**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

# Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2008

**Blatt 11**

**Abgabe:** Keine Abgabe

---

**Aufgabe 1**

Seien $T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$ normale Operatoren mit Spektralmaßen $E_j$ $(j = 1, 2)$. Ein Punkt $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *kritischer Eigenwert für* $(T_1, T_2)$, falls $\lambda$ ein Eigenwert von $T_2$ ist und die algebraische Dimension von $\mathcal{H}_1/\text{Bild}(\lambda - T_1)$ nicht endlich ist. Zeigen Sie:

(a) Gibt es einen kritischen Eigenwert $\lambda$ für $(T_1, T_2)$, so gibt es einen unstetigen linearen Operator $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit $AT_1 = T_2A$.
(Hinweis: Versuchen Sie es mit

$$Ax := \varphi(x)y \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{H}_1,$$

wobei $\varphi : \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}$ unstetig sei mit $\text{Bild}(\lambda - T_1) \subset \ker\varphi$ und $0 \neq y \in \ker(\lambda - T_2)$ ein fester Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$ von $T_2$ sei.)

(b) Ist $\text{Bild}(\lambda - T_1)$ von endlicher algebraischer Kodimension in $\mathcal{H}_1$, so ist $\text{Bild}(\lambda - T_1)$ abgeschlossen in $\mathcal{H}_1$.

(c) Hat $(T_1, T_2)$ keine kritischen Eigenwerte, so ist jeder lineare Operator $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit $AT_1 = T_2A$ stetig.
(Hinweis:

(i) Zeigen Sie zunächst: $A\ \text{Bild}E_1(F \cap \sigma(T_1)) \subset \text{Bild}E_2(F \cap \sigma(T_2))$.

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ heiße *Unstetigkeitspunkt für* $A$, falls für jede Umgebung $U$ von $\lambda$ eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset U \cap \sigma(T_1)$ existiert, so dass $A\ |\text{Bild}(E_1)F$ unstetig ist. Zeigen Sie wie folgt, dass die Menge $\Lambda(A)$ aller Unstetigkeitspunkte für $A$ endlich ist: Ist $\Lambda(A)$ nicht endlich, so konstruiere man induktiv eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Mengen $F_n \subset \sigma(T_1)$ und Vektoren $x_n \in\text{Bild}E_1(F_n)$ mit $\|x_n\| \leq 2^{-n}$ und $\|Ax_n\| \geq n$ sowie $F_n \cap \overline{\bigcup_{k=1,k\neq n}^{\infty} F_k} = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was folgt dann für $Ax$ mit $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$?

(iii) Zeigen Sie nun, dass für den separierenden Raum

$$\mathcal{S}(A) := \{y \in \mathcal{H}_2 \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1 \text{ mit } x_n \to 0 \text{ und } Ax_n \to y \text{ bei } n \to \infty\}$$

gilt:

$$\mathcal{S}(A) \subset \ \text{Bild}E_2(\Lambda(A)) \text{ und schließlich sogar } \mathcal{S}(A) = \{0\}.)$$

---

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 2**
Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener linearer Operator mit nicht leerer Resolventenmenge $\rho(T) := \hat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(T)$. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \rho(T)$, so gilt

$$\sigma((\lambda - T)^{-1}) = \{1/(\lambda - z);\ z \in \sigma(T)\}.$$

---

**Aufgabe 3**
Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, linearer Operator.

(a) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $(z - T)^{-1}$ ein normaler Operator.

(b) Berechnen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ das Spektralmaß von $(z - T)^{-1}$.

---

**Aufgabe 4**
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt eine Borel-meßbare Funktion $F : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $\exp(if(z)) \equiv z$ auf $\partial\mathbb{D}$.

(b) Die Menge $G$ der invertierbaren Operatoren $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist wegzusammenhängend.

(Hinweis: Betrachten Sie für $T \in G$ die Polarzerlegung und erinnern Sie sich an Aufgabe 1 auf Blatt 9.)

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss08/fa2/uebungen.html`