Funktionalanalysis 1 und 2

Ernst Albrecht

Vorlesungen im Wintersemester 2007/8 und im Sommersemester 2008

Universität des Saarlandes

Saarbrücken

Stand: 8. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

Einige Grundlagen aus der Algebrentheorie

In diesem vorbereitenden Abschnitt stellen wir einige Grundlagen aus der Theorie der Algebren bereit, die wir im Verlauf der Vorlesung benötigen werden.

Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper.

0.1. Definition. $\mathcal{A}$ heißt eine $\mathbb{K}$–*Algebra*, wenn $\mathcal{A}$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist und auf $\mathcal{A}$ eine Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$ von $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}$ gegeben ist, so dass für alle $x, y, z \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $x(yz) = (xy)z$
(b) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$
(c) $x(y + z) = xy + xz$
(d) $(x + y)z = xz + yz$.

$0 \neq 1 \in \mathcal{A}$ heißt *Einselement von* $\mathcal{A}$, falls für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt: $1x = x1 = x$. Es gibt höchstens ein Einselement in $\mathcal{A}$, denn sind 1 und $1'$ Einselemente in $\mathcal{A}$, so ist $1 = 1 \cdot 1' = 1'$. Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt *kommutativ*, falls $xy = yx$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$. Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement 1, so heißt ein Element $x \in \mathcal{A}$ *linksinvertierbar*, falls ein $y \in \mathcal{A}$ existiert mit $yx = 1$. y heißt dann *linksinverses Element zu* x. Es kann mehrere linksinverse Elemente zu x geben. Analog definiert man *rechtsinvertierbar* und *rechtsinverses Element*. Hat x ein linksinverses Element u und ein rechtsinverses Element v, so heißt x *invertierbar*. Es folgt $u = u1 = u(xv) = (ux)v = 1v = v$. Wir nennen dann $u = v$ das zu x *inverse* Element und bezeichnen es mit x^{-1}.

Ein Untervektorraum $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ heißt *Unteralgebra* von $\mathcal{A}$, falls für alle $x, y \in \mathcal{B}$ auch $xy \in \mathcal{B}$ gilt. $\mathcal{B}$ ist dann – versehen mit den auf $\mathcal{B}$ eingeschränkten algebraischen Operationen der Addition, Multiplikation und Multiplikation mit Skalaren – selbst wieder eine Algebra.

Ist $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Unteralgebren von $\mathcal{A}$, so ist auch $\bigcap_{i\in I} \mathcal{B}_i$ wieder eine Unteralgebra.

Sei nun $\mathcal{S}$ eine beliebige nicht leere Teilmenge von $\mathcal{A}$. Dann sind die Mengen

$$\mathcal{S}' := \{x \in \mathcal{A};\ \forall\ s \in \mathcal{S} : xs = sx\} \text{ und } \mathcal{S}'' := (\mathcal{S}')'$$

offensichtlich Unteralgebren von $\mathcal{A}$. Wir nennen $\mathcal{S}'$ die *Kommutantenalgebra* und $\mathcal{S}''$ die *Bikommutantenalgebra* zu $\mathcal{S}$. Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement 1, so ist $1 \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$. Ist $\mathcal{S}$ *kommutativ*, d.h. gilt $xy = yx$ für alle $x, y \in \mathcal{S}$, so ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ ist kommutative Unteralgebra von $\mathcal{S}'$. Die Algebra

$$\langle \mathcal{S} \rangle := \bigcap \{\mathcal{B};\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{B} \text{ ist Unteralgebra von } \mathcal{A}\}$$

ist offensichtlich die kleinste $\mathcal{S}$ enthaltende Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Es ist

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{n} z_j a_j;\ n \in \mathbb{N}, z_j \in \mathbb{C},\ a_j \text{ ist endliches Produkt von Elementen aus } \mathcal{S} \right\}.$$

$\langle\mathcal{S}\rangle$ heißt die von $\mathcal{S}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Wir fassen einige elementare Eigenschaften von $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ in dem folgenden unmittelbar einsichtigen Lemma zusammen.

0.2. Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathcal{S}$ eine beliebige nicht leere Teilmenge von $\mathcal{A}$.*

(a) *Ist $\mathcal{S}$ kommutativ, so ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'' \subseteq \mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ ist kommutativ.*
(b) *Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{S}_1' \subseteq \mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}'' \subseteq \mathcal{S}_1''$.*
(c) *Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement und ist $x \in \mathcal{S}$ in $\mathcal{A}$ invertierbar, so ist $x^{-1} \in \mathcal{S}''$.*
(d) *$\mathcal{A}' =: Z(\mathcal{A})$ heißt das Zentrum von $\mathcal{A}$ und ist eine kommutative Unteralgebra von $\mathcal{A}$.*

0.3. Adjunktion der Eins. Besitzt die Algebra $\mathcal{A}$ kein Einselement, so kann man $\mathcal{A}$ auf folgende Art und Weise in eine Algebra $\mathcal{A}_1$ mit einem Einselement einbetten. Wir setzen $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}\times\mathbb{K}$. $\mathcal{A}_1$ ist dann ein Vektorraum mit den komponentenweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren. Durch

$$((x,z),(y,w)) \mapsto (xy + wx + zy, zw) \text{ für } x, y \in \mathcal{A},\ z, w \in \mathbb{K}\ ,$$

wird eine Multiplikation auf $\mathcal{A}_1$ erklärt, die den Bedingungen (a) – (d) genügt und, wenn wir $\mathcal{A}$ mit einer kanonischen Einbettung $\mathcal{A} \times \{0\}$ in $\mathcal{A}_1$ identifizieren, die Multiplikation von $\mathcal{A}$ fortsetzt. Damit wird $\mathcal{A}$ zu einer Unteralgebra von $\mathcal{A}_1$. Man rechnet unmittelbar nach, dass $1 := (0,1)$ Einselement für $\mathcal{A}_1$ ist. Wegen $(x,z) = (x,0) + (0,z) = (x,0) + z1$ und der obigen Identifikation schreiben wir auch einfach $x + z1$ statt (x,z). Mit dieser Identifikation gilt $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}\cdot 1$. Wir nennen diese Konstruktion eine *Adjunktion der Eins.*

0.4. Definitionen. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra. Ein Untervektorraum $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ heißt *Linksideal* (bzw. *Rechtsideal*), falls

$$\mathcal{A}\mathcal{I} := \{ax;\ a \in \mathcal{A},\ x \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{I} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{I}\mathcal{A} := \{xa;\ a \in \mathcal{A},\ x \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{I}\ .$$

Wir nennen ein Links– (bzw. Rechts–)Ideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ *echt*, falls $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ verschieden ist. $\mathcal{I}$ heißt ein *zweiseitiges Ideal* in $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{I}$ sowohl ein Links– als auch ein Rechtsideal von $\mathcal{A}$ ist. Jedes Ideal ist offensichtlich auch eine Unteralgebra. Ist $x \in \mathcal{A}$, so ist $\mathbb{K}x + \mathcal{A}x$ (bzw. $\mathbb{K}x + x\mathcal{A}$, bzw. $\mathbb{K}x + x\mathcal{A} + \mathcal{A}x + LH(\mathcal{A}x\mathcal{A})$) das kleinste Links– (bzw. Rechts–, bzw. zweiseitige) Ideal in $\mathcal{A}$, welches x enthält, und ist in jedem Links– (bzw. Rechts–, bzw. zweiseitigen) Ideal enthalten, das auch x enthält. Ein Links– (bzw. Rechts–)Ideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ heißt *modular*, falls es ein Element u in $\mathcal{A}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt: $x - xu \in \mathcal{I}$ (bzw. $x - ux \in \mathcal{I}$). Jedes solche u nennt man dann eine *modulare rechte* (bzw. *linke) Einheit für $\mathcal{I}$*. Besitzt die Algebra $\mathcal{A}$ ein Einselement 1, so ist 1 offensichtlich für jedes modulare Links– bzw. Rechtsideal eine modulare rechte bzw. linke Einheit. Insbesondere ist dann jedes Ideal in $\mathcal{A}$ modular.

0.5. Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement* 1 *und $x \in \mathcal{A}$. Dann gilt:*

(a) *x ist genau dann linksinvertierbar, wenn x in keinem echten Linksideal enthalten ist.*
(b) *x ist genau dann rechtsinvertierbar, wenn x in keinem echten Rechtsideal enthalten ist.*
(c) *x ist genau dann invertierbar, wenn x in keinem echten Links– oder Rechtsideal enthalten ist.*
(d) 1 *ist in keinem echten Links– oder Rechtsideal enthalten.*

Beweis. Wir zeigen (a). (b) erhält man dann analog und die übrigen Aussagen folgen unmittelbar aus (a) und (b).

" $\Longrightarrow$": Ist $y \in \mathcal{A}$ mit $yx = 1$, so ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}1 = \mathcal{A}(yx) = (\mathcal{A}y)x \subseteq \mathcal{A}x$ in jedem Linksideal enthalten, das x enthält.

" $\Longleftarrow$": $\mathcal{A}x$ ist ein Linksideal, welches x enthält. Nach Voraussetzung muss also $\mathcal{A}x = \mathcal{A}$ gelten. Insbesondere existiert ein $y \in \mathcal{A}$ mit $yx = 1$. □

0.6. Definitionen. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra.

(a) Eine kommutative Unteralgebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ heißt *maximal kommutative Unteralgebra* von $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{B}$ in keiner von $\mathcal{B}$ verschiedenen kommutativen Unteralgebra von $\mathcal{A}$, enthalten ist.

(b) Ein echtes Linksideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ heißt *maximales Linksideal*, falls es in keinem von $\mathcal{I}$ verschiedenen echten Linksideal enthalten ist. Analog definiert man Maximalität für Rechtsideale, zweiseitige Ideale, und modulare Links– oder Rechtsideale.

0.7. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathcal{S}$ eine beliebige nicht leere kommutative Teilmenge von $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine maximale kommutative Unteralgebra $\mathcal{K}$ von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$. $\mathcal{S}''$ ist in jeder maximal kommutativen Unteralgebra enthalten, die $\mathcal{S}$ enthält.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{K} := \{\mathcal{K};\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{K}\,\text{kommutative Unteralgebra}\}$. Es ist $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ wegen $\mathcal{S}'' \in \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}$ ist durch die Inklusion teilweise geordnet. Sei $\mathcal{J}$ eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{K}$. Dann ist $\mathcal{K}_0 := \bigcup\{\mathcal{K}; \mathcal{K} \in \mathcal{J}\}$ offensichtlich wieder eine kommutative Unteralgebra, die $\mathcal{S}$ enthält und damit eine obere Schranke für $\mathcal{J}$ aus $\mathfrak{K}$ ist. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathfrak{K}$ also wenigstens ein maximales Element, das dann natürlich eine maximale kommutative Unteralgebra von $\mathcal{A}$ ist. Die übrigen Aussagen folgen nun leicht. □

0.8. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra.*

(a) *Ist $\mathcal{I}$ ein modulares Linksideal und ist u eine modulare rechte Einheit für $\mathcal{I}$, so ist u auch für jedes $\mathcal{I}$ enthaltende Linksideal wieder eine modulare rechte Einheit. Insbesondere ist also jedes $\mathcal{I}$ enthaltende Linksideal wieder ein modulares Linksideal. Es ist $u \notin \mathcal{I}$.*

(b) *Jedes echte modulare Linksideal $\mathcal{I}$ ist in einem maximalen modularen Linksideal enthalten.*

(c) *Jedes maximale modulare Linksideal $\mathcal{I}$ ist auch ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$.*

(d) *Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement 1, so ist jedes Linksideal in $\mathcal{A}$ in einem maximalen Linksideal enthalten.*

Entsprechende Aussagen gelten auch für Rechtsideale.

Beweis. (a) ist klar, außer der letzten Aussage, die wir beweisen wollen. Wäre $u \in \mathcal{I}$, so würde für alle $a \in \mathcal{A}$ folgen: $a = a - au + au \in \mathcal{I} + \mathcal{I} = \mathcal{I}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{I}$ nach Voraussetzung ein echtes Linksideal ist.

(b) Sei also $\mathcal{I}$ ein echtes modulares Linksideal und sei u eine rechte modulare Einheit für $\mathcal{I}$. Wir setzen $\mathfrak{K} := \{\mathcal{K};\ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{K}\,\text{echtes Linksideal}\}$. Es ist $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ wegen $\mathcal{I} \in \mathfrak{K}$ und $\mathcal{K}$ ist durch die Inklusion teilweise geordnet. Sei $\mathcal{J}$ eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{K}$. Dann ist

$$\mathcal{K}_0 := \bigcup\{\mathcal{K};\ \mathcal{K} \in \mathcal{J}\}$$

offensichtlich wieder ein $\mathcal{I}$ enthaltendes Linksideal mit u als rechter modularer Einheit. Nach (a) ist u in keinem der Ideale aus $\mathfrak{K}$ und damit auch nicht in deren Vereinigung $\mathcal{K}_0$ enthalten. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{K}_0$ eine obere Schranke zu $\mathcal{J}$ aus $\mathfrak{K}$ ist. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathfrak{K}$ also wenigstens ein maximales Element, das dann natürlich ein maximales $\mathcal{I}$ enthaltendes Linksideal sein muss (welches nach (a) auch wieder modular mit u als modularer Einheit ist). Damit folgen auch die Aussagen (c) und (d). □

0.9. Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement 1. Wir definieren das *Links-* und das *Rechtsradikal* durch

$$L - \mathrm{rad}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A}; (1-yx)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{A} \text{ für alle } y \in \mathcal{A}\}$$

und

$$R - \mathrm{rad}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A}; (1-xy)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{A} \text{ für alle } y \in \mathcal{A}\} \ .$$

0.10. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement* 1. *Dann gilt:*

(a) $L - \mathrm{rad}(\mathcal{A}) = R - \mathrm{rad}(\mathcal{A}) =: \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

(b) $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \bigcap\{\mathcal{I};\ \mathcal{I} \text{ ist maximales Linksideal in } \mathcal{A}\}$
$= \bigcap\{\mathcal{I};\ \mathcal{I} \text{ ist maximales Rechtsideal in } \mathcal{A}\}$

Beweis. (a) Wir zeigen:

$$\forall\, x, y \in \mathcal{A} : (1-xy)^{-1} \text{ existiert } \Leftrightarrow (1-yx)^{-1} \text{ existiert.} \tag{0.1}$$

Es genügt hierzu " $\Rightarrow$" zu zeigen. Die Rückrichtung erhält man dann, indem man die Rollen von x und y vertauscht. Es existiere also: $u := (1-xy)^{-1}$ in $\mathcal{A}$. Dann folgt:

$$(1+yux)(1-yx) = 1 - yx + yux - yuxyx = 1 - yx + yu(1-xy)x = 1 - yx + yx = 1 \ .$$

Ferner

$$(1-yx)(1+yux) = 1 - yx + y(1-yx)ux = 1 - yx + yx = 1 \ .$$

(b) Wir zeigen nur die erste Gleichung. Der Beweis der zweiten Gleichung verläuft analog.

" $\supseteq$": Sei also $x \in \cap\{\mathcal{I};\ \mathcal{I} \text{ ist maximales Linksideal in } \mathcal{A}\}$ und sei $y \in \mathcal{A}$ beliebig.

Annahme: $1 - xy$ ist **nicht** in $\mathcal{A}$ linksinvertierbar. Dann ist $1 - xy$ nach Lemma 5.a und Satz 8.d in einem maximalen Linksideal $\mathcal{I}_0$ enthalten. Wegen $x \in \mathcal{I}_0$ folgt dann auch $yx \in \mathcal{I}_0$ und hieraus $1 = (1-yx) + yx \in \mathcal{I}_0$ im Widerspruch zu teil (d) von Lemma 5. Also hat $1 - xy$ ein linksinverses Element u.
Wir zeigen (ebenfalls durch indirekten Beweis), dass u auch rechtsinvers zu $1 - xy$ ist.

Annahme: u ist **nicht** in $\mathcal{A}$ linksinvertierbar. Dann ist u nach Lemma 5.a und Satz 8 in einem maximalen Linksideal $\mathcal{I}_0$ enthalten. Wegen $x \in \mathcal{I}_0$ folgt dann auch $uyx \in \mathcal{I}_0$ und hieraus $1 = u(1-xy) = u - uyx \in \mathcal{I}_0$ im Widerspruch zu Teil (d) von Lemma 5. Also hat u ein linksinverses Element, welches mit dem rechtsinversen Element $1 - xy$ übereinstimmen muss. Nach (a) ist $x \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

" $\subseteq$": Sei nun umgekehrt $x \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ gegeben.

