UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 10.07.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**
Sei $U : \mathcal{H} \supseteq D(U) \to \mathcal{H}$ eine lineare Isometrie. Zeigen Sie: Ist einer der drei Räume $D(U)$, $\operatorname{ran} U$, $G(U)$ abgeschlossen, so gilt dies auch für die beiden anderen.

Aufgabe 2 **(5+7=12 Punkte)**
Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator. Zeigen Sie:

(a) Ist T invertierbar, so gibt es einen normalen Operator S mit $\exp(S) = T$.

(b) Es gilt $T^* = UT$ für einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wann ist U hierdurch eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**
Sei H^2 der Hardy-Raum über der Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ (siehe FAI, Blatt 2, Aufgabe 2) und sei S der Shiftoperator, also

$$S : H^2 \to H^2, \qquad (Sf)(z) := zf(z).$$

Zeigen Sie, dass S die Cayley-Transformierte des symmetrischen Operators

$$T : H^2 \supseteq D(T) \to H^2, \qquad (Tf)(z) := i\frac{1+z}{1-z}f(z)$$

ist. T ist maximal symmetrisch, besitzt aber keine selbstadjungierte Erweiterung.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**
Der Operator V sei auf H^2 definiert als $(Vf)(z) := zf(z^2)$. Zeigen Sie, dass V eine Isometrie ist, welche die Cayley-Transformation eines abgeschlossenen symmetrischen Operators auf H^2 ist, dessen Defektindizes 0 und ∞ sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(8 Punkte)**
Zeigen Sie, dass für einen selbstadjungierten, linearen Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ genau dann $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in D(T)$ gilt, wenn $\sigma(T) \subseteq [0, \infty]$ ist.

Information:

- Dies ist das letzte bewertete Übungsblatt zur Funktionalanalysis II. Wollen Sie einen benoteten Schein, so müssen Sie eine mündliche Prüfung ablegen. Zur Terminvereinbarung setzen Sie sich bitte mit Herrn Albrecht in Verbindung. Wollen Sie einen unbenoteten Schein, so wenden Sie sich bitte an Frau Marx.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`