UNIVERSIT"AT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math Natalie Marx

# Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (Sommersemester 2008)
## Blatt 7

**Aufgabe 1.** **(10 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine $2\pi$-periodische Funktion mit absolutkonvergenter Fourierreihenentwicklung, d.h.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ und } \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Zeigen Sie: Ist $h$ eine auf einer offenen Obermenge von $f([0, 2\pi])$ holomorphe Funktion, so hat auch die Funktion $h \circ f$ eine absolutkonvergente Fourierreihenentwicklung.

**Aufgabe 2.** **(8 Punkte)**
Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume und seien $T \in \mathcal{L}$, $S \in \mathcal{L}(F)$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ stetige, lineare Operatoren mit $AT = SA$ und $\sigma(T, E) \cap \sigma(S, F) = \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann schon $A = 0$ gelten muss.

**Aufgabe 3.** **(10 Punkte)**
Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$, dessen Spektrum von der Gestalt $\sigma(T, E) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ ist mit abgeschlossenen, nicht leeren zueinander disjunkten Mengen $\sigma_1, \sigma_2 \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es dann einen Operator $P$ in der Bikommutantenalgebra von $T$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

$$P \neq 0, \quad 1 - P \neq 0, \quad P = P^2, \quad \sigma(T|_{P(E)}, P(E)) = \sigma_1, \quad \text{und } \sigma(T|_{\ker P}, \ker P) = \sigma_2\,.$$

**Aufgabe 4.** **(5+7=12 Punkte)**
Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T, E)$ gilt

$$(z - T)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - w} (w - T)^{-1}\, dw\,,$$

wobei $\Gamma$ ein $\sigma(T, E)$ umlaufendes und in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ verlaufendes Kurvensystem sei.

(b) Ist $f$ eine in einer Umgebung $\Omega$ von $\sigma(T, E)$ holomorphe Funktion, so gilt die folgende *verallgemeinerte Cauchysche Integralformel*:

$$\Phi_T^\Omega(f^{(n)}) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z - T)^{-n-1} dz\,.$$

Hierbei sei $\Gamma$ ein $\sigma(T, E)$ umlaufendes und in $\Omega$ verlaufendes Kurvensystem.

**Aufgabe$^*$ 5.** **(2+8=10 Punkte)**
Sei $\mathcal{R}$ eine Banachalgebra. Für $x \in \mathcal{R}$ sei $r(x)$ der Spektralradius von $x$ in $\mathcal{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\forall x \in \mathcal{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $\qquad \|x^{2^{n+1}}\|^{2^{-n-1}} \leq \|x^{2^n}\|^{2^{-n}}$.

(b) Für alle auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen, $\mathcal{R}$-wertigen Funktionen $f$ sind die Funktionen $z \mapsto \log r(f(z))$ und $z \mapsto r(f(z))$ auf $\Omega$ subharmonisch.

*Hinweis zu (b):* Verwenden Sie Teil (a) und Aufgabe 3, Blatt 7 der Übungen zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher sowie Aufgabe 1, Blatt 13 der Übungen zur Funktionentheorie 2 des vergangenen Wintersemesters.

**Abgabetermin: Donnerstag, 19.06.2008** vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`