UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

Blatt 2

Abgabe: In der Vorlesung Funktionentheorie III am 02. Mai oder bis spätestens 02. Mai in den Briefkasten 'Prof. Albrecht' in Gebäude E2 4 (neben Treppenaufgang)

Aufgabe 1 **(3+3+4+4+4+3+3+3+3=30 Punkte)**

Sei $\mathcal{B}$ die Familie aller beschränkten Teilmengen eines lokalkompakten Hausdorffraums (E, τ). Zeigen Sie:

(a) Eine Menge A in E ist genau dann τ-beschränkt, wenn es zu jeder τ-Nullumgebung U ein $c > 0$ gibt mit $A \subseteq cU$.

(b) $A \subseteq B \in \mathcal{B} \implies A \in \mathcal{B}$. Insbesondere sind also beliebige Durchschnitte von beschränkten Mengen beschränkt.

(c) $A, B \in \mathcal{B} \implies A \pm B \in \mathcal{B}$.

(d) Endliche Vereinigungen von beschränkten Mengen sind beschränkt.

(e) Für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}$ ist auch die abgeschlossene, absolutkonvexe Hülle wieder beschränkt.

(f) Jede kompakte Teilmenge $K \subset E$ ist beschränkt.

(g) Eine Menge $A \subset E$ ist genau dann beschränkt, wenn für jede τ–stetige Halbnorm p gilt: $\sup_{a \in A} p(a) < \infty$.

(h) Eine Menge $B \subset E$ ist genau dann beschränkt, wenn für jede Halbnorm p_α eines die Topologie τ definierenden Halbnormensystems $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ gilt: $\sup_{b \in B} p_\alpha(b) < \infty$.

(i) Ist (F, τ_F) ein weiterer lokalkonvexer Hausdorffraum und ist $T : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung, so ist für alle $B \in \mathcal{B}$ die Menge $T(B)$ in (F, τ_F) beschränkt.

Aufgabe 2 **(5+5=10 Punkte)**

Sei (E, τ) ein metrisierbarer lokalkonvexer Hausdorffraum und sei d eine die Topologie τ erzeugende Metrik auf E. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge A von E ist genau dann τ-präkompakt, wenn sie in dem metrischen Raum (E, d) präkompakt ist.

(b) Ist (E, τ) vollständig, so ist für jede kompakte Teilmenge K von (E, τ) auch die Menge $\overline{\operatorname{conv}(K)}$ kompakt.

Aufgabe 3* **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie alle extremalen Teilmengen von

$$K := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\, ;\ \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}.$$

Allgemeine Informationen

- Wegen des Feiertages am Donnerstag, den 01. Mai 2008 geben Sie dieses Übungsblatt bitte bis spätestens Freitag, den 02. Mai 2008 im Briefkasten mit der Aufschrift 'Prof. Albrecht' in Gebäude E2 4 (neben den Treppenaufgängen) ab. Alternativ können Sie das Übungsblatt auch bei Herrn Albrecht in der Vorlesung 'Funktionentheorie III' am 02. Mai 2008 abgeben. Dort erhalten Sie auch das dritte Übungsblatt bzw. wie üblich im Netz unter

  `www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`