aufgaben tragen nicht zur maximal erreichbaren Punktzahl bei, werden jedoch, wenn Sie eine solche bearbeiten, wie Punkte aus normalen Aufgaben gewertet. Auf diesem Blatt sind also 40 Punkte = 100%, aber Sie können 50 Punkte erreichen.
- Um für diese Veranstaltung einen Leistungsnachweis zu erwerben, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:
  **(i) erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb,** d.h
  - durchgehende Anwesenheit in den Übungsgruppen; es besteht also Anwesenheitspflicht (außer in begründeten Ausnahmefällen),
  - ernsthafte Bearbeitung von mindestens 75 % der Übungsaufgaben,
  - mindestens 50 % der möglichen Übungspunkte,
  - aktive Mitarbeit in den Übungsgruppen; d.h. Vorstellung der von Ihnen erarbeiteten Lösungen,

  **und (ii) Bestehen der mündlichen Abschlussprüfung.**
  Das Bestehen der mündlichen Prüfung alleine - ohne erfolgreiche Teilnahme an den Übungen - berechtigt **nicht** zum Erwerb eines Leistungsnachweises!
- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

  `www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`