UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II
Sommersemester 2008

Blatt 6
Abgabe: Donnerstag, 12.06.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**
Sei μ eine beschränkte Mengenfunktion auf einer Algebra Σ von Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie, dass für alle $f \in B(f, \Sigma)$ gilt $|f| \in B(f, \Sigma)$ und

$$\left| \int\limits_X f \, d\mu \right| \leq \int\limits_X |f| \, d\nu(\mu, \cdot).$$

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**
Ist $(F, \| \cdot \|)$ ein Banachraum und $K \subset F'$ kompakt bezüglich $\sigma(F', F)$, so ist auch die $\sigma(F', F)$-abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von K wieder $\sigma(F', F)$-kompakt.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**
Seien $(E, \tau), K$ und $f : K \to E$ wie in Satz 20.1 und sei $T : (E, \tau) \to (F, \tau_F)$ eine stetige, lineare Abbildung von (E, τ) in einen weiteren lokalkonvexen Hausdorffraum (F, τ_F). Zeigen Sie, dass dann das Integral $\int_K T(f(t)) \, d\mu(t)$ existiert und dass gilt

$$\int\limits_K T(f(t)) \, d\mu(t) = T \left(\int\limits_K f \, d\mu \right).$$

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei Γ ein System von endlich vielen stückweise glatten Kurven. Zeigen Sie: Ist f eine auf $\mathrm{Spur}(\Gamma)$ stetige Funktion mit Werten in einem Banachraum $(E, \| \cdot \|)$, so gilt

$$\left\| \int\limits_\Gamma f(z) \, dz \right\| \leq L(\Gamma) \max_{z \in \mathrm{Spur}(\Gamma)} \|f(z)\|.$$

Hierbei bezeichne $L(\Gamma)$ die Länge des Kurvensystems Γ.

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(5+5=10 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Funktion $f : \Omega \to E$ mit Werten in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann auf Ω holomorph, wenn für jedes $z \in \Omega$ die Funktion f auf einer Kreisscheibe $D \subseteq \Omega$ mit Mittelpunkt z und positivem Radius durch eine in allen Punkten aus D in $(E, \|\cdot\|)$ konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten in E dargestellt werden kann.

(b) Für jedes $z \in \Omega$ ist die Potenzreihe in (a) sogar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge der größten in Ω enthaltenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z konvergent.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`