Annahme: Es gibt ein maximales Linksideal $\mathcal{I}_0$, welches x nicht enthält. Dann muss wegen der Maximalität von $\mathcal{I}_0$ gelten: $\mathcal{I}_0 + \mathcal{A}x = \mathcal{A}$. Es gibt also Elemente $u \in \mathcal{I}_0$ und $y \in \mathcal{A}$, so dass $u + yx = 1$. Also ist $u = 1 - yx$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da u wegen Lemma 5.c nicht invertierbar sein kann, aber $1 - yx$ invertierbar ist wegen $x \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Also ist x doch in allen maximalen Linksidealen enthalten. $\square$

0.11. Folgerung. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement* 1. *Dann ist* $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ *ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$.*

Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 10, da beliebige Durchschnitte von Links– bzw. Rechtsidealen wieder Links- bzw. Rechtsideale sind.

0.12. Definition. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathbb{K}$–Algebren. Eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt:

- *(Algebren-)Homomorphismus*, falls Φ linear ist und $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt.
- *(Algebren-)Monomorphismus*, falls Φ ein injektiver Algebrenhomomorphismus ist.
- *(Algebren-)Epimorphismus*, falls Φ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus ist.

- *(Algebren-)Isomorphismus*, falls Φ ein bijektiver Algebrenhomomorphismus ist.

Besitzen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Einselemente 1 bzw. $1'$, so nennen wir einen Algebrenhomomorphismus $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *unital*, falls $\Phi(1) = 1'$ gilt.

0.13. Lemma. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathbb{K}$–Algebren und sei $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Algebrenhomomorphismus.*

(a) $\ker(\Phi) := \{x \in \mathcal{A};\ \Phi(x) = 0\}$ *ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Dieses ist echt, falls $\Phi \not\equiv 0$.*
(b) $\operatorname{ran}(\Phi) := \Phi(\mathcal{A}) = \{\Phi(x);\ x \in \mathcal{A}\}$ *ist eine Unteralgebra von $\mathcal{B}$.*
(c) *Ist Φ surjektiv und $\mathcal{I}$ ein Links– (bzw. Rechts–, bzw. zweiseitiges) Ideal in $\mathcal{A}$, so ist auch $\Phi(\mathcal{I})$ ein Links– (bzw. Rechts–, bzw. zweiseitiges) Ideal in $\mathcal{B}$.*

Dies zeigt man leicht durch direktes Nachrechnen.

0.14. Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathcal{I}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Auf dem Quotientenvektorraum $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ definieren wir durch

$$[x]\cdot[y] := [xy] \text{ für } [x] = x + \mathcal{I},\ [y] = y + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$$

eine Multiplikation, durch die $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ zu einer Algebra wird. Wir nennen $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ die *Quotientenalgebra* von $\mathcal{A}$ nach dem zweiseitigen Ideal $\mathcal{I}$.

Wir zeigen nur die Wohldefiniertheit der Multiplikation. Daß diese dann den Bedingungen (a) – (d) in Definition 1 genügt, rechnet man dann leicht nach. Seien also $[x] = x + \mathcal{I},\ [y] = y + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ beliebig und seien $x', y' \in \mathcal{A}$ mit $[x] = [x'],\ [y] = [y']$. Dann liegen $x - x'$ und $y - y'$ in $\mathcal{I}$ und es folgt

$$xy - x'y' = \underbrace{(x - x')}_{\in\mathcal{I}}y + x'\underbrace{(y - y')}_{\in\mathcal{I}} \in \mathcal{I} \text{ d.h. } [xy] = [x'y'] \ .$$

Der kanonische Epimorphismus $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ mit $\pi(x) = [x]$ für alle $x \in \mathcal{A}$ ist ein Algebrenepimorphismus mit $\ker(\pi) = \mathcal{I}$. Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement 1, so ist $\pi(1) = [1]$ das Einselement von $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Es gilt der

0.15. Homomorphiesatz. *Für jeden Algebrenhomomorphismus $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer $\mathbb{K}$–Algebra $\mathcal{A}$ in eine $\mathbb{K}$–Algebra $\mathcal{B}$ ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathcal{A} & \longrightarrow & \operatorname{ran}(\Phi) \subseteq \mathcal{B} \\ \pi \searrow & & \nearrow \psi \\ & \mathcal{A}/\ker(\Phi) & \end{array}$$

Hierbei sei π der kanonische Epimorphismus und $\psi([x]) := \Phi(x)$ für $[x] = x + \ker(\Phi) \in \mathcal{A}/\ker(\Phi)$. ψ ist ein Algebrenisomorphismus.

Eine $\mathbb{K}$–Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement 1 heißt *halbeinfach*, falls $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$. Sie heißt *einfach*, falls $\{0\}$ und $\mathcal{A}$ die einzigen zweiseitigen Ideale in $\mathcal{A}$ sind.

0.16. Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement* 1.

(a) *Sei $\mathcal{I}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Genau dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach, wenn $\mathcal{I}$ ein* **maximales** *zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$ ist.*
(b) $\mathcal{A}/\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ *ist halbeinfach.*

Beweis. (a) Sei $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ der kanonische Epimorphismus.
"$\Leftarrow$": Ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ nicht einfach, so gibt es ein nicht-triviales Ideal $\mathcal{J}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, d.h. ein Ideal mit $\{[0]\} \neq \mathcal{J} \neq \mathcal{A}/\mathcal{I}$. $\mathcal{J}_0 := \pi^{-1}(\mathcal{J})$ ist dann ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Wegen $\mathcal{J} \neq \{[0]\}$ ist $\mathcal{I} = \ker(\pi) \subsetneqq \mathcal{J}_0$ und wegen $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}/\mathcal{I}$ ist $\mathcal{J}_0 := \pi^{-1}(\mathcal{J}) \neq \mathcal{A}$. Also kann $\mathcal{I}$ kein maximales Ideal sein.

" $\Rightarrow$": Sei nun $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach und sei $\mathcal{J}_0$ ein echtes zweiseitiges $\mathcal{I}$ enthaltendes Ideal in $\mathcal{A}$. Dann ist $\pi(\mathcal{J}_0)$ ein echtes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Da $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach ist, muss $\pi(\mathcal{J}_0) = \{[0]\}$ und damit $\mathcal{J}_0 = \pi^{-1}(\{[0]\}) = \mathcal{I}$ sein. Also ist $\mathcal{I}$ ein maximales zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. (b) Sei $[x] \in \mathrm{rad}(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))$, $x \in [x]$ und sei $y \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann existiert $([1] - [x][y])^{-1}$ in $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Es gibt also ein $z \in \mathcal{A}$ und ein $u \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ mit $z(1 - xy) = 1 + u = 1 - (-1)u$. Wegen $u \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ ist die rechte und damit auch die linke Seite dieser Gleichung invertierbar. Es gibt also ein $v \in \mathcal{A}$ mit $vz(1 - xy) = 1$. Analog zeigt man, dass $1 - xy$ auch rechts invertierbar ist. Da dies für alle $y \in \mathcal{A}$ gilt, folgt $x \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ und damit $[x] = [0]$ in $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Also ist $\mathrm{rad}(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})) = \{[0]\}$. □

Eine kommutative $\mathbb{K}$–Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement 1 heißt *Körper* (über $\mathbb{K}$), falls jedes von 0 verschiedene Element aus $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ invertierbar ist.

0.17. Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement 1 und sei $\mathcal{I}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Genau dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein Körper, wenn $\mathcal{I}$ maximal ist.*

Beweis. " $\Rightarrow$": Sei $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein Körper und sei $[0] \neq [x] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert $[x]^{-1}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Nach Lemma 5 ist also $[x]$ in keinem echten Ideal von $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ enthalten. Also muss $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach sein. Nach Lemma 0.16 (a) folgt hieraus die Maximalität von $\mathcal{I}$.

" $\Leftarrow$": Sei nun $\mathcal{I}$ ein maximales Ideal in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Nach Lemma 0.16 (a) ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ dann einfach. Ist also $[0] \neq [x] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$, so ist $[x]$ in keinem echten Ideal von $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ enthalten und daher nach Lemma 0.5 invertierbar. Also ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein Körper. □

KAPITEL 1

Banachräume: Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ stets den Körper $\mathbb{R}$ der reellen oder den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir wiederholen zunächst einige elementare Definitionen und Tatsachen über normierte Räume.

1.1. Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine Abbildung $p : E \to [0,\infty)$ heißt *Halbnorm* auf E, falls gilt

(N2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : \qquad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,

(N3) $\forall x, y \in E : \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Gilt zusätzlich

(N1) $\forall x \in E : \quad p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

so heißt p eine *Norm* auf E und (E, p) ein *normierter Raum*.

Normen werden häufig auch durch $\|\cdot\|$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{R}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra und ist auf $\mathfrak{R}$ eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben mit $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in \mathfrak{R}$, so nennen wir die Norm $\|\cdot\|$ *submultiplikativ* und $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra.

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum, so wird durch $d_{\|\cdot\|} : E \times E \to [0,\infty)$ mit $d_{\|\cdot\|}(x,y) := \|x - y\|$ für alle $x, y \in E$ eine Metrik auf E definiert. Eine Menge $\Omega \subseteq E$ heißt *offen* bezüglich $\|\cdot\|$, falls es zu jedem $x \in E$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$U_\varepsilon(x) := \{u \in E\,;\ \|u - x\| < \varepsilon\} \subseteq \Omega\,.$$

Eine Menge $A \subseteq E$ heißt *abgeschlossen* bezüglich $\|\cdot\|$, falls $E \setminus A$ offen ist. Die hierdurch auf E gegebene Topologie bezeichnen wir auch mit $\tau_{\|\cdot\|}$ und nennen sie die *Normtopologie.* Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ aus E heißt *Cauchy–Folge*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 : \qquad \|x_n - x_m\| < \varepsilon\,.$$

Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ aus E heißt *konvergent* in $(E, \|\cdot\|)$, falls es ein $y \in E$ gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \qquad \|x_n - y\| < \varepsilon\,.$$

Man rechnet leicht nach, daß y hierdurch eindeutig bestimmt ist. Wir schreiben dann $x_n \to y$ für $n \to \infty$ oder $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ und nennen y den *Grenzwert* der Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Die abgeschlossene *Einheitskugel* $\{x \in E\,;\ \|x\| \leq 1\}$ von E bezeichnen wir auch mit B_E. Eine Menge $B \subset E$ heißt *normbeschränkt* (oder kurz: beschränkt), falls es ein $C > 0$ gibt mit $\|a\| \leq C$ für alle $a \in A$.

1.2. Definition. Ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*, falls er *vollständig* ist, d.h. falls jede Cauchy–Folge aus E bezüglich $\|\cdot\|$ konvergent ist. Eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ heißt *Banachalgebra*, falls $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ vollständig ist.

Eine Teilmenge A eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig*, falls für jede Cauchy–Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ von Elementen aus A gilt: $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist konvergent in $(E, \|\cdot\|)$ und $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$.

Die folgenden zum Teil schon aus den Anfängervorlesungen bekannten Aussagen werden wir häufig benutzen.

1.3. Lemma. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum.*

(a) *Eine Teilmenge A von E ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede in $(E, \|\cdot\|)$ konvergente Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ von Elementen aus A gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$.*
(b) *Jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(E, \|\cdot\|)$ ist beschränkt, d.h. es ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.*
(c) *Jede vollständige Teilmenge von E ist abgeschlossen.*
(d) *Ist $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von E vollständig.*
(e) *$(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann vollständig, wenn jede absolutkonvergente Reihe aus E konvergent in E ist, d.h. wenn für jede Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in E mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ der Grenzwert $s := \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n$ in E existiert.*

Beweis. (a) Sei $A \subseteq E$ abgeschlossen und sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige in E gegen ein $y \in E$ konvergente Folge von Elementen aus A. Wäre $y \in E \setminus A$, so gäbe es, da $E \setminus A$ offen ist, ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq E \setminus A$. Insbesondere würde für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten $\|a_n - y\| > \varepsilon$ im Widerspruch zu $\|a_n - y\| \to 0$ für $n \to \infty$. Also gilt $y = \lim_{n\to\infty} a_n \in A$.

Habe nun umgekehrt jede in E konvergente Folge aus A ihren Grenzwert in A. Wäre A nicht abgeschlossen, so gäbe es einen Punkt $y \in E \setminus A$, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ es ein $a_n \in A \cap U_{1/n}(y)$ gäbe. Es würde folgen: $a_n \to y$ für $n \to \infty$ aber $y \notin A$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muß A abgeschlossen sein.

(b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(E, \|\cdot\|)$, so gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $\|x_n - x_{n_0}\| < 1$ und damit auch $\|x_n\| < \|x_0\| + 1$. Es folgt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x_k\| \leq \max\{\|x_j\|\,;\, 1 \leq j \leq n_0\} + \|x_0\| + 1 < \infty.$$

(c) und (d) folgen unmittelbar aus (a).

(e) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe in E. Dann ist die Folge ihrer Partialsummen eine Cauchy–Folge in $(E, \|\cdot\|)$. Ist $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, so besitzt diese Folge also einen Grenzwert in E.

Besitze nun umgekehrt jede absolukonvergente Reihe aus E einen Grenzwert in E und sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Cauchy–Folge aus E. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ für alle $n \geq n_k$. Die Reihe $x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ ist dann absolut konvergent, besitzt also nach Voraussetzung einem Grenzwert x_0 in E. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{1-k_0} < \varepsilon/2$ und $\left\|x_{n_1} + \sum_{k=1}^{k_0-1}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) - x_0\right\| < \varepsilon/2$. Für alle $n \geq n_{k_0}$ gilt dann

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - x_{n_{k_0}}\| + \|x_{n_{k_0}} - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left\|x_{n_1} + \sum_{k=1}^{k_0}(x_{n_{k_{n+1}}} - x_{n_k}) - x_0\right\| < \varepsilon\,.$$

Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert also gegen x_0. □

1.4. Beispiele. Sei I eine nicht leere Menge und K ein kompakter Hausdorffraum.

(a) Die Menge $\ell^\infty(I) := \{x = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I\,;\, \|x\|_\infty := \sup_{i\in I} |x_i| < \infty\}$ ist, versehen mit den komponentenweisen Operationen der Addition der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren eine Banachalgebra bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.
(b) Die Algebra der stetigen $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf K ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $\ell^\infty(K)$ und daher bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$ eine Banachalgebra.
(c) Für alle $1 \leq p < \infty$ ist

$$\ell^p(I) := \{x = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I\,;\, \|x\|_p^p := \sup_{F\subseteq I \text{ endlich}} \sum_{i\in F} |x_i|^p < \infty\}$$

versehen mit den komponentenweisen Operationen der Addition der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren eine Banachalgebra bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$.

1.5. Lemma. *Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $q : E \to [0, \infty)$ eine Halbnorm auf E. Dann gilt:*

(a) *$N_q := \{x \in E\,;\, q(x) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von E.*
(b) *E/N_q wird zu einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der durch $\|[x]\|_q := q(x)$ für alle $[x] := x + N_q = \{x + u\,;\, q(u) = 0\} \in E/N_q$, $x \in X$, definierten Norm $\|\cdot\|_q : E/N_q \to [0, \infty)$.*

Beweis. (a) rechnet man elementar nach.

(b) Sind $x, y \in E$ mit $[x] = [y]$, so ist $x - y \in N_q$ und somit $q(x) = q((x - y) + y) \leq q(x - y) + q(y) = q(y)$. Durch Vertauschung der Rollen von x und y sieht man, daß auch $q(y) \leq q(x)$ und daher $q(x) = q(y)$ gelten muß. $\|\cdot\|_q$ ist also wohldefiniert. Die Normeigenschaften (N1)-(N3) rechnet man nun leicht nach. □

1.6. Satz. *Sei F ein Untervektorraum eines normierten $\mathbb{K}$–Vektorraums $(E, \|\cdot\|)$. Für alle $x \in E$ definieren wir*

$$q_F(x) := \operatorname{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \inf_{y \in F} \|x + y\|\,.$$

(a) *q_F ist eine Halbnorm auf E mit $N_{q_F} = \overline{F}$.*
(b) *Genau dann definiert $\|[x]\|_{E/F} := q_F(x)$ für $[x] = x + F \in E/F$, $x \in E$, also eine Norm auf E/F, wenn F abgeschlossen ist.*
(c) *Ist $(E, \|\cdot\|)$ vollständig und F abgeschlossen, so ist auch $(E/F, \|\cdot\|_{E/F})$ vollständig.*

Beweis. (a) Für alle $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$q_F(\lambda x) = \inf_{u \in F} \|\lambda x + u\| = \inf_{v \in F} \|\lambda(x + v)\| = |\lambda| \inf_{v \in F} \|x + v\| = |\lambda| q_F(x)$$

sowie

$$\begin{aligned} q_F(x + y) &= \inf_{u \in F} \|x + y + u\| = \inf_{v_1, v_2 \in F} \|x + v_1 + y + v_2\| \leq \\ &\leq \inf_{v_1, v_2 \in F} \big(\|x + v_1\| + \|y + v_2\|\big) = \inf_{v_1 \in F} \|x + v_1\| + \inf_{v_2 \in F} \|y + v_2\| = q_F(x) + q_F(y)\,. \end{aligned}$$

q_F ist also eine Halbnorm auf E.

