UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 05.06.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(4+4=8 Punkte)**

Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die *Fouriertransformation* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\widehat{\varphi}(\xi) := (\mathcal{F}\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \varphi(x)\, dx.$$

Zeigen Sie, dass für jedes Paar von Multiindizes $\rho, \sigma \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

(a) $D^\sigma \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\sigma|} \widehat{(x^\sigma \varphi)}(\xi)$.

(b) $\widehat{(D^\rho \varphi)}(\xi) = i^{|\rho|} \xi^\rho \widehat{\varphi}(\xi)$.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Seien die Bezeichnungen wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass aus $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt, dass $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt und zeigen Sie weiter, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\check{\varphi}(\xi) := (\mathcal{F}^*\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \varphi(x)\, dx.$$

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus ist und die oben definierte Abbildung $\mathcal{F}^*$ die zu $\mathcal{F}$ inverse Abbildung ist, d. h. $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$. Wir nennen die Abbildung $\mathcal{F}^*$ die *inverse Fouriertransformation.*

Aufgabe 4 **(5+5=10 Punkte)**

Seien die Bezeichnungen wie in Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^4 = Id$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Paar $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\widehat{\psi}(x)\, dx$$

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Gaußglocke $\varphi(x) := e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ ihre eigene Fouriertransformierte ist.

(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+is)^2}\, dt.)$$

Allgemeine Informationen

- Am Montag, den 02.06.2008 findet statt der Übung eine zusätzliche Vorlesung statt.
- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`