UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 15.05.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**
Seien K_1, K_2 zwei absolutkonvexe und kompakte Teilmengen eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ). Zeigen Sie, dass dann auch die absolutkonvexe Hülle $\operatorname{absconv}(K_1 \cup K_2)$ von $K_1 \cup K_2$ wieder τ-kompakt ist.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**
Sei E der Raum $\{f \in C[0,1] : \operatorname{supp}(f) \subset (0,1]\}$, versehen mit der Supremumsnorm auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass E nicht tonneliert ist.
(Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\left\{f \in E : |f(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\right\}$.)

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die starken Dualräume der metrisierbaren lokalkonvexen Hausdorffräume

(i) $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \infty, \emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen

(ii) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

nicht metrisierbar sind.

Aufgabe 4 **(5+5=10 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die Räume

(i) $C^\infty(\Omega)$, wobei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ ist

(ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N);\ \forall p \in \mathbb{N}_0^N\ \forall k \in \mathbb{N} :\ \|f\|_{p,k} := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|)^k |f^{(p)}(x)| < \infty\}$
versehen mit der durch das Halbnormensystem $(\|\cdot\|_{p,k})_{p \in \mathbb{N}^N, k \in \mathbb{N}}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie.

Montelräume sind.

Aufgabe 5* **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass auf dem Dualraum eines normierten Raums die starke Topologie und die Normtopologie übereinstimmen.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`