Genau dann ist $q_F(x) = 0$, wenn eine Folge $(u_n)_{n=1}^\infty$ in F existiert mit $\|x - u_n\| \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. genau dann, wenn x in der Abschließung von F liegt.

(b) folgt nun folgt nun mit (a) und Lemma 1.5

(c) Nach Lemma 1.3 (e) genügt es zu zeigen, daß jede absolutkonvergente Reihe einen Grenzwert in E/F besitzt. Sei also $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge aus E mit

$$C := \sum_{n=1}^\infty \|[x_n]\|_{E/F} = \sum_{n=1}^\infty q_F(x_n) < \infty\,.$$

Nach Definition von q_F gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in F$ mit

$$q_F(x_n) \leq \|x_n + u_n\| < q_F(x_n) + 2^{-n}\,.$$

Also ist

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n + u_n\| \leq \sum_{n=1}^\infty (q_F(x_n) + 2^{-n}) \leq C + 1 < \infty\,.$$

Da E vollständig ist, gibt es ein $s \in E$ mit $s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (x_n + u_n)$ in $(E, \|\cdot\|)$. Es folgt

$$\Big\|[s] - \sum_{k=1}^n [x_k]\Big\|_{E/F} = \Big\|\Big[s - \sum_{k=1}^n (x_k + u_k)\Big]\Big\|_{E/F} \leq \Big\|s - \sum_{k=1}^n (x_k + u_k)\Big\| \to 0$$

Also konvergiert $\sum_{k=1}^n [x_k]$ in $(E/F, \|\cdot\|_{E/F})$ gegen $[s]$ für $n \to \infty$. □

1.7. Lemma. *Seien* $(E, \|\cdot\|_E)$ *und* $(F, \|\cdot\|_F)$ *zwei normierte* $\mathbb{K}$*-Vektorräume. Für eine lineare Abbildung* $T : E \to F$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) T *ist auf ganz* E *stetig.*
(b) T *ist stetig in* 0.
(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E: \qquad \|x\|_E < \delta \Longrightarrow \|Tx\|_F < \varepsilon.$
(d) *Für jede Nullfolge* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *in* $(E, \|\cdot\|_E)$ *ist die Folge* $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ *der Bildpunkte eine Nullfolge in* $(F, \|\cdot\|_F)$.
(e) T *ist gleichmäßig stetig auf* E.

Beweis. Die Aussagen (e)$\Longrightarrow$(a)$\Longrightarrow$(b)$\Longleftrightarrow$(c)$\Longleftrightarrow$(d) sind offensichtlich.

"(c)$\Longrightarrow$(e)": Sei also (c) erfüllt und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $\delta > 0$ mit $\|Tx\|_F < \varepsilon$ für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E < \delta$. Für alle $u, v \in E$ mit $\|u - v\| < \delta$ gilt dann wegen der Linearität von T: $\|Tu - Tv\|_F = \|T(u - v)\|_F < \varepsilon$. Also ist T gleichmäßig stetig auf E. $\square$

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(E, F)$ die Menge aller stetigen linearen Operatoren von E nach F. Statt $\mathcal{L}(E, E)$ schreiben wir auch $\mathcal{L}(E)$ und für die Menge $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ aller stetigen linearen Funktionale schreiben wir E'. E' heißt der *topologische Dualraum* von E. Man rechnet leicht nach, daß $\mathcal{L}(E, F)$ ein Untervektorraum des $\mathbb{K}$–Vektorraums $L(E, F)$ aller linearen Abbildungen von E nach F ist. Hierbei ist $L(E, F)$ mit den punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren versehen. Insbesondere ist E' Untervektorraum des *algebraischen Dualraums* $E^\# := L(E, \mathbb{K})$. Da die Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen stetig ist, ist $\mathcal{L}(E)$ eine Unteralgebra der $\mathbb{K}$–Algebra $L(E)$ aller linearen Operatoren von E in sich.

1.8. Lemma. *Seien* $(E, \|\cdot\|_E)$ *und* $(F, \|\cdot\|_F)$ *zwei normierte* $\mathbb{K}$*-Vektorräume. Für* $T \in L(E, F)$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) T *ist auf* E *stetig.*
(b) $\sup\limits_{x \in B_E} \|Tx\|_F < \infty$.
(c) $\sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F < \infty$.
(d) $\sup\limits_{0 \neq x \in E} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} < \infty$.

Die Suprema in (b), (c) und (d) stimmen überein. Für $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *schreiben wir*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x \in B_E} \|Tx\|_F$$

und nennen $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *die Operatornorm von* T*. Sind die normierten Räume vom Zusammenhang her klar, so schreiben wir auch* $\|T\|$ *statt* $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Die Stetigkeit von T in diesem Lemma ist also äquivalent zur Beschränktheit von T auf B_E. Man nennt daher stetige lineare Operatoren auch beschränkt. In der Literatur wird auch die Bezeichnung $\mathcal{B}(E, F)$ für $\mathcal{L}(E, F)$ verwendet.

Beweis. Wegen

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \Big\| T\Big(\frac{1}{\|x\|_E} x\Big)\Big\|_F \quad \text{und} \quad \Big\|\frac{1}{\|x\|_E} x\Big\|_E = 1$$

für alle $0 \neq x \in E$ sieht man unmittelbar, daß die Suprema in (c) und (d) übereinstimmen. Der Ausdruck in (b) ist offensichtlich größer oder gleich dem in (c) bzw. (d). Für $0 \neq x \in B_E$ ist $\|Tx\|_F \leq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$. Damit folgt, daß die drei Ausdrücke in (b), (c) und (d) übereinstimmen. Zu zeigen ist also nur die Äquivalenz von (a) und (b).

"(a)$\Longrightarrow$(b)": Ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$, so gibt es nach Lemma 1.7 zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$, so daß $\|Tu\|_F < 1$ für alle $u \in E$ mit $\|u\|_E < \delta$. Für alle $x \in B_E$ folgt dann

$$\|Tx\|_F = \frac{2}{\delta}\Big\|T\Big(\frac{\delta}{2}x\Big)\Big\|_F < \frac{2}{\delta}\,.$$

Also ist $\sup_{x \in B_E} \|Tx\|_F \leq \frac{2}{\delta}$.

"(b)$\Longrightarrow$(a)": Sei nun (b) erfüllt und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Mit $\delta := \frac{\varepsilon}{1+\|T\|}$ folgt für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E < \delta$:

$$\|Tx\|_F = \delta\Big\|T\Big(\frac{1}{\delta}x\Big)\Big\|_F \leq \delta\|T\| = \varepsilon\frac{\|T\|}{\|T\|+1} < \varepsilon\,.$$

Nach Lemma 1.7 ist T also stetig auf E. □

Der Beweis des folgenden Lemmas ist eine leichte Übungsaufgabe.

1.9. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Mit der in 1.8 eingeführten Operatornorm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ gilt:*

(a) *$(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ ist ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum.*
(b) *Ist $(F, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so auch $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$.*
(c) *Ist $(G, \|\cdot\|_G)$ ein weiterer normierter Raum, so gilt für alle $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $S \in \mathcal{L}(F,G)$: Es ist $ST := S \circ T \in \mathcal{L}(E,G)$ und $\|ST\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(F,G)}\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Insbesondere ist für alle normierten $\mathbb{K}$–Vektorräume $(E, \|\cdot\|_E)$ der topologische Dualraum E' versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{E'} := \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ ein Banachraum.

Mit $E = F = G$ folgt aus (c), daß $\mathcal{L}(E)$, versehen mit der Operatornorm, eine normierte Algebra ist (sogar eine Banachalgebra, falls $(E, \|\cdot\|_E)$. vollständig ist).

Die stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum lassen sich auch wie folgt charakterisieren:

1.10. Lemma. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Für ein nicht identisch verschwindendes, lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist stetig.*
(b) *$\ker f := \{x \in E\,;\, f(x) = 0\}$ ist abgeschlossen in E.*
(c) *$\ker f$ ist nicht dicht in E.*
(d) *Es gibt eine Nullumgebung U, für die die Menge $f(U)$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist.*

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(b)": Ist f stetig, so ist $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung f abgeschlossen in $(E, \|\cdot\|)$.

Die Implikation (b)$\Longrightarrow$(c) ist offensichtlich.

"(c)$\Longrightarrow$(d)": Ist $\ker f$ nicht dicht in E, so gibt es ein $x \in E$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \cap \ker f = \emptyset$. Ist $v \in E$ mit $|f(v)| > |f(x)|$, so ist $x - \frac{f(x)}{f(v)}v \in \ker f$ und daher $\frac{f(x)}{f(v)}v \notin U_\varepsilon(0)$ (beachte $U_\varepsilon(x) \cap \ker f = \emptyset$ und $U_\varepsilon(x) = x + U_\varepsilon(0) = \{x + u\,;\, u \in U_\varepsilon(0)\}$). Wegen $\big|\frac{f(x)}{f(v)}\big| < 1$ ist dann auch v kein Element von $U_\varepsilon(0)$. Für alle $v \in U_\varepsilon(0)$ muß also $|f(v)| \leq |f(x)|$ gelten. $f(U_\varepsilon(x))$ ist somit eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}$.

"(d)$\Longrightarrow$(a)": Sei nun (d) erfüllt und sei U eine Umgebung von 0, für die $f(U)$ beschränkt in $\mathbb{K}$ ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subseteq U$. Für alle $x \in B_E$ ist $\frac{\varepsilon}{2}x \in U_\varepsilon(0)$. Es folgt

$$\sup_{x \in B_E} |f(x)| = \sup_{x \in B_E} \frac{2}{\varepsilon}\Big|f\Big(\frac{\varepsilon}{2}x\Big)\Big| \leq \frac{2}{\varepsilon}\sup_{v \in U} |f(v)| < \infty\,.$$

Nach Lemma 1.8 ist f also stetig auf E. □

Sind (X,d) und (Y,δ) zwei metrische Räume, so nennt man bekanntlich eine Abbildung $f : X \to Y$, die die Abstände erhält, d.h. $\delta(f(u), f(v)) = d(u,v)$ für alle $u, v \in X$ erfüllt, eine *Isometrie*. Die metrischen Räume (X,d) und (Y,δ) heißen zueinander *isometrisch*, falls es eine bijektive Isometrie f von X auf Y gibt. Dann ist auch $f^{-1} : Y \to X$ wieder eine Isometrie. Die beiden metrischen Räume unterscheiden sich dann nicht in ihrer metrischen Struktur und sind insbesondere zueinander homöomorph. Sind (X,d) und (Y,δ) zueinander isometrisch, so schreiben wir $(X,d) \cong (Y,\delta)$. Man rechnet nach, daß $\cong$ eine Äquivalenzrelation ist.

Sind nun $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume, so ist eine lineare Abbildung $T : E \to F$ genau dann eine Isometrie, wenn $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ für alle $x \in E$ gilt. Eine bijektive lineare Isometrie nennen wir auch einen *isometrischen Isomorphismus.* $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ heißen zueinander *isometrisch isomorph*, falls es einen isometrischen Isomorphismus von X auf Y gibt. Wir schreiben dann auch wieder $(E, \|\cdot\|_E) \cong (F, \|\cdot\|_F)$. Zueinander isometrisch isomorphe normierte Räume unterscheiden sich weder in ihrer linearen, noch in ihrer metrischen Struktur und werden als im Rahmen der Theorie normierter Räume als nicht wesentlich verschieden angesehen.

Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt ein *topologischer Isomorphismus*, falls T bijektiv (und damit ein $\mathbb{K}$–Vektorraumisomorphismus) ist und T und T^{-1} stetig sind. In diesem Fall sagen wir: $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ sind zueinander *topologisch isomorph.* Wir schreiben dann $(E, \|\cdot\|_E) \simeq (F, \|\cdot\|_F)$. Man rechnet nach, daß $\simeq$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist. Zueinander topologisch isomorphe normierte Räume $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ unterscheiden sich weder in ihrer linearen noch in ihrer topologischen Struktur. So ist eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E genau dann eine Cauchy–Folge (bzw. konvergent) in E, wenn $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ in E eine Cauchy–Folge (bzw. konvergent) ist. $(E, \|\cdot\|_E)$ ist genau dann vollständig, wenn $(F, \|\cdot\|_F)$ es ist.

Mit Hilfe von Lemma 1.8 zeigen wir nun die folgende Charakterisierung der topologischen Isomorphismen:

1.11. Satz. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ ist genau dann ein topologischer Isomorphismus, wenn es Konstanten $c > 0$ und $C > 0$ gibt, so daß für alle $x \in E$ gilt*

$$c\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E\,. \tag{1.1}$$

Beweis. Ist $T : R \to F$ ein toplogischer Isomorphismus, so ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$ und $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ sowie (im Fall $E \neq \{0\}$) $\|T\| > 0$ und $\|T^{-1}\| > 0$. Die Ungleichungen (1.1) sind dann erfüllt mit $c = \|T^{-1}\|^{-1}$ und $C = \|T\|$. Gilt umgekehrt (1.1) für alle $x \in E$, so folgt nach Lemma 1.8 die Stetigkeit von T und von T^{-1} sowie $\|T\| \leq C$ und $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$. □

1.12. Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $c > 0$ und $C > 0$ gibt, so daß für alle $x \in E$ gilt

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1\,. \tag{1.2}$$

Nach Satz 1.11 ist dies genau dann der Fall, wenn die Identität ein topologischer Isomorphismus von $(E, \|\cdot\|_1)$ auf $(E, \|\cdot\|_2)$ ist. Äquivalente Normen auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E definieren die gleiche Topologie auf E.

1.13. Satz. *Jeder normierte $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ der endlichen Dimension $\dim E = N < \infty$ ist topologisch isomorph zu $(\mathbb{K}^N, |\cdot|)$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach N. Für $N = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei nun schon gezeigt, daß die Behauptung für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gilt, und sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension $N + 1$. Wir fixieren eine

Basis $e_0, \ldots, e_N$ von E und definieren lineare Funktionale $\varphi_j : E \to \mathbb{K}$ durch $\varphi_k(x) = a_k$ für alle $x = \sum_{j=0}^N a_j e_j \in E$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $k = 0, \ldots, N$. Dann hat für $k = 0, \ldots, N$ der Untervektorraum

$$E_k := \ker \varphi_k = \mathrm{LH}\{e_j \,;\, 0 \le j \le N, j \ne k\}$$

die Dimension N. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(E_k, \|\cdot\|\big|_{E_k})$ also topologisch isomorph zu $(\mathbb{K}^N, |\cdot|)$ und damit insbesondere vollständig, also nach Lemma 1.3 abgeschlossen in $(E, \|\cdot\|)$, $k = 0, \ldots, N$. Insbesondere sind die Funktionale $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ nach Lemma 1.10 stetig. Die durch

$$\Phi(x) := (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_N(x)), \qquad (x \in E)$$

definierte Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{K}^{N+1}$ ist offensichtlich ein $\mathbb{K}$-Vektorraumisomorphismus. Für alle $x \in B_E$ gilt

$$|\Phi(x)| = \Big(\sum_{j=0}^N |\varphi_j(x)|^2 \Big)^{1/2} \le \sqrt{N+1} \max_{0 \le j \le N} \|\varphi_j\| \,.$$

Φ ist also nach Lemma 1.8 stetig. Die inverse Abbildung $\Phi^{-1} : \mathbb{K}^{N+1} \to E$ ist gegeben durch

$$\Phi^{-1}\big((a_j)_{j=0}^N\big) = \sum_{j=0}^N a_j e_j \,, \qquad (a_j)_{j=0}^N \in \mathbb{K}^{N+1}.$$

Unter Verwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung erhalten wir:

$$\sup_{a \in B_{\mathbb{K}^{N+1}}} \big\|\Phi^{-1}(a)\big\| = \sup_{(a_j)_{j=0}^N \in B_{\mathbb{K}^{N+1}}} \Big\| \sum_{j=0}^N a_j e_j \Big\| \le \sup_{(a_j)_{j=0}^N \in B_{\mathbb{K}^{N+1}}} \sum_{j=0}^N |a_j| \cdot \|e_j\| \le$$
$$\le \Big(\sum_{j=0}^N \|e_j\|^2 \Big)^{1/2} < \infty \,.$$

Also ist auch Φ^{-1} stetig, und Φ ist ein topologischer Isomorphismus. □

1.14. Folgerungen. (a) *Je zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume der Dimension $N < \infty$ sind zueinander topologisch isomorph.*

