UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

Blatt 4

Abgabe: In der Vorlesung Funktionentheorie III am 23. Mai oder bis spätestens 23. Mai in den Briefkasten 'Prof. Albrecht' in Gebäude E2 4 (neben Treppenaufgang)

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Sei $F = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1};\ x \text{ Folge in } \mathbb{C} \text{ mit } \|x\|_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|(|n|+1)^k < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \right\}$.
Zeigen Sie, dass F zusammen mit der von dem Halbnormensystem $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie ein Fréchetraum ist.

Aufgabe 2 **(14 Punkte)**

Zeigen Sie, dass der Raum $X := \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$, versehen mit der Produkttopologie ein Montelraum ist. Zeigen Sie, dass der Dualraum von X identifiziert werden kann mit dem Raum F aller finiten Folgen

$$F := \left\{ \varphi = (\varphi)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0};\ \varphi_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

vermöge der Dualität $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times F \to \mathbb{K}$, die gegeben ist durch

$$\langle x, \varphi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \varphi_n$$

$(x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in X, \varphi = (\varphi)_{n=0}^{\infty} \in F)$.

Aufgabe 3 **(3+3+3=9 Punkte)**

Sei (X, Σ, m) ein nichttrivialer endlicher, positiver Maßraum und sei L^2 der Hilbertraum $L^2(X, \Sigma, m)$. Wir definieren eine Mengenfunktion E auf Σ mit Werten in $\mathcal{L}(L^2)$ wie folgt:

$$E(A)f := \chi_A f \qquad \text{für } A \in \Sigma \text{ und } f \in L^2.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $A \in \Sigma$ ist $E(A) \in \mathcal{L}(L^2)$ eine orthogonale Projektion mit $\|E(A)\| = 1$ im Fall $m(A) > 0, \|E(A)\| = 0$ sonst.

(b) E ist eine additive Mengenfunktion mit $E(X) = 1$.

(c) Es gilt $E(A \cap B) = E(A) \circ E(B)$ für alle $A, B \in \Sigma$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(3+3+3+4*=9+4* Punkte)**

Es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Für eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkte Mengen aus Σ sind äquivalent:

  (i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E(A_k)$ ist konvergent in $\mathcal{L}(L^2)$.

  (ii) Für fast alle $k \in \mathbb{N}$ ist $m(A_k) = 0$.

(b) E ist im Allgemeinen nicht σ-additiv.

(c) E ist beschränkt, aber im Allgemeinen nicht von beschränkter Variation.

(d) Für $x, y \in L^2$ betrachten wir die L^2-wertige Mengenfunktion

$$E_x : \Sigma \to L^2, \quad A \mapsto E_x(A) := E(A)x$$

sowie die skalarwertige Mengenfunktion

$$E_{x,y} : \Sigma \to \mathbb{K}, \qquad A \mapsto E_{x,y}(A) := \langle E(A)x, y\rangle.$$

Beide sind abzählbar additiv und beschränkt.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`