



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II
Sommersemester 2008

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 03.07.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

(5+5=10 Punkte)

Sei $\mathcal{R}$ eine komplexe Banchalgebra mit Einselement und $a \in \mathcal{R}$. Sei G die bekanntlich offene Menge aller invertierbaren Elemente von $\mathcal{R}$. Die Zusammenhangskomponente G_0 von G , die das Einselement enthält, heißt die *Hauptkomponente* von G . Zeigen Sie:

- (a) $\exp(a) \in G_0$.
 - (b) Liegt 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\rho_{\mathcal{R}}(a)$, so existiert ein $b \in \mathcal{R}$ mit $\exp(b) = a$. Insbesondere liegt a in G_0 .
-

Aufgabe 2

(2+6+4=12 Punkte)

Sei $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$h(z) := \frac{z-i}{z+i} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

und sei $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie:

- (a) Der Operator $U := h(T)$ ist unitär mit $1 \notin \sigma(U, \mathcal{H})$.
 - (b) Drücken Sie das Spektralmaß von U durch das von T aus.
 - (c) Ist umgekehrt $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein unitärer Operator mit $1 \notin \sigma(U, \mathcal{H})$, so gibt es genau einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $h(T) = U$.
-

Aufgabe 3

(4+4=8 Punkte)

Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ ein dicht definierter linearer Operator. Zeigen Sie:

- (a) $\ker(T^*) = \text{ran}(T)^\perp \cap D(T^*)$.
 - (b) Ist T abgeschlossen, so gilt $\ker(T) = \text{ran}(T^*)^\perp \cap D(T)$.
-

Aufgabe 4

(10 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definierte Fouriertransformation zu einem unitären Operator $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ fortsetzen läßt.

Bitte wenden!

Aufgabe 5***(3+3=6 Punkte)**

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die *Faltung* von φ und ψ durch

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) \psi(y) dy$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ dann gilt

(a) $\mathcal{F}(\varphi \psi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi.$

(b) $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}(\varphi) \mathcal{F}(\psi).$

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`