(b) *Je zwei Normen auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraum E definieren die gleiche Topologie auf E.*
(c) *Jeder endlich dimensionale $\mathbb{K}$–Vektorraum ist vollständig.*
(d) *Jeder endlich dimensionale Unterraum eines normierten $\mathbb{K}$–Vektorraums E ist abgeschlossen in E.*
(e) *In einem normierten, endlich dimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|_E)$ ist eine Teilmenge $M \subset E$ genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Insbesondere ist die abgeschlossene Einheitskugel $B_E := \{x \in E \,;\, \|x\|_E \le 1\}$ kompakt.*

In unendlich dimensionalen normierten Räumen ist die Aussage (e) falsch. Bevor wir dies beweisen, zeigen wir:

1.15. Lemma (Riesz). *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $F \subsetneq E$ ein echter abgeschlossener Unterraum von E. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ ein $x \in E \setminus F$ mit $\|x\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\| \ge \varepsilon$.*

Beweis. Wegen $F \ne E$ gibt es ein $u \in E \setminus F$. Da F abgeschlossen ist gilt $d := \operatorname{dist}(u, F) = \inf_{y \in F} \|u - y\| > 0$. Zu $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es dann ein $\delta > 0$ mit $\varepsilon \le \frac{d}{d+\delta}$. Zu diesem $\delta > 0$ gibt es ein $y_\delta \in F$ mit $d \le \|u - y_\delta\| < d + \delta$. Mit

$$x := \frac{1}{\|u - y_\delta\|}(u - y_\delta)$$

gilt dann $\|x\| = 1$. Für alle $v \in F$ ist $y_\delta + \|u - y_\delta\| v \in F$ und somit

$$\|x - v\| = \left\| \frac{1}{\|u - y_\delta\|}(u - y_\delta) - v \right\| = \frac{\big\|u - y_\delta - \|u - y_\delta\| v\big\|}{\|u - y_\delta\|} \ge \frac{d}{d + \delta} > \varepsilon\,.$$

Also ist $\operatorname{dist}(x, F) := \inf_{v \in F} \|x - v\| \ge \varepsilon$. $\square$

1.16. Folgerung. *Für einen normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E; \|\cdot\|)$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(a) *E ist endlich dimensional.*
(b) *E ist lokalkompakt, d.h. jeder Punkt in E besitzt wenigstens eine kompakte Umgebung.*
(c) *$B_E = \{x \in E\,;\, \|x\| \le 1\}$ ist kompakt.*

Beweis. " (a)$\Longrightarrow$(b)": Ist $\dim E = N < \infty$, so ist $(E; \|\cdot\|)$ topologisch isomorph zu $(\mathbb{K}^N, |\cdot|)$ und damit lokalkompakt.

" (b)$\Longrightarrow$(c)": Sei $(E; \|\cdot\|)$ lokalkompakt. Dann gibt es eine kompakte Umgebung U von 0. Zu U gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(0, \varepsilon) := \{x \in E\,;\, \|x\| \le \varepsilon\} \subseteq U$. Da die Norm $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $B(0, \varepsilon) = \|\cdot\|^{-1}([0, \varepsilon])$ abgeschlossene Teilmenge von U und damit ebenfalls kompakt. Nun ist die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{\varepsilon} x$ eine Homöomorphie von $(E, \|\cdot\|)$ auf sich. Also ist $B_E = \frac{1}{\varepsilon} B(0, \varepsilon)$ ebenfalls kompakt.

" (c)$\Longrightarrow$(a)": Wir zeigen: Ist $\dim E = \infty$, so ist B_E zwar abgeschlossen und beschränkt aber *nicht* kompakt. Wegen $\dim E = \infty$ gibt es ein $x_1 \in E$ mit $\|x_1\| = 1$. Sind nun schon für ein $n \in \mathbb{N}$ Elemente $x_1, \ldots, x_n \in E$ konstruiert mit

$$\|x_j\| = 1 \quad \text{und} \quad \|x_j - x_k\| \ge \frac{1}{2} \quad \text{für alle } j, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } j \ne k,$$

so ist $Y_n := \mathrm{LH}\{x_1, \ldots, x_n\}$ als endlich dimensionaler Untervektorraum von E nach Folgerung 1.14 abgeschlossen in E und echte Teilmenge von E. Nach dem Lemma von Riesz 1.15 gibt es also ein Element $x_{n+1} \in E \setminus Y_n$ mit $\|x_{n+1}\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_{n+1}, Y_n) \ge \frac{1}{2}$. Damit haben wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in B_E konstruiert mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit $\|x_n - x_k\| \ge \frac{1}{2}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \ne n$. Da diese Folge keine konvergente Teilfolge besitzt, kann B_E nicht kompakt sein. $\square$

In den Übungen (Aufgabe 1.9) wird gezeigt, daß es zu jedem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ einen Banachraum $(F, \|\cdot\|_F)$ und eine lineare Isometrie $J : E \to F$ so gibt, daß $J(F)$ dicht in F liegt. $(F, \|\cdot\|_F)$ heißt dann *Vervollständigung* von $(E, \|\cdot\|)$. Wir zeigen nun, daß diese bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist:

1.17. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Sind $(F_1, \|\cdot\|_1)$ und $(F_2, \|\cdot\|_2)$ zwei Banachräume und $J_1 : E \to F_1$, $J_2 : E \to F_2$ zwei lineare Isometrien, für die $J_j(E)$ in F_j dicht liegt für $j = 1, 2$, so gibt es einen isometrischen Isomorphismus $V : F_1 \to F_2$ mit $V J_1 x = J_2 x$ für alle $x \in E$.*

Beweis. Zu jedem $u \in F_1$ gibt es nach Voraussetzung eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E mit $J_1 x_n \to u$ in $(F_1, \|\cdot\|_1)$ für $n \to \infty$. Dann sind $(x_n)_{n=1}^\infty$ und damit auch $(J_2 x_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyfolgen in $(E, \|\cdot\|)$ bzw. $(F_2, \|\cdot\|_2)$. Da $(F_2, \|\cdot\|_2)$ vollständig ist existiert also $Vu := \lim_{n\to\infty} J_2 x_n$ in F_2. Man rechnet leicht nach, daß Vu unabhängig von der speziell gewählten Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ mit $J_1 x_n \to u$ ist und daß die so definierte Abbildung $V : F_1 \to F_2$ linear ist. Wegen der Stetigkeit der Normen gilt weiter

$$\|Vu\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|J_2 x_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|J_1 x_n\|_1 = \|u\|_1 \, .$$

Ist schließlich $v \in F_2$ beliebig, so gibt es auch eine Folge $(y_n)_{n=1}^\infty$ in E mit $J_2 y_n \to v$ in F_2 für $n \to \infty$. Da J_1, J_2 lineare Isometrien sind, ist dann wie oben $(J_1 y_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyfolge in $(F_1, \|\cdot\|_1)$, also gegen ein $u \in F_1$ konvergent. Es folgt $Vu = v$. Also ist V auch surjektiv und damit ein isometrischer Isomorphismus. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 1. Eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion heißt bekanntlich *konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \, .$$

Die Funktion f heißt *strikt konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in (0,1)$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \, .$$

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konkav* (bzw. *strikt konkav*), falls die Funktion $-f$ konvex (bzw. strikt konvex) ist.

1.1. AUFGABE. Zeigen Sie: Ist $f \in C^2(I)$ mit $f''(x) \ge 0$ (bzw. $f''(x) > 0$) für alle $x \in I$, so ist f konvex (bzw. strikt konvex).

1.2. AUFGABE. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x_1, \dots, x_n \in I$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ gilt die *Jensensche Ungleichung*:

$$f\big(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\big) \le \alpha_1 f\big(x_1\big) + \dots + \alpha_n f\big(x_n\big) \, . \tag{1.3}$$

(b) Ist f strikt konvex und sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, so gilt in (1.3) genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ist.

1.3. AUFGABE. Sei $p > 1$, $p' := \frac{p}{p-1}$ und $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in (0,\infty)^N$. Zeigen Sie: Für alle $(a_1, \dots, a_N), (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{K}^N$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) gilt:

(a) $\displaystyle \Big|\sum_{j=1}^N a_j b_j \omega_j\Big| \le \sum_{j=1}^N |a_j b_j| \omega_j \le \Big(\sum_{j=1}^N |a_j|^p \omega_j\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^N |b_j|^{p'} \omega_j\Big)^{1/p'}$,

(b) $\displaystyle \Big(\sum_{j=1}^N |a_j + b_j|^p \omega_j\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{j=1}^N |a_j|^p \omega_j\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{j=1}^N |b_j|^p \omega_j\Big)^{1/p}$.

Wann gilt in diesen beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen?

Hinweis: Man beachte für (a), daß die Funktion $x \mapsto x^{p'}$ strikt konvex und für (b), daß die Funktion $x \mapsto \big(1 + x^{1/p}\big)^p$ strikt konkav auf $(0,\infty)$ ist.

1.4. AUFGABE. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige konvexe Funktion und $g \in C([a,b])$ mit $g([a,b]) \subset I$ und $b - a = 1$. Zeigen Sie:

$$f\left(\int_a^b g(x)dx\right) \le \int_a^b f(g(x))dx \, .$$

1.5. AUFGABE. Seien $x_1, \dots, x_n \in [0,\infty)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Beweisen Sie die Ungleichung für die gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \ge x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Zeigen Sie, daß das Gleichheitszeichen hierbei genau dann gilt, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ist.

1.6. Aufgabe. Führen Sie die Vollständigkeitsbeweise zu den Beispielen in 1.4 aus.

1.7. Aufgabe. Führen Sie den Beweis zu Lemma 1.9 aus.

1.8. Aufgabe. Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und sei $F \subsetneq E$ ein abgeschlossener Unterraum von E. Zeigen Sie, daß der kanonische Epimorphismus $\pi : E \to E/F$ stetig ist und berechnen Sie $\|\pi\|_{\mathcal{L}(E,E/F)}$.

1.9. Aufgabe. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Mit $c(X)$ sei die Menge aller Cauchy-Folgen in X bezeichnet, mit $c_0(X)$ die aller Nullfolgen in X.

(a) Zeigen Sie, daß $c(X)$ ein normierter Raum ist bezüglich der sup-Norm und daß $c_0(X)$ ein abgeschlossener Untervektorraum davon ist.
(b) Zeigen Sie, daß die Quotientennorm auf $\widehat{X} := c(X)/c_0(X)$ gegeben ist durch $\|(x_n)_n + c_0(X)\|_Q = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|$.
(c) Zeigen Sie, daß $(\widehat{X}, \|\cdot\|_Q)$ vollständig ist.
(d) Betten Sie X isometrisch in $\widehat{X}$ ein und zeigen Sie, daß X durch diese Einbettung dichter Teilraum von $\widehat{X}$ ist.

1.10. Aufgabe. (Bergman–Räume) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $1 \le p < \infty$. Der *Bergman–Raum* $A^p(G)$ sei der Raum aller auf G holomorphen Funktionen f auf G, für die gilt

$$\|f\|_p := \Big(\int_G |f(z)|^p d\lambda(z)\Big)^{1/p} < \infty\,.$$

Hierbei sei λ daß ebene Lebesguemaß.

(a) Mit $\delta(z) := \inf\{|z-w|,\, w \notin G\} \in (0,\infty]$ für alle $z \in G$ gilt für $f \in A^p(G)$, $z \in G$ und $0 < R < \delta(z)$

$$(i)\ f(z) = \frac{1}{\pi R^2}\int_{|z-\zeta|<R} f(\zeta)\,d\lambda^2(\zeta), \quad (ii)\ |f(z)| \le \frac{1}{(\pi\delta(z)^2)^{1/p}}\|f\|_{A^p(G)}.$$

(b) $(A^p(G), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum.

1.11. Aufgabe. (Hardy-Räume) Sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Der *Hardy-Raum* $H^2(\mathbb{D})$ ist definiert als

$$H^2(\mathbb{D}) := \Big\{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) |\ \sup_{0\le r<1} \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} := \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt\Big)^{1/2} < \infty\Big\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} := \sup_{0\le r<1}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2\,dt}$ ist eine Norm auf $H^2(\mathbb{D})$.

(b) Ist $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ eine Funktion in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$, dann ist $f \in H^2(\mathbb{D})$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 < \infty$ ist und in diesem Fall ist $\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sum_{k=0}^\infty |a_k|^2$. (*Hinweis: Cauchy-Produkt von Reihen.*)

(c) Folgern Sie aus b) die Vollständigkeit von $(H^2(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{H^2(\mathbb{D})})$.

(d) Zu jedem $z_0 \in \mathbb{D}$ existiert ein $C(z_0) > 0$, so daß $|f(z_0)| \le C(z_0)\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ für alle $f \in H^2(\mathbb{D})$.

1.12. Aufgabe. Ein metrischer Raum E heißt *separabel*, wenn er eine abzählbar dichte Teilmenge besitzt, d.h. falls es eine abzählbare Teilmenge A in E gibt, so daß jedes Element von E Grenzwert einer Folge von Elementen aus A ist.

Sei I eine nicht leere Menge und bezeichne $\ell^\infty(I)$ die Menge aller beschränkten Familien $x = (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in \mathbb{C}$ für alle $i \in I$. $c_0(I)$ sei die Menge aller $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$, für die zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge J von I existiert mit $|x_j| < \varepsilon$ für alle $j \in I \setminus J$.

(a) Zeigen Sie, daß $c_0(I)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\ell^\infty(I)$ ist, der genau dann separabel ist, wenn I höchstens abzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\ell^\infty(I)$ genau dann separabel ist, wenn I endlich ist.
(*Hinweis: Indirekter Beweis!*)

1.13. Aufgabe. Sei $X := C([0,1])$ der Banachraum der auf $[0,1]$ stetigen komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Sei V der durch

$$(Vf)(t) := \int_0^t f(s)ds \qquad f \in X, t \in [0,1],$$

definierte Operator auf X.

(a) Zeigen Sie $V \in \mathcal{L}(X)$ und berechnen Sie $\|V^n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Zeigen Sie $\rho(V) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, (zI - V)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{L}(X)\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und geben Sie $(zI - V)^{-1}$ für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$ an.

1.14. Aufgabe. Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie, daß zu jedem endlichdimensionalen Untervektorraum Y von X und jedem Punkt $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert mit $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|,\, z \in Y\}$. Zeigen Sie am Beispiel $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, daß diese *Bestapproximation* im allgemeinen nicht eindeutig ist.

KAPITEL 2

Elementare Hilbertraumtheorie

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die Hilbertraumtheorie gegeben. Im folgenden stehe $\mathbb{K}$ stets für den Körper der reellen oder den der komplexen Zahlen.

2.1. Definition. Ein $\mathbb{K}$–Vektorraum $\mathcal{H}$ heißt *Prä–Hilbertraum*, falls $\mathcal{H}$ mit einem *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen ist, das ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(S1) Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $\langle x, x \rangle$ reell und nicht negativ. Es ist $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(S2) Für alle $u \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x, u \rangle$ linear, d.h. es gilt:

$$\forall x, y \in \mathcal{H}\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad \langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle y, u \rangle \, .$$

(S3) $\forall x, y \in \mathcal{H} : \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

2.2. Bemerkungen. **(a)** Ist $\mathbb{K}$ der Körper der reellen Zahlen, so kann man den Querstrich in (S3) weglassen.

(b) Aus den Eigenschaften (S2) und (S3) des Skalarproduktes ergibt sich

(S4) $\forall x, u, v \in \mathcal{H}\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad \langle x, \alpha u + \beta v \rangle = \bar{\alpha} \langle x, u \rangle + \bar{\beta} \langle x, v \rangle \, .$

Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist also die Abbildung $\langle x, \cdot \rangle : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ konjugiert linear (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ also sogar linear).

2.3. Beispiele. (a) Versehen mit dem durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{N} x_j \overline{y_j} \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_N)^t, y = (y_1, \ldots, y_N)^t \in \mathbb{K}^N$$

definierten Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind die Spaltenvektorräume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{C}^N$ Prä–Hilberträume (über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$).

(b) $\mathcal{H} := C([a, b], \mathbb{K})$ (mit $a < b$) ist versehen mit dem durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)}\, dt \quad \text{für } f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$$

definierten Skalarprodukt ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Lebesgue–meßbar. Dann ist $L^2(\Omega)$ mit dem durch

$$\langle f, g \rangle := \int_\Omega f(x) \overline{g(x)}\, d\lambda_N(x) \quad \text{für } f, g \in L^2(\Omega)$$

definierten Skalarprodukt ein Prä–Hilbertraum.

