UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 26.06.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1+2 **(4+2+4+4+7=21 Punkte)**

Für einen kompakten Hausdorffraum $X \neq \emptyset$ und einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ betrachten wir eine stetige lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem Paar $x, y \in \mathcal{H}$ existiert genau ein Maß $\mu_{x,y} \in rca(X)$ mit

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_X f(t)\, d\mu_{x,y}(t) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(X).$$

(b) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ ist $\|\mu_{x,y}\| \leq \|\Phi\|\|x\|\|y\|$.

(c) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $x, y, z \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\mu_{\alpha x+\beta y,z} = \alpha\mu_{x,z} + \beta\mu_{y,z} \qquad \text{sowie} \qquad \mu_{z,\alpha x+\beta y} = \overline{\alpha}\mu_{z,x} + \overline{\beta}\mu_{z,y}.$$

(d) Zu jedem $f \in B(X, \mathcal{B})$ existiert genau ein $\Psi(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_X f(t)\, d\mu_{x,y}(t).$$

Die Abbildung $f \mapsto \Psi(f)$ ist eine stetige, lineare und normgleiche Fortsetzung von Φ.

(e) Die Mengenfunktion

$$E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad f \mapsto \Psi(\chi_\delta)$$

ist additiv und beschränkt; sie erfüllt $\langle E(A)x, y\rangle = \mu_{x,y}(A)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Ferner gilt $\int_X f\, dE = \Psi(f)$ für alle $f \in B(X, \mathcal{B})$.

Aufgabe 3+4 **(6+7+6=19 Punkte)**

(a) Sei Σ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ ein positives Maß auf (X, Σ). Zeigen Sie: Ist f eine komplexwertige, integrierbare Funktion auf (X, Σ, μ) mit $\int_E f(t)\, d\mu(t) = 0$ für alle $E \in \Sigma$, dann ist f identisch Null μ-fast überall.

(b) Sei $\emptyset \neq X$ ein kompakter Hausdorffraum, $\mu \in rca(X), g \in B(X, \mathcal{B})$. Dann ist

$$\lambda : \mathcal{B} \to \mathbb{K}, \qquad \lambda(A) := \int_A g\, d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{B}$$

in $rca(X)$, und es gilt für alle $f \in B(X, \mathcal{B})$

$$\int_X f\, d\lambda = \int_X fg\, d\mu.$$

Wir schreiben für das Maß λ auch g_μ.

Bitte wenden!

(c) Zeigen Sie, dass die in (b) definierte Mengenfunktion λ die totale Variation

$$v(\lambda, A) = \int\limits_A |g(t)| v(\mu, dt)$$

besitzt.
(Hinweis: Man beweise dies zunächst für Treppenfunktionen.)

Aufgabe 5* **(5 Punkte)**
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt *algebraisch* bzw. *wesentlich algebraisch*, falls es ein von 0 verschiedenes Polynom $p \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ gibt mit $p(T) = 0$ bzw. so, dass $p(T)$ ein kompakter Operator ist. Ist T algebraisch, so besteht das Spektrum von T aus höchstens endlich vielen Punkten. Was können Sie über das Spektrum eines wesentlich algebraischen Operators aussagen?

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`