(d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{D}^k(\Omega)$ der Raum der auf Ω k-mal stetig differenzierbaren $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. Dann ist $\mathcal{D}^k(\Omega)$ mit dem durch

$$\langle f, g \rangle := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) \overline{\frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha}(x)}\, d\lambda_N(x) \quad \text{für } f, g \in \mathcal{D}^k(\Omega)$$

definierten Skalarprodukt ein Prä–Hilbertraum.

(e) $\ell^2(I)$ mit dem durch $\langle x,y\rangle := \sum_{i\in I} x_i\overline{y_i}$ für $x=(x_i)_{i\in I}$ und $y=(y_i)_{i\in I}$ aus $\ell^2(I)$. Man beachte hierbei, daß $(x_i\overline{y_i})_{i\in I}$ aufgrund der Hölderschen Ungleichung summierbar ist.

Bemerkung. Ist $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und $\mathcal{K}$ ein Untervektorraum, so ist auch $(\mathcal{K},\langle,\cdot,\cdot\rangle|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}})$ wieder ein Prä-Hilbertraum.

Dies rechnet man unmittelbar nach.

2.4. Satz. *Sei $\mathcal{H}$ ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$ und sei $\|\cdot\| : \mathcal{H}\to[0,\infty)$ definiert durch $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ für alle $x\in\mathcal{H}$.*

(a) *Es gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung:*

$$\forall x,y\in\mathcal{H}:\quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|\,. \tag{2.1}$$

Genau dann steht hierbei das Gleichheitszeichen, wenn die Vektoren x und y linear abhängig sind.

(b) *$\|\cdot\| : \mathcal{H}\to[0,\infty)$ ist eine Norm auf $\mathcal{H}$. Diese nennt man die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definierte Norm auf $\mathcal{H}$.*

(c) *Es gelten die Parallelogrammgleichung*

$$\forall x,y\in\mathcal{H}: \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \tag{2.2}$$

und die Polarisierungsidentität

$$\forall x,y\in\mathcal{H}: \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) \tag{2.3}$$

im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ bzw.

$$\forall x,y\in\mathcal{H}: \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|-i\|x-iy\|\right) \tag{2.4}$$

im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Beweis. (a) Für $y=0$ und alle $x\in\mathcal{H}$ gilt (unter Verwendung von (S4)): $|\langle x,y\rangle| = |\langle x,0\cdot y\rangle| = |0\cdot\langle x,y\rangle| = 0$ und in diesem Fall sind x und y linear abhängig.

Sei also nun $y\neq 0$ vorausgesetzt. Nach (S1) ist dann $\|y\|^2=\langle y,y\rangle>0$. Mit

$$\lambda := \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$$

folgt unter Verwendung von (S3)

$$\lambda\langle y,x\rangle = \frac{\langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle} = \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

und

$$\begin{aligned} 0\le\langle x-\lambda y,\, x-\lambda y\rangle =& \langle x,x\rangle-\lambda\langle y,x\rangle-\bar\lambda\langle x,y\rangle+|\lambda|^2\langle y,y\rangle = \\ =& \langle x,x\rangle-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\langle y,y\rangle$ liefert

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

woraus durch Wurzelziehen (2.1) folgt. Wie man aus der Rechnung sieht, gilt das Gleichheitszeichen in (2.1) genau dann, wenn $\langle x-\lambda y,\, x-\lambda y\rangle = 0$, d.h. wenn $x=\lambda y$, d.h. wenn x und y linear abhängig sind.

(b) Die Eigenschaften (N1) und (N2) rechnet man unmittelbar mit Hilfe von (S1) –(S4) nach.

Zur Dreiecksungleichung (N3): Aus der Definition der Norm und den Skalarprodukteigenschaften erhält man unter Verwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 =& \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \\ \leq& \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq \\ \leq& \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung.

(c) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

(d) rechnet man in ähnlicher Weise elementar nach. □

2.5. Bemerkung. Die Prä–Hilberträume sind unter den normierten $\mathbb{K}$–Vektorräumen durch die Parallelogrammgleichung charakterisiert, d.h.: Ist $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum, dessen Norm die Parallelogrammgleichung (2.2) erfüllt, so ist durch die Polarisierungsgleichung (2.3) bzw. (2.4) ein Skalarprodukt gegeben, dessen zugehörige Norm mit der ursprünglichen Norm übereinstimmt.

Beweis als Übung (Aufgabe 2.1).

2.6. Definition. Ein Prä–Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{K}$, der bezüglich der durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definierten Norm vollständig ist, heißt ein *Hilbertraum*.

2.7. Beispiele. (a) Die in den Beispielen 2.3 (a), (c) und (e) angegebenen Prä–Hilberträume sind Hilberträume.

(b) Die in den Beispielen 2.3 (b) und (d) angegebenen Prä–Hilberträume sind keine Hilberträume.

2.8. Bemerkung. Seien $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Prä-Hilberträume. Ist $V : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ eine lineare Isometrie, so gilt:

$$\forall x, y \in \mathcal{H}_1 \quad \langle Vx, Vy\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1\,.$$

Lineare Isometrien erhalten also das Skalarprodukt.

Dies folgt mit der Polarisierungsgleichung unmittelbar aus der Tatsache, daß V eine lineare Isometrie ist.

2.9. Satz. *Zu jedem Prä–Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gibt es einen bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmten Hilbertraum $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$, der $\mathcal{H}$ als Untervektorraum enthält und folgende Eigenschaften besitzt:*

(a) $\forall x, y \in \mathcal{H} \quad [x, y] = \langle x, y\rangle$.

(b) *Zu jedem $x \in \mathcal{K}$ gibt es eine Cauchy–Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ aus $\mathcal{H}$ mit $x_n \to x$ in $\mathcal{K}$ bezüglich der durch das Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]$ auf $\mathcal{K}$ gegebenen Norm.*

Der Hilbertraum $\mathcal{K}$ heißt die Vervollständigung von $\mathcal{H}$.

Beweis. Sei $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_{\mathcal{K}})$ die nach Satz 1.17 bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmte Vervollständigung von $\mathcal{H}$. Dann gibt es eine lineare Isometrie $J : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, für die $J(\mathcal{H})$ dicht in $\mathcal{K}$ liegt. Zu beliebigen $u, v \in \mathcal{K}$ gibt es dann Cauchyfolgen $(x_n)_{n=1}^\infty$ und $(y_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{H}$ mit $Jx_n \to u$ und $Jy_n \to v$ in $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_{\mathcal{K}})$ für $n \to \infty$. Da die Parallelogrammgleichung in $\mathcal{H}$ gilt und J eine lineare Isometrie ist, folgt wegen der Stetigkeit der Norm:

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{\mathcal{K}}^2+\|u-v\|_{\mathcal{K}}^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\|Jx_n+Jy_n\|_{\mathcal{K}}^2+\|Jx_n-Jy_n\|_{\mathcal{K}}^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\|x_n+y_n\|^2+\|x_n-y_n\|^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} 2\left(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2\right)\\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left(\|Jx_n\|_{\mathcal{K}}^2+\|Jy_n\|_{\mathcal{K}}^2\right)\\ &= 2\left(\|u\|_{\mathcal{K}}^2+\|v\|_{\mathcal{K}}^2\right)\,.\end{aligned}$$

$(\mathcal{K},\|\cdot\|_{\mathcal{K}})$ erfüllt also die Parallelogrammgleichung. Nach Aufgabe 2.1 wird nun durch die Polarisierungsgleichung ein Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]:\mathcal{K}\times\mathcal{K}\to\mathbb{K}$ definiert dessen zugehörige Norm mit $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ übereinstimmt. Der Rest folgt nun leicht mit Bemerkung 2.8 und Satz 1.17.

□

In Analogie zum endlich-dimensionalen Fall definiert man: Zwei Vektoren x,y in einem Prä–Hilbertraum $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißen zueinander *orthogonal* (oder *senkrecht zueinander*), falls $\langle x,y\rangle=0$ gilt. Wir schreiben dann auch $x\perp y$. Ist A eine nicht leere Teilmenge von $\mathcal{H}$, so definieren wir den *Orthogonalraum*

$$A^{\perp}:=\{x\in\mathcal{H}\,;\,\forall a\in A:\ \langle x,a\rangle=0\}$$

Statt $x\in A^{\perp}$ schreiben wir auch $x\perp A$.

2.10. Lemma. *Sei $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum und $\emptyset\neq A\subset\mathcal{H}$.*
(a) *Ist $A\subseteq B\subseteq\mathcal{H}$, so gilt $B^{\perp}\subseteq A^{\perp}$.*
(b) $A^{\perp}=\overline{A}^{\perp}$.
(c) *$A^{\perp}$ ist abgeschlossener Unterektorraum von $\mathcal{H}$.*
(d) $A^{\perp}=(\mathrm{LH}(A))^{\perp}$.

Beweis. (a) rechnet man unmittelbar nach.

(b) Nach (a) ist $\overline{A}^{\perp}\subseteq A^{\perp}$. Ist umgekehrt $x\perp A$ und $u\in\overline{A}$, so gibt es eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in A mit $a_n\to u$ für $n\to\infty$ und es folgt wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes $\langle x,u\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x,a_n\rangle=0$ und damit $x\in\overline{A}^{\perp}$.

(c) Es ist $A^{\perp}=\bigcap_{a\in A}\ker\langle\cdot,a\rangle$. Da die linearen Funktionale $\langle\cdot,a\rangle:x\mapsto\langle x,a\rangle$ wegen der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für alle $a\in A$ stetig sind, ist $A^{\perp}$ also ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$.

(d) Dies rechnet man leicht nach. □

2.11. Lemma (Satz des Pythagoras). *Sei $\mathcal{H}$ ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$. Sind $x,y\in\mathcal{H}$ mit $x\perp y$, so gilt:*

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\,.$$

Beweis. Wegen $\langle x,y\rangle=0$ hat man

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}+\|y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\,.$$

□

Durch vollständige Induktion zeigt man mit Hilfe von Lemma 2.11: Sind $x_1,\dots,x_n$ n paarweise orthogonale Vektoren eines Prä-Hilbertraums $\mathcal{H}$, so gilt

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n}x_j\Big\|^2=\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2\,.$$

2.12. Definition. Eine Teilmenge K eines $\mathbb{K}$–Vektorraums E heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in \mathbb{K}$ und alle $\alpha \in (0,1)$ auch $\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathbb{K}$ gilt.

Wir wollen uns nun dem folgenden *Approximationsproblem* zuwenden: Sei $(\mathcal{H}\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und sei K eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{H}$. Zu gegebenem $f \in \mathcal{H}$ suchen wir eine *Bestapproximation* aus K, d.h. ein $v \in K$ mit

$$\|f - v\| = \inf_{u\in K} \|f - u\| \,.$$

Fragestellungen dieser Art treten in verschiedenen Problemen der Anwendungen auf.

2.13. Beispiele. (a) Sei $\omega \in C([a,b],\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\omega(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$ und $\omega(t) = 0$ für höchstens endlich viele $t \in [a,b]$. Dann ist durch $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega : C([a,b],\mathbb{K}) \times C([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ mit

$$\langle f, g\rangle_\omega := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\omega(t)dt \quad \text{für } f, g \in C([a,b],\mathbb{K})$$

ein Skalarprodukt auf $C([a,b],\mathbb{K})$ gegeben. Sei $f \in C([a,b],\mathbb{K})$. Gesucht ist ein Polynom p_f vom Grad $\leq n$ mit

$$\|f - p_f\|_\omega \leq \inf\{\|f - p\|_\omega \,;\, p \text{ Polynom vom Grad } \leq n\} \,.$$

Hier ist $K = \mathcal{P}_n$ der $(n+1)$–dimensionale Untervektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Man spricht von Approximation im quadratischen Mittel oder von Gaußapproximation.

(b) Das lineare Ausgleichsproblem: Gegeben sei eine Matrix $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ und ein Vektor $b \in \mathbb{K}^n$. Gesucht ist ein Vektor $x_0 \in \mathbb{K}^m$ der das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ *möglichst gut* löst, d.h. für den gilt

$$\|b - Ax_0\| = \inf_{x\in\mathbb{K}^m} \|b - Ax\| \,.$$

Hier ist $K = \operatorname{ran}(A) = \{Ax \,;\, x \in \mathbb{K}^m\}$.

Das obige Approximationsproblem wird gelöst durch:

2.14. Satz. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum und sei $\emptyset \neq K \subset \mathcal{H}$ vollständig und konvex. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ genau ein $y \in K$ mit*

$$\|x - y\| = \inf_{u\in K} \|x - u\| = \delta \,.$$

y ist also die eindeutig bestimmte Bestapproximation zu x aus K.

Beweis. Zur Existenz einer Bestapproximation: Es gibt eine Folge $(u_n)_{n=1}^\infty$ in K mit $\lim_{n\to\infty} \|x - u_n\| = \delta$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $0 \leq \|x - u_n\|^2 - \delta^2 < \varepsilon^2/4$. Mit Hilfe der Parallelogrammgleichung (angewendet auf die Vektoren $\xi = x - u_n$ und $\eta = x - u_m$) erhalten wir für alle $n, m \geq n_0$ (unter Verwendung von $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$):

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= 2\left(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2\right) - 4\Big\|x - \frac{1}{2}(u_n + u_m)\Big\|^2 \\ &\leq 2\left(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2\right) - 4\delta^2 < \varepsilon^2 \,.\end{aligned}$$

Also ist $(u_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy–Folge. Da K nach Voraussetzung vollständig ist (in der durch die Norm $\|\cdot\|$ induzierten Metrik), existiert der Grenzwert $y := \lim_{n\to\infty} u_n$ und liegt in K. Wegen

$$\inf_{u\in K} \|x - u\| = \delta = \lim_{n\to\infty} \|x - u_n\| = \|x - y\|$$

ist y also eine Bestapproximation zu x aus K.

Zur Eindeutigkeit: Seien $y_1, y_2 \in K$ zwei Bestapproximationen zu x aus K mit $\|x - y_j\| = \delta$. Dann folgt wieder unter Anwendung der Parallelogrammgleichung und unter Beachtung von $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in K$ (wegen der Konvexität von K):

$$0 \leq \|y_1 - y_2\|^2 = 2(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2) - 4\Big\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Big\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\Big\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Big\|^2 \leq 0$$

und damit $y_1 = y_2$. ☐

2.15. Folgerung. *Sei $\mathcal{H}$ ein Prä–Hilbertraum und $\mathcal{K}$ ein endlich dimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ genau ein $y \in \mathcal{K}$ mit $\|x - y\| = \inf_{u \in \mathcal{K}} \|x - u\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{K})$.*

Beweis. Als endlich dimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{K}$ nach Folgerung 1.17 vollständig. Da $\mathcal{K}$ als Untervektorraum insbesondere konvex ist, folgt die Behauptung aus Satz 2.14. ☐

Bemerkung. Wie Sie selbst mit Hilfe eines einfachen Kompaktheitsschlusses zeigen können (Aufgabe 1.14), existiert ganz allgemein in jedem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ zu jedem endlich dimensionalen Untervektorraum V und jedem $x \in E$ eine Bestapproximation zu x aus V. Jedoch ist die Eindeutigkeit (schon im Fall $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$) nicht mehr gewährleistet.

2.16. Folgerung. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ genau ein $y \in \mathcal{K}$ mit $\|x - y\| = \inf_{u \in \mathcal{K}} \|x - u\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{K})$.*

Beweis. Als abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{K}$ vollständig. Da $\mathcal{K}$ als Untervektorraum auch konvex ist, folgt die Behauptung aus Satz 2.14. ☐

2.17. Satz (Projektionssatz). *Sei $\mathcal{M}$ abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dann gilt $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. Jedes $x \in \mathcal{H}$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form $x = P_\mathcal{M}(x) + P_{\mathcal{M}^\perp}(x)$ mit $P_\mathcal{M}(x) \in \mathcal{M}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}(x) \in \mathcal{M}^\perp$. Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $P_\mathcal{M}(x)$ (bzw. $P_{\mathcal{M}^\perp}(x)$) die Bestapproximation zu x aus $\mathcal{M}$ (bzw. $\mathcal{M}^\perp$). Die hierdurch definierten Abbildungen $P_\mathcal{M}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}$ sind stetige lineare Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit $\|P_\mathcal{M}\| \leq 1$ ($= 1$, falls $\mathcal{M} \neq \{0\}$) und $\|P_{\mathcal{M}^\perp}\| \leq 1$ ($= 1$, falls $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$) sowie $P_\mathcal{M}^2 = P_\mathcal{M}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}^2 = P_{\mathcal{M}^\perp}$. Ferner gilt $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M}$.*

Beweis. Ist $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$, so ist $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$ und somit $x = 0$. Also ist $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$. Sei nun $x \in \mathcal{H}$ beliebig und sei $P_\mathcal{M}(x)$ die nach Folgerung 2.16 eindeutig bestimmte Bestapproximation zu x aus $\mathcal{M}$, so daß also gilt

$$\|x - P_\mathcal{M}(x)\| = \delta := \inf_{u \in \mathcal{H}} \|x - u\| .$$

Wir zeigen nun, daß $P_{\mathcal{M}^\perp}(x) := x - P_\mathcal{M}(x)$ in $\mathcal{M}^\perp$ liegt. Sei also $u \in \mathcal{M}$ beliebig vorgegeben. Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $P_\mathcal{M}(x) + \alpha u \in \mathcal{M}$ und daher $\|x - (P_\mathcal{M}(x) + \alpha u)\| \geq \delta$. Es folgt also

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - (P_\mathcal{M}(x) + \alpha u)\|^2 - \|x - P_\mathcal{M}(x)\|^2 \\ &\leq \langle (x - P_\mathcal{M}(x)) - \alpha u, (x - P_\mathcal{M}(x)) - \alpha u\rangle - \langle x - P_\mathcal{M}(x), x - P_\mathcal{M}(x)\rangle \\ &\leq -\alpha\langle u, x - P_\mathcal{M}(x)\rangle - \overline{\alpha}\langle x - P_\mathcal{M}(x), u\rangle + |\alpha|^2\|u\|^2. \end{aligned}$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir hieraus mit $\alpha := t\langle x - P_\mathcal{M}(x), u\rangle$:

$$0 \leq |\langle x - P_\mathcal{M}(x), u\rangle|^2(-2t + t^2\|u\|^2).$$

Diese Ungleichung kann nur dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten, wenn $\langle x - P_\mathcal{M}(x), u\rangle = 0$ ist. Da u ein beliebiger Vektor aus $\mathcal{M}$ war folgt also $P_{\mathcal{M}^\perp}(x) = x - P_\mathcal{M}(x) \in \mathcal{M}^\perp$. Es ist also $x = P_{\mathcal{M}}(x) + P_{\mathcal{M}^\perp}(x)$ mit $P_{\mathcal{M}}(x) \in \mathcal{M}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}(x) \in \mathcal{M}^\perp$. Insbesondere folgt $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ und die Linearität der Abbildungen $P_{\mathcal{M}}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}$.

Nach Pythagoras hat man

$$\forall x \in \mathcal{H} : \|P_{\mathcal{M}}(x)\|^2 + \|P_{\mathcal{M}^\perp}(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Hieraus folgt nach Lemma 1.9 die Stetigkeit von $P_{\mathcal{M}}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}$ sowie $\|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$ und $\|P_{\mathcal{M}^\perp}\| \leq 1$. Gibt es ein $0 \neq u \in \mathcal{M}$, so ist $0 \neq \|u\| = \|P_{\mathcal{M}}(u)\|$ und daher $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$. Ist $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$, so gibt es wegen $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ ein $0 \neq v \in \mathcal{M}^\perp$. Für dieses ist $0 \neq \|v\| = \|P_{\mathcal{M}^\perp}(v)\|$, so daß dann $\|P_{\mathcal{M}^\perp}\| = 1$ gilt.

Die Inklusion $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{M}^\perp)^\perp$ ist unmittelbar klar. Ist umgekehrt $x \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp$ so folgt $x = u + v$ mit $u \in \mathcal{M}$ und $v \in \mathcal{M}^\perp$. Wegen $x, u \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp$ hat man $\|v\|^2 = \langle v, x - u\rangle = 0$ und somit $x = u \in \mathcal{M}$. □

2.18. Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein Prä–Hilbertraum. Ein Operator $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *orthogonale Projektion*, falls $P^2 = P$ und $\operatorname{ran} P \perp \ker P$ gilt.

Der Projektionssatz besagt insbesondere, daß in einem Hilbertraum jeder abgeschlossene Unterraum stetig projiziert ist. Man kann zeigen, daß die Hilberträume hierdurch charakterisiert sind: Ein Banachraum ist genau dann topologisch isomorph zu einem Hilbertraum, wenn in ihm jeder abgeschlossene Unterraum stetig projiziert ist (Lindenstrauss und Tzafriri (1973)).

Wegen des Projektionssatzes nennen wir für einen abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{M}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ den Orthogonalraum $\mathcal{M}^\perp$ auch *orthogonales Komplement* von $\mathcal{M}$ und schreibt auch $\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}$ statt $\mathcal{M}^\perp$.

2.19. Satz von Riesz. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Für alle $x \in \mathcal{H}$ definieren wir $Jx : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ durch $(Jx)(y) := \langle y, x\rangle$ für alle $y \in \mathcal{H}$. Dann ist J eine konjugiert lineare, bijektive Isometrie von $\mathcal{H}$ auf seinen topologischen Dualraum $\mathcal{H}'$.*

Beweis. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$|(Jx)(y)| = |\langle y, x\rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|.$$

Also ist Jx stetig und $\|Jx\| \leq \|x\|$. Wegen $(Jx)(x) = \|x\|^2$ folgt $\|Jx\| = \|x\|$. Die Linearität von Jx und die konjugierte Linearität von J folgen wegen der Linearität des Skalarproduktes in der ersten und der konjugierten Linearität in der zweiten Variablen. Insbesondere ist $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ eine konjugiert lineare Isometrie.

Zu zeigen ist noch die Surjektivität von J. Sei also $0 \neq f \in \mathcal{H}'$ beliebig. Dann ist $\ker f$ ein von $\mathcal{H}$ verschiedener abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. Also gibt es nach dem Projektionssatz ein $0 \neq y \in (\ker f)^\perp$. Für alle $u \in \mathcal{H}$ gilt also wegen $f(u)y - f(y)u \in \ker f$:

$$0 = \langle f(u)y - f(y)u, y\rangle = f(u)\|y\|^2 - f(y)\langle u, y\rangle\,.$$

Damit folgt $f = Jx$ mit $x := \|y\|^{-2}\overline{f(y)}y$. □

2.20. Folgerung. *Jeder Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist isometrisch isomorph zu seinem topologischen Bidualraum $\mathcal{H}'' := (\mathcal{H}')'$.*

Beweis. Sei $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ die in im Satz von Riesz angegebene bijektive, konjugiert lineare Isometrie. Dann wird durch

$$[f, g] := \langle J^{-1}g, J^{-1}f\rangle \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{H}'$$

ein Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]$ auf $\mathcal{H}'$ definiert, dessen zugehörige Norm mit der Operatornorm auf $\mathcal{H}'$ übereinstimmt. $(\mathcal{H}', [\cdot,\cdot])$ ist also ein Hilbertraum, da $\mathcal{H}'$ vollständig ist. Nach dem Satz von Riesz gibt es also eine bijektive konjugiert lineare Isometrie $K : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}''$. Als Hintereinanderausführung von zwei bijektiven, konjugiert linearen Isometrien ist $K \circ J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}''$ dann eine bijektive, lineare Isometrie. □

2.21. SATZ. *Ein Unterraum $\mathcal{M}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ liegt genau dann dicht in $\mathcal{H}$, wenn $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$ ist.*

BEWEIS. Es ist stets $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp}$ und daher auch $\overline{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp}$ (da $\mathcal{M}^{\perp\perp}$ nach Lemma 2.10 (c) abgeschlossen ist). Ist $\mathcal{M}$ nicht dicht in $\mathcal{H}$, so ist $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathcal{H}$ und daher nach dem Projektionssatz $\mathcal{M}^\perp = \overline{\mathcal{M}}^\perp \neq \{0\}$. Ist umgekehrt $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$, so folgt nach dem Projektionssatz $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{M}} \oplus \overline{\mathcal{M}}^\perp = \overline{\mathcal{M}}$ und damit die Dichtheit von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{H}$. $\square$

2.22. DEFINITION. Eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ von Vektoren in einem Prä–Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt ein

(a) *Orthogonalsystem*, falls für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt $\langle e_i, e_j\rangle = 0$.
(b) *Orthonormalsystem*, falls $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthogonalsystem ist mit $\|e_i\| = 1$ für alle $i \in I$.
(c) *vollständiges Orthonormalsystem*, falls $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem ist und $\mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

2.23. FOLGERUNG. *Ein Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist genau dann ein vollständiges Orthonormalsystem, wenn $\{e_i\,;\, i \in I\}^\perp = \{0\}$ ist.*

BEWEIS. Diese Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 2.10 (d) und Satz 2.21 $\square$

Ist I eine Menge, so bezeichnen wir im folgenden mit $\mathfrak{F}(I)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von I.

2.24. SATZ. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{H}$:*

(a) $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I)$.
(b) $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. *(Besselsche Ungleichung).*
(c) *Genau dann gilt in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen, wenn*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists F_0 \in \mathfrak{F}(I)\, \forall F_0 \subseteq F \in \mathfrak{F}(I) \quad \Big\| x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i \Big\| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Wir schreiben dann auch

$$x = \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\,.$$

BEWEIS. Sei also $x \in \mathcal{H}$ beliebig. Für alle $F \in \mathfrak{F}(I)$ definieren wir

$$x_F := \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i.$$

Nach Pythagoras (Lemma 2.11) gilt $\|x_F\|^2 = \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2$. Ferner hat man

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - x_F\|^2 &= \langle x - x_F, x - x_F\rangle = \|x\|^2 - \langle x, x_F\rangle - \langle x_F, x\rangle + \|x_F\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i\in F} \overline{\langle x, e_i\rangle}\langle x, e_i\rangle - \sum_{i\in F} \overline{\langle x, e_i\rangle}\langle x, e_i\rangle + \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|x_F\|^2\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Damit folgt

$$\sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \|x_F\|^2 \leq \|x\|^2 < \infty\,.$$

Insbesondere ist also $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ und

$$\|(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}\|^2_{\ell^2(I)} = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2\,.$$

Damit sind (a) und (b) bewiesen.

Zu (c): Ist (2.5) erfüllt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $F_0 \in \mathfrak{F}(I)$ mit

$$\forall\, F_0 \subseteq F \in \mathfrak{F}(I): \qquad 0 \leq \|x\|^2 - \|x_F\|^2 = \|x - x_F\|^2 < \varepsilon\,.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2\,. \tag{2.7}$$

Ist umgekehrt (2.7) erfüllt und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es ein $F_0 \in \mathfrak{F}(I)$ mit

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i\in F_0} |\langle x, e_i\rangle|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon^2\,.$$

Mit (2.6) folgt für alle $F \in \mathfrak{F}(I)$ mit $F_0 \subseteq F$:

$$\|x - x_F\|^2 = \|x\|^2 - \|x_F\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{i\in F_0} |\langle x, e_i\rangle|^2 < \varepsilon^2.$$

Also ist (2.5) erfüllt. □

2.25. Beispiel. Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge. Dann gilt für alle $c = (c_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$: Es ist $c = \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} c_F$, wobei $c_F := (c_{F,i})_{i\in I}$ mit $c_{F,i} := c_i$ für alle $i \in F$ und $c_{F,i} := 0$ für alle $i \in I \setminus F$.

Beweis. Die Familie $(e_i)_{i\in I}$ mit $e_i := (\delta_{i,j})_{j\in I}$, $\delta_{i,j} = 1$ für $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ für $i \neq j$, ist ein Orthonormalsystem in $\ell^2(I)$ und für alle $c = (c_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ gilt

$$\|c\|_2^2 = \sum_{i\in I} |c_i|^2 = \sum_{i\in I} |\langle c, e_i\rangle|^2.$$

Mit Satz 2.24 (c) folgt die Behauptung. □

2.26. Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{M}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Ein Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{M}$ heißt *Orthonormalbasis* von $\mathcal{M}$, falls für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt:

$$x = \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i\,.$$

2.27. Satz. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $(e_i)_{i\in I}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann ist $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ und für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Ferner ist $\mathcal{H}$ isometrisch isomorph zu $\ell^2(I)$ vermöge der Abbildung $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$.

Beweis. Für alle $F \in \mathfrak{F}(I)$ und alle $c = (c_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ mit $c_i = 0$ für alle $i \in I \setminus F$ gilt nach Pythagoras $\|\sum_{i\in I} c_i e_i\|^2 = \sum_{i\in I} |c_i|^2$. Da $\mathcal{M} := \mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\} = \{\sum_{i\in I} c_i e_i\,;\, c_i \in \mathbb{K}, c_i \neq 0$ für höchstens endlich viele $i \in I\}$ nach Voraussetzung dicht in $\mathcal{H}$ liegt und nach Beispiel 2.25 auch $\mathcal{M}_0 := \{(c_i)_{i\in I}\,;\, c_i \in \mathbb{K}, c_i \neq 0$ für höchstens endlich viele $i \in I\}$ dicht in $\ell^2(I)$ liegt und isometrisch isomorph zu $\mathcal{M}$ ist, sind sowohl $\mathcal{H}$ als auch $\ell^2(I)$ Vervollständigungen von $\mathcal{M}$ und daher nach Satz 2.9 zueinander isometrisch isomorph vermöge eines isometrischen Isomorphismusses $\Phi : \mathcal{H} \to \ell^2(I)$ mit $\Phi(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ für alle $x \in \mathcal{M}$. Da die Abbildung $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ offensichtlich linear und nach Satz 2.24 (a),(b) auch stetig von $\mathcal{H}$ nach $\ell^2(I)$ ist, gilt $\Phi(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Insbesondere gilt $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$ und daher nach Satz 2.24 (c) auch $x = \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Also ist $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. □

2.28. FOLGERUNG. *Für ein Orthonormalsystem* $(e_i)_{i\in I}$ *in einem Hilbertraum* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *sind äquivalent:*

(a) $(e_i)_{i\in I}$ *ist ein vollständiges Orthonormalsystem in* $\mathcal{H}$.
(b) $(e_i)_{i\in I}$ *ist eine Orthonormalbasis von* $\mathcal{H}$.
(c) *Für alle* $x \in \mathcal{H}$ *gilt die Parsevalsche Gleichung:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

BEWEIS. Daß jede Orthonormalbasis insbesondere ein vollständiges Orthonormalsystem ist, folgt direkt aus der Definition 2.26. Nach Satz 2.27 folgt (c) aus (a). Ist (c) erfüllt, so ist $(e_i)_{i\in I}$ nach Satz 2.24 (c) eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. □

2.29. SATZ. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

BEWEIS. Die Menge $\mathcal{A}$ aller Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$ ist nicht leer (wegen $\emptyset \in \mathcal{A}$) und durch die Inklusion teilweise geordnet. Ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ eine totalgeordnete Familie von Orthonormalsystemen, so ist die Vereinigung über alle Orthonormalsysteme aus $\mathcal{K}$ wieder ein Orthonormalsystem und somit eine obere Schranke für $\mathcal{K}$. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{A}$ also wenigstens ein maximales Element $(e_i)_{i\in I}$. Wäre $\mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\}$ nicht dicht in $\mathcal{H}$, so gäbe es nach dem Projektionssatz ein $v \in \mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\}^\perp$ mit $\|v\| = 1$. Dann wäre aber $\{v\} \cup \{e_i\,;\, i \in I\}$ ein $\{e_i\,;\, i \in I\}$ echt enthaltendes Orthonormalsystem im Widerspruch zur Maximalität von $\{e_i\,;\, i \in I\}$. Das Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ ist also ein vollständiges Orthonormalsystem und daher eine Orthonormalbasis. □

2.30. SATZ. *Alle Orthogonalbasen eines Hilbertraums* $(\mathcal{H}\langle,\cdot,\cdot\rangle)$ *haben die gleiche Mächtigkeit.*

BEWEIS. Seien also $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_j)_{j\in J}$ zwei Orthonormalbasen von $\mathcal{H}$. Da die Elemente einer Orthonormalbasis stets linear unabhängig sind, folgt aus der linearen Algebra: I ist genau dann eine endliche Menge, wenn J eine endliche Menge ist. In diesem Fall ist dann auch $|I| = |J|$. Seien nun sowohl I wie auch J unendliche Mengen. Wir setzen

$$K := \{(i,j) \in I \times J\,;\, \langle e_i, f_j\rangle \neq 0\}\,.$$

Dann folgt

$$K = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} B_j$$

mit

$$A_i = \{(i,j)\,;\, j \in J,\, \langle e_i, f_j\rangle \neq 0\} \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I$$

und

$$B_j = \{(i,j)\,;\, i \in I,\, \langle e_i, f_j\rangle \neq 0\} \neq \emptyset \text{ für alle } j \in J\,.$$

Nach Folgerung 2.23 in Verbindung mit der Parsevalschen Gleichung gilt in der Tat $A_i \neq \emptyset$ und $B_j \neq \emptyset$ für alle $i \in I, j \in J$. Wegen $(\langle e_i, f_j\rangle)_{j\in J} \in \ell^2(J)$ für alle $i \in I$ ist A_i für alle $i \in I$ höchstens abzählbar unendlich. Ferner sind die Mengen A_i, $i \in I$, paarweise disjunkt. Es folgt nach dem Auswahlaxiom

$$|I| \leq |K| = \sum_{i\in I} |A_i| \leq \sum_{i\in I} \aleph_0 = |I|$$

(wegen $\aleph_0|I| = |I|$) und damit $|I| = |K|$. Analog zeigt man $|J| = |K|$. □

Bezüglich der verwendeten Rechenregeln für Kardinalzahlen siehe z.B. [**15**].

2.31. DEFINITION. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Die nach Satz 2.30 eindeutig bestimmte Mächtigkeit einer Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ heißt die *Hilbertraum–Dimension von* $\mathcal{H}$.

2.32. Satz. *Zwei Hilberträume* $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, *sind genau dann zueinander isometrisch isomorph, wenn sie die gleiche Hilbertraumdimension haben.*

Beweis. Gibt es einen isometrischen Isomorphismus $\Phi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ und ist $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$, so ist auch $(\Phi(e_i))_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}_2$ von gleicher Mächtigkeit. Man beachte hierbei, daß nach der Polarisierungsidentität $\langle\Phi(x), \Phi(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1$ für alle $x, y \in \mathcal{H}_1$ gilt. Ist $y \in \mathrm{LH}\{\Phi(e_i)_{i\in I}\}^\perp$, so ist $y = \Phi(u)$ für ein $u \in \mathcal{H}$ und es folgt $\langle u, e_i\rangle = \langle y, \Phi(e_i)\rangle = 0$. Also ist $u \in \mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\}^\perp = \{0\}$ und somit $y = 0$. $(\Phi(e_i))_{i\in I}$ ist also ein vollständiges Orthonormalsystem und damit eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$, welche die gleiche Mächtigkeit wie $(e_i)_{i\in I}$ besitzt.

Sei nun vorausgesetzt, daß $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ die gleiche Hilbertraum-Dimension besitzen und seien $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_j)_{j\in J}$ Orthonormalbasen von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : I \to J$ von I auf J. Mit $(f_j)_{j\in J}$ ist auch $(f_{\varphi(i)})_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$. Nach Satz 2.27 sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ beide isometrisch isomorph zu $\ell^2(I)$ und damit auch zueinander isometrisch isomorph. □

2.33. Satz. *Für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *sind äquivalent.*

(a) $\mathcal{H}$ *hat die Hilbertraum-Dimension* $\aleph_0$.
(b) $\mathcal{H}$ *besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis.*
(c) $\mathcal{H}$ *ist isometrisch isomorph zu* $\ell^2(\mathbb{N})$.
(d) $\mathcal{H}$ *ist separabel.*

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (a), (b) und (c) ist nach Definition der Hilbertraum–Dimension und Satz 2.32 klar. Die Separabilität von $\ell^2(\mathbb{N})$ ist in den Übungen gezeigt worden. Zu zeigen bleibt also nur die Richtung von (d) nach (b). Dies soll als Übung ausgeführt werden. □

2.34. Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine Abbildung $B : E \times E \to \mathbb{K}$ heißt *Sesquilinearform* auf E, falls gilt:

(SL 1) Für alle $x \in E$ ist die Abbildung $u \mapsto B(u, x)$ linear von E nach $\mathbb{K}$.
(SL 2) Für alle $x \in E$ ist die Abbildung $u \mapsto B(x, u)$ konjugiert-linear von E nach $\mathbb{K}$.

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so heißt eine Sesquilinearform $B : E \times E \to \mathbb{K}$ beschränkt, falls

$$\|B\| := \sup\{|B(x,y)|\,;\, x, y \in E, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} < \infty\,. \tag{2.8}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Menge der Sesquilinearformen auf einem Vektorraum E mit den punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren als Verknüpfungen einen $\mathbb{K}$–Vektorraum bilden. Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum, so ist die Menge $\mathfrak{B}(E, E)$ der beschränkten Sesquilinearformen auf ein Untervektorraum des Raums aller Sesquilinearformen und durch (2.8) ist eine Norm auf $\mathfrak{B}(E, E)$ gegeben.

2.35. Beispiele. (a) Jedes Skalarprodukt ist eine Sesquilinearform.

(b) Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann ist durch $B_T(x, y) := \langle Tx, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ eine Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$ definiert. Diese ist sogar beschränkt, denn

$$\|B_T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle|\,;\, x, y \in \mathcal{H}, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} \le \|T\| < \infty\,. \tag{2.9}$$

Ist $T = 0$, so ist also auch $B_T = 0$. Sei nun $T \ne 0$ vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\|T\|^2 = \sup_{x\in B_{\mathcal{H}}} \|Tx\|^2 = \|T\| \cdot \sup_{x\in B_{\mathcal{H}}} |\langle Tx, \|T\|^{-1}Tx\rangle| \le \|T\| \cdot \|B_T\|\,.$$

Wegen (2.9) folgt hieraus sogar $\|T\| = \|B_T\|$ für alle $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Da $T \mapsto B_T$ offensichtlich linear ist erhalten wir: *Die Abbildung* $T \mapsto B_T$ *ist eine lineare Isometrie.* Wir werden später sehen daß diese im Hilbertraumfall sogar ein isometrischer Isomorphismus ist.

2.36. LEMMA. *Sei $B : E \times E \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E. Dann gilt die Polarisierungsidentität:*

(a) *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und B symmetrisch (d.h. mit $B(x,y) = B(y,x)$ für alle $x, y \in E$), so gilt*

$$\forall x, y \in E: \; B(x,y) = \frac{1}{4}(B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y)) \quad \textit{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

(b) *Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt:*

$$\forall x, y \in E: \; B(x,y) = \frac{1}{4}(B(x+y,x+y) - B(x-y,x-y) + iB(x+iy,x+iy) - iB(x-iy,x-iy)).$$

BEWEIS. Dies beweist man durch direktes Nachrechnen. □

2.37. DEFINITION. Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *hermitesch*, falls für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

2.38. FOLGERUNG. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und T hermitesch oder ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt $T = 0$ genau dann, wenn für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $\langle Tx, x\rangle = 0$.*

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus Beispiel 2.35 und der Polarisierungsidentität 2.36 □

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$, so wird durch $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ eine stetige lineare Abbildung $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ definiert mit $\|T'\| \le \|T\|$. Diese heißt die zu T *transponierte* (oder zu T *duale* Abbildung).

Sind $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Hilberträume und bezeichnet $J_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j'$, $j = 1, 2$, die kanonischen bijektiven, isometrischen konjugiert linearen Abbildungen, so heißt für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ der Operator $T^* := J_1^{-1} \circ T' \circ J_2$ der zu T *adjungierte* Operator.

Wir fassen einige erste Eigenschaften der Adjungiertenbildung in dem folgenden Lemma zusammen.

2.39. LEMMA. *Seien $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. $J_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j'$, $j = 1, 2$, seien die kanonischen isometrischen, bijektiven, konjugiert linearen Abbildungen. Dann gilt:*

(a) *T^* ist der einzige Operator aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit*

$$\forall x \in \mathcal{H}_1 \, \forall y \in \mathcal{H}_2 : \quad \langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1 .$$

(b) *$T^{**} := (T^*)^* = T$.*

(c) *Ist $\mathcal{H}_3$ ein weiterer Hilbertraum und $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, so gilt $(ST)^* = T^*S^*$.*

(d) *Die Adjungiertenbildung $^* : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ ist eine konjugiert lineare bijektive Isometrie.*

(e) *$\|T^*T\| = \|T\|^2$.*

BEWEIS. (a) Für alle $x \in \mathcal{H}_1$ und alle $y \in \mathcal{H}_2$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle_2 = (J_2 y)(Tx) = (T'J_2 y)(x) = \langle x, J_1^{-1}T'J_2 y\rangle_1 = \langle x, T^*y\rangle_1 .$$

Ist auch $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit $\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, Sy\rangle_1$ für alle $x \in \mathcal{H}_1$ und alle $y \in \mathcal{H}_2$, so folgt für alle $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ auch $\langle x, (S - T^*)y\rangle_1 = 0$ und damit $T^* = S$.

(b) Für alle $x \in \mathcal{H}_1$ gilt unter Verwendung von (a) mit $y := Tx - T^{**}x$:

$$\begin{aligned}\|y\|^2 =& \langle Tx, y\rangle_2 - \langle T^{**}x, y\rangle_2 = \langle Tx, y\rangle_2 - \overline{\langle y, T^{**}x\rangle_2} = \langle Tx, y\rangle_2 - \overline{\langle T^*y, x\rangle_2}\\ =& \langle Tx, y\rangle_2 - \langle x, T^*y\rangle_2 = 0.\end{aligned}$$

Also gilt $T^{**} = T$.

(c) rechnet man elementar nach.

(d) Für alle $y \in \mathcal{H}_2$ mit $\|y\|_2 \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\|T^*y\|_2 =& \|J_1^{-1}T'J_2y\|_1 = \|T'J_2y\|_{\mathcal{H}_1'} = \sup\{|(T'J_2y)(x)|\,;\, x \in \mathcal{H}_1, \|x\|_1 \leq 1\}\\ =& \sup\{|(J_2y)(Tx)|\,;\, x \in \mathcal{H}_1, \|x\|_1 \leq 1\}\\ \leq& \sup\{\|J_2y\|_{\mathcal{H}_2'} \cdot \|Tx\|_2\,;\, x \in \mathcal{H}_1, \|x\|_1 \leq 1\} \leq \|T\|\,.\end{aligned}$$

Damit folgt $\|T^*\| \leq \|T\|$. Wenden wir dies auch auf T^* an, so erhalten wir unter Verwendung von (b), daß $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ und damit insgesamt $\|T\| = \|T^*\|$ gilt.

(e) Nach (d) ist $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$. Für alle $x \in \mathcal{H}_1$ mit $\|x\| \leq 1$ gilt ferner

$$\|Tx\|_2 = \langle Tx, Tx\rangle_2 = \langle x, T^*Tx\rangle_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|T^*T\| \cdot \|x\|_1 \leq \|T^*T\|,$$

womit die Behauptung folgt. □

Nach Lemma 2.39 (a) ist also ein stetiger linearer Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ genau dann hermitesch, wenn $T = T^*$ gilt.

2.40. Satz. *Zu jeder beschränkten Sesquilinearform $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gibt es genau einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $B = B_T$.*

Beweis. Da B beschränkt ist, gilt $|B(x,y)| \leq \|B\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Für alle $y \in \mathcal{H}$ ist als durch $x \mapsto B(x,y)$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathbb{K}$ gegeben. Nach dem Satz von Riesz gibt es also genau ein $Sy \in \mathcal{H}$ mit $B(x,y) = \langle x, Sy\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Für alle $x, u, v \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle x, S(\alpha u + \beta v)\rangle =& B(x, \alpha u + \beta v) = \overline{\alpha}B(x,u) + \overline{\beta}B(x,v) = \overline{\alpha}\langle x, Su\rangle + \overline{\beta}\langle x, Sv\rangle = \\ =& \langle x, \alpha Su + \beta Sv\rangle.\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung ist. Für alle $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| \leq 1$ gilt

$$\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = B(Sx, x) \leq \|B\| \cdot \|Sx\| \cdot \|x\|\,.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von S und $\|S\| \leq \|B\|$. Mit $T := S^*$ folgt nun die Existenzaussage. Ist $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein weiterer Operator mit $B_R = B$, so folgt für $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\langle (T - R)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle Rx, y\rangle = B(x,y) - B(x,y) = 0$$

und damit $R = T$. □

2.41. Definition. Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt

- *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$,
- *normal*, falls $TT^* = T^*T$,
- *positiv*, falls $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$,
- *strikt positiv*, falls $\langle Tx, x\rangle > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathcal{H}$.

Sind $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Hilberträume, so heißt ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *unitär*, falls $TT^* = 1_{\mathcal{H}_2}$ und $T^*T = 1_{\mathcal{H}_1}$.

Aus der Definition folgt insbesondere, daß jeder unitäre Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ von einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ in sich schon ein normaler Operator ist.

2.42. Lemma. *Für einen stetigen linearen Operator T auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(a) *T ist selbstadjungiert.*
(b) *T ist hermitesch.*
(c) *Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $\langle Tx, x\rangle$ reell.*

Beweis. Wie wir schon festgestellt haben ist nach Lemma 2.39 (a) T genau dann hermitesch, wenn $T = T^*$ gilt.

Ist T selbstadjungiert, so ist nach Lemma 2.39 (a) $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$ und daher (wegen (S3)) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Ist (c) erfüllt, so erhält man mit der Polarisierungsformel 2.36 für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle =& \frac{1}{4}(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + \\ &+ i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle) \\ =& \frac{1}{4}(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + \\ &+ i\langle T(ix-y), ix-y\rangle - i\langle T(ix+y), ix+y\rangle) \\ =& \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle\,.\end{aligned}$$

Mit 2.39 (a) folgt $T = T^*$. □

2.43. Lemma. *Für einen stetigen linearen Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ über $\mathbb{C}$ gilt:*

(a) *Ist T positiv, so ist T selbstadjungiert.*
(b) *TT^* und T^*T sind positiv (strikt positiv, falls T^* bzw. T injektiv ist)..*

Beweis. (a) folgt aus Lemma 2.42.

(b) Für alle $0 \neq x \in \mathcal{H}$ gilt $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geq 0$ (> 0, falls T injektiv ist). Wendet man dies auf T^* statt T an, so erhält man die entsprechende Aussage für TT^*. □

2.44. Lemma. *Sind $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Hilberträume, so ist ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ genau dann unitär, wenn er ein isometrischer Isomorphismus ist.*

Beweis. Ist T unitär, so ist T nach Definition des unitären Operators bijektiv (da er die Umkehrabbildung T^* besitzt). Ferner gilt in diesem Fall für alle $x \in \mathcal{H}_1$:

$$\|Tx\|_2^2 = \langle Tx, Tx\rangle_2 = \langle T^*Tx, x\rangle_1 = \langle x, x\rangle_1 = \|x\|_1^2\,,$$

so daß T also ein isometrischer Isomorphismus ist.

Ist umgekehrt T ein isometrischer Isomorphismus, so folgt für alle $x \in \mathcal{H}_1$:

$$\langle x, x\rangle_1 = \|x\|_1^2 = \|Tx\|_2^2 = \langle Tx, Tx\rangle_2 = \langle T^*Tx, x\rangle_1$$

und damit $\langle (1_{\mathcal{H}_1} - T^*T)x, x\rangle_1 = 0$. Nach Folgerung 2.38 muß also $T^*T = 1_{\mathcal{H}_1}$ gelten. Da T invertierbar ist folgt $T^{-1} = T^*$. Mit T ist auch $T^{-1} = T^*$ ein isometrischer Isomorphismus. Wenden wir die obige Überlegung auf T^* statt T an, so erhalten wir auch $TT^* = 1_{\mathcal{H}_2}$. □

2.45. Lemma. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum. Für hermitesche Operatoren $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt: Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $\langle Tx, x\rangle$ reell und*

$$\|T\| = q(T) := \sup\{|\langle Tx, x\rangle|\,;\, x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\}\,.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Definition 2.37 und (S3). Mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung sieht man $q(T) \leq \|T\|$. Wegen $B_T(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ folgt aus der Polarisierungsidentität für B_T:

$$\forall x, y \in \mathcal{H}: \quad \mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle)\,. \tag{2.10}$$

Zu gegebenen $x, y \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| = 1$ und $|\langle Tx, y\rangle| = \alpha\langle Tx, y\rangle = \langle T(\alpha x), y\rangle$. Durch Anwenden von (2.10) auf αx und y erhalten wir also

$$\begin{aligned}|\langle Tx, y\rangle| &= \mathrm{Re}\langle T(\alpha x), y\rangle = \frac{1}{4}(\langle T(\alpha x+y), \alpha x+y\rangle - \langle T(\alpha x-y), \alpha x-y\rangle)\\ &\leq \frac{1}{4}q(T)(\|\alpha x+y\|^2 + \|\alpha x-y\|^2) = \frac{1}{4}q(T)2(\|\alpha x\|^2 + \|y\|^2) \leq q(T)\,.\end{aligned}$$

Also ist $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle|\,;\, x, y \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \leq q(T)$ und die Behauptung ist bewiesen. □

2.46. Lemma. *Für einen stetigen linearen Operator T auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:*

(a) $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$.
(b) $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$.

Beweis. Wegen $T = T^{**}$ genügt es, die Aussage (a) zu beweisen. Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt: $x \in \ker T$ genau dann, wenn für alle $y \in \mathcal{H}$ gilt $\langle Tx, y\rangle = 0$. Dies ist nach Lemma 2.39 (a) äquivalent zu $\langle x, T^*y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{H}$, d.h. zu $x \in (\operatorname{ran} T^*)^\perp$. □

Die orthogonalen Projektionen auf einem Hilbertraum können wir nun auch wie folgt charakteriesieren:

2.47. Lemma. *Für einen stetigen linearen Operator P auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $P = P^2$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *P ist orthogonale Projektion, d.h. es ist* $\operatorname{ran} P \perp \operatorname{ran}(1_{\mathcal{H}} - P)$.
(b) *$P = P^*$, d.h. P ist selbstadjungiert.*
(c) *P ist positiv.*

Beweis. Ist (a) erfüllt, so gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + (1_{\mathcal{H}} - P)y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle Px + (1_{\mathcal{H}} - P)x, Py\rangle = \langle x, Py\rangle\,.$$

Nach Lemma 2.39 (a) muß also $P = P^*$gelten.

Ist (b) erfüllt, so gilt für alle $x \in \mathcal{H}$ (unter Verwendung von Lemma 2.39 (a):

$$0 \leq \langle Px, Px\rangle = \langle P^*Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, x\rangle\,.$$

P ist also positiv.

Ist P positiv, so ist P nach Lemma 2.43 selbstadjungiert und es folgt wegen

$$\operatorname{ran}(1_{\mathcal{H}} - P) = \ker P = \ker P^*$$

aus Lemma 2.46, daß (a) gelten muß. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.

2.1. Aufgabe. (a) Sei $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, für den die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$$

gilt. Zeigen Sie, daß durch

$$\langle x, y\rangle := \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ definiert wird mit $\|\cdot\| = \langle\cdot\,,\cdot\rangle^{1/2}$.

(b) Sei $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen aus der Einheitskugel von $\mathcal{H}$ mit $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, daß dann $\|x_n - y_n\| \to 0$ für $n \to \infty$.

2.2. Aufgabe. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte man die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_\lambda(x) := e^{i\lambda x}.$$

(a) Zeigen Sie, daß auf $X := \mathrm{LH}\{f_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ durch

$$\langle f, g\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

ein Skalarprodukt gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, daß X nicht separabel ist.
Hinweis: Betrachten Sie f_λ, f_μ mit $\lambda \neq \mu$.

2.3. Aufgabe. Auf dem Raum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ der komplexwertigen, quadratsummierbaren Folgen versehen mit dem Skalarprodukt $\langle (x_n), (y_n)\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^\infty x_n \overline{y_n}$ betrachte man den Operator

$$S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0), \quad (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots),$$

den sog. *Rechtsshift.*

(a) Zeigen Sie, daß S eine Isometrie ist. Ist S (links-, rechts-)invertierbar, und wenn ja, wie sieht die (Links-, Rechts-)Inverse aus?
(b) Zeigen Sie, daß das Bild von S abgeschlossen ist und die Kodimension 1 in $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ hat.
(c) Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\langle S^n x, y\rangle$ für alle $x, y \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$?

2.4. Aufgabe. Sei G eine Menge und sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum von $\mathbb{C}$–wertigen Funktionen auf G. Eine Abbildung $K : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *reproduzierender Kern von H*, wenn gilt

(i) die Abbildung $K_y : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto K(x, y)$ ist ein Element von H für alle $y \in G$.
(ii) $f(y) = \langle f, K_y\rangle_H$ für alle $f \in H$ und alle $y \in G$.

Zeigen Sie:

(a) Ist K ein reproduzierender Kern von H, so gilt:

$$|f(y)| \leq \|f\|_H \sqrt{K(y, y)} \quad \text{für alle } y \in G,\ f \in H.$$

(b) Es gibt genau dann einen reproduzierenden Kern K von H, wenn für alle $x \in G$ die Abbildung $\delta_x : H \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto f(x)$ stetig ist.
(c) Vermöge $\langle f, g\rangle := \int_{B_r(0)} f(z)\overline{g(z)}\, dz$ wird der Bergmann-Raum $A^2(B_r(0))$ zu einem Hilbertraum (siehe auch Aufgabe 1.10). Zeigen Sie, daß

$$K : B_r(0) \times B_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\zeta, z) \mapsto \frac{r^2}{\pi} \frac{1}{(r^2 - \bar{z}\zeta)^2}$$

ein reproduzierender Kern von $A^2(B_r(0))$ ist.

2.5. Aufgabe. (a) Bestimmen Sie Orthonormalbasen von $A^2(\mathbb{D})$ und $H^2(\mathbb{D})$.
(b) Sei $K : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ reproduzierender Kern eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ von komplexwertigen Funktionen auf einer Menge G (siehe Aufgabe 2.4) und $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, daß für alle $(x, y) \in G \times G$ gilt:

$$K(x, y) = \sum_{i\in I} e_i(x)\overline{e_i(y)}.$$

Überprüfen Sie dies am Beispiel der Bergmannschen Kernfunktion und der Orthnormalbasis aus (a).

2.6. Aufgabe. Zeigen Sie: Für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind äquivalent:

(a) $\mathcal{H}$ hat die Hilbertraumdimension $\aleph_0$.
(b) $\mathcal{H}$ besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis.
(c) $\mathcal{H}$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.
(c) $\mathcal{H}$ ist separabel.

KAPITEL 3

Der abstrakte Mittag–Leffler-Satz und der Satz von Baire

Der folgende abstrakte Satz von Arens aus der Theorie der metrischen Räume hat viele bemerkenswerte Anwendungen in der Topologie und in der Funktionalanalysis. Bourbaki [**5**] hat ihn Mittag–Leffler–Satz genannt, weil man mit seiner Hilfe auch sehr elegant den klassischen Satz von Mittag–Leffler aus der Funktionentheorie beweisen kann.

3.1. Abstrakter Mittag–Leffler–Satz (Arens, 1958, Theorem 2.4 in [**3**]). *Sei $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von vollständigen metrischen Räumen und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stetigen Abbildungen $f_n : X_{n+1} \to X_n$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ das Bild $f_n(X_n)$ dicht in (X_{n-1}, d_{n-1}) liegt. Dann liegt die Menge*

$$M_0 := \{v_0 \in X_0\,;\, \exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } v_n \in X_n, f_{n-1}(v_n) = v_{n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \tag{3.1}$$

und somit auch

$$M := \bigcap_{n=0}^{\infty} (f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n)(X_n) \tag{3.2}$$

dicht in (X_0, d_0).

Ist also $X_0 \neq \emptyset$ so ist auch der Durchschnitt M in (3.2) nicht leer, eine Aussage, die keineswegs offensichtlich ist.

Beweis. Seien $x \in X_0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wollen zeigen, daß es einen Punkt $v_0 \in M$ gibt mit $d_0(x, v_0) \leq \varepsilon$. Um dies zu erreichen, konstruieren wir zunächst induktiv eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$y_n \in X_n \quad \text{und} \quad d_n(y_n, f_n(y_{n+1})) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,, \tag{3.3}$$

$$d_k((f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{n-1})(y_n), (f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n)(y_{n+1})) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{3.4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k < n$. Wir setzen $y_0 := x$ und finden wegen der Dichtheit von $f_0(X_1)$ in X_0 ein $y_1 \in X_1$ mit $d_0(y_0, f_0(y_1)) < \varepsilon/2$. Damit sind die Bedingungen (3.3) und (3.4) für $n = 0$ erfüllt.

Seien nun für ein $m \in \mathbb{N}$ schon die Punkte $y_0, \ldots, y_m$ so konstruiert, daß die Bedingungen (3.3) und (3.4) für $0 \leq n \leq m-1$ und $0 \leq k < n$ erfüllt sind. Da $f_m(X_{m+1})$ in X_m dicht liegt, gibt es eine Folge $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ in X_{m+1} mit $f_m(z_j) \to y_m$ für $j \to \infty$. Wegen der Stetigkeit der Abbildungen $f_0, \ldots, f_{m-1}$ folgt dann auch für alle $k = 0, \ldots, m-1$:

$$\lim_{j\to\infty} d_k((f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{m-1})(y_m), (f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_m)(z_j)) = 0\,.$$

Insbesondere gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ so daß mit $y_{m+1} := z_{j_0}$ die Bedingungen (3.3) und (3.4) auch für $n = m$ und $0 \leq k < m$ erfüllt sind. Damit haben wir die gewünschte Folge konstruiert.

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sei nun

$$u_{k,0} := y_k \text{ und } u_{k,j} := (f_k \circ \cdots \circ f_{k+j-1})(y_{k+j})\text{für alle } j \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt nach (3.3) und (3.4)

$$d_k(u_{k,j}, u_{k,j+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+j+1}}$$

Für alle $j \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}$ folgt hieraus durch vollständige Induktion mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$d_k(u_{k,j}, u_{k,j+p}) \leq \sum_{m=1}^{p} d_k(u_{k,j+m-1}, u_{k,j+m}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+j}} \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2^{k+j}} \to 0 \tag{3.5}$$

für $j \to \infty$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist also die Folge $(u_{k,j})_{j=0}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in dem vollständigen metrischen Raum (X_k, d_k) und daher konvergent in (X_k, d_k) gegen ein $v_k \in X_k$. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$f_k(u_{k+1,j}) = f_k\left((f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{k+1+j})(y_{k+1+j})\right) = u_{k,j+1} \to v_k \quad \text{für } j \to \infty$$

und wegen der Stetigkeit von f_k auch

$$\lim_{j\to\infty} f_k(u_{k+1,j}) = f_k\left(\lim_{j\to\infty} u_{k+1,j}\right) = f_k(v_{k+1})\,.$$

Insbesondere ist $v_0 \in M$. Ferner folgt wegen der Stetigkeit der Metrik d_0 unter Verwendung von (3.5) für $k = j = 0$:

$$d_0(x, v_0) = d_0(y_0, v_0) = d_0\Big(u_{0,0}, \lim_{p\to\infty} u_{0,p}\Big) = \lim_{p\to\infty} d_0(u_{0,0}, u_{0,p}) \leq \limsup_{p\to\infty} \varepsilon \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{2^m} = \varepsilon\,.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir zeigen, daß man den klassische Satz von Mittag–Leffler tatsächlich mit Hilfe dieses abstrakten Mittag-Leffler-Satzes beweisen kann. Hierzu benötigen wir ein topologisches Lemma:

3.2. Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und nicht leer. Dann gibt es eine Folge $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ von kompakten kompakten Teilmengen von Ω mit den beiden folgenden Eigenschaften:*

(a) $\forall n \in \mathbb{N}:\quad \emptyset \neq \operatorname{int} K_0 \subset K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1} \subset \Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k$, *d.h. $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine kompakte Ausschöpfung von Ω.*

(b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Zusammenhangskomponente G von $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_n$ ist $G \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ nicht leer.*

Beweis. Ist $\Omega = \mathbb{C}$, so leistet $K_n := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq n+1\}$ das Gewünschte. Sei nun $\Omega \neq \mathbb{C}$. Da Ω nicht leer und offen ist gibt es ein $z_0 \in \Omega$ und ein $\varepsilon \in (0,1)$ mit $K_0 := \overline{U_\varepsilon(z_0)} \subset \Omega$. Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$K_n := \{z \in \Omega\,;\, |z - z_0| \leq n \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geq 1/n\}\,.$$

Damit ist (a) erfüllt. Ist G die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_n$, so ist $\infty \in G \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$. Sei nun G eine beliebige beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K_n$. Da $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| > n\}$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K_n$ enthalten ist, folgt $G \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < n \text{ und } \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega < 1/n)\}$. Ist w_0 also ein fester Punkt aus G und $w_1 \in \partial\Omega$ mit $|w_1 - w_0| = \operatorname{dist}(w_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, so ist $\{(1-t)w_0 + tw_2\}$ eine zusammenhängende in $\mathbb{C} \setminus K_n$ enthaltene Strecke, die einen nicht leeren Schnitt mit der Zusammenhangskomponente G hat und daher in G enthalten ist. Insbesondere ist $w_1 \in G \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$. □

Für auf Ω holomorphe Funktionen f und alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir dann

$$q_n(f) := \max_{z \in K_n} |f(z)| \,.$$

Dann wird der Raum $\mathcal{O}(\Omega)$ der auf Ω holomorphen Funktionen zu einem vollständigen metrischen Raum vermöge der durch

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n(f-g)}{1+q_n(f-g)} \qquad (f,g \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

Die Konvergenz bezüglich dieser Metrik ist gerade die gleichmäßige Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von Ω. Diese Metrik ist *translationsinvariant* in dem Vektorraum $\mathcal{O}(\Omega)$, d.h. es gilt

$$\forall f,g,h \in \mathcal{O}(\Omega) \qquad d(f+h, g+h) = d(f,g)\,.$$

3.3. Definition. Unter einem *Hauptteil mit dem Entwicklungspunkt* $w \in \mathbb{C}$ verstehen wir jede rationale Funktion der Form

$$h_w(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{-j}}{(z-w)^j} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, a_{-1}, \ldots, a_{-n} \in \mathbb{C}\,.$$

Eine *Hauptverteilung* H auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Menge $H = \{h_w\,; w \in A\}$ von Hauptteilen mit Entwicklungspunkten in einer in Ω diskreten Teilmenge A von Ω.

Jede auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ meromorphe Funktion f definiert eine Hauptverteilung $H_f = \{h_{f,w}\,;\, w \in P_f\}$ wie folgt: Für jede Polstelle w von f gibt es ein $r_w > 0$ mit $D(w, r_w) \subseteq \Omega$ und $D(w, r_w) \cap P_f = \{w\}$. Für alle Polstellen $w \in P_f$ sei $h_{f,w}$ der Hauptteil

$$\sum_{j=1}^{m_w} \frac{a_{-j}}{(z-w)^j}$$

der Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-m_w}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

in $R_{0,r_w}(w)$. m_w bezeichne hierbei die Ordnung der Polstelle w von f. Offensichtlich gilt für jede auf ganz Ω holomorphe Funktion g: $H_{f+g} = H_f$.

3.4. Definition. Eine Hauptverteilung H auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt *lösbare Hauptverteilung*, falls es eine auf Ω meromorphe Funktion f mit $H_f = H$ gibt.

Ist f mit $H_f = H$ eine Lösung der Hauptverteilung H in Ω, so ist für jede auf Ω holomorphe Funktion g auch $H_{f+g} = H$ und somit auch $f+g$ eine Lösung der Hauptverteilung H.

Der klassische Satz von Mittag-Leffler besagt, daß jede Hauptverteilung lösbar ist.

3.5. Satz (Mittag–Leffler). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, A eine in Ω diskrete Menge und sei $H = \{h_w\,;\, w \in A\}$ eine Hauptverteilung in Ω. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $H_f = H$. f ist hierdurch bis auf eine additive Abänderung durch eine auf ganz Ω holomorphe Funktion eindeutig bestimmt. Ist also auch $F \in \mathcal{M}(\Omega)$ eine meromorphe Funktion mit $H_F = H$ so ist $g := F - f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Beweis. Wir zeigen nur die Existenz der Lösung der Hauptverteilung, da die Eindeutigkeitsaussage unmittelbar klar ist. Sei $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω mit O.B.d.A. $\Omega_0 := \operatorname{int} K_0 \neq \emptyset$. Wir setzen $\Omega_n := \operatorname{int} K_n$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei δ_n eine (wie oben angegebene) Metrik auf $\mathcal{O}(\Omega_n)$, so daß also die zugehörige Konvergenz die Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von Ω_n ist. Da A keine Häufungspunkte in Ω hat ist $A \cap K_n$ und somit auch $A_n := A \cap \Omega_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine endliche Punktmenge oder leer. Daher ist

$$r_n := \sum_{a \in A_n} h_a$$

eine rationale Funktion. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei nun X_n die Menge aller derjenigen auf Ω_n meromorphen Funktionen, für die die Funktion $f - r_n$ nur hebbare Singularitäten in Ω_n hat und somit eine (auch mit $f - r_n$ bezeichnete) holomorphe Fortsetzung auf ganz Ω_n besitzt. Da $(\mathcal{O}(\Omega_n), \delta_n)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, ist auch X_n versehen mit der durch

$$d_n(f,g) := \delta_n(f - r_n, g - r_n) \qquad (f, g \in \mathcal{O}(\Omega_n))$$

gegebenen Metrik vollständig. Eine Folge $(f_k)_{k=1}\infty$ aus X_n ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(f_k - r_n)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{O}(\Omega_n)$ konvergent ist. Insbesondere sind also für alle $n \in \mathbb{N}$ die Restriktionsabbildungen

$$\rho_n : X_{n+1} \to X_n\,, \qquad f \mapsto f|_{\Omega_n}$$

folgenstetig, also stetig.

Wir zeigen, daß das Bild von ρ_n in X_n dicht liegt. Sei also $f \in X_n$ beliebig vorgegeben. Da

$$r_{n+1} - r_n = \sum_{a \in A_{n+1} \setminus A_n} h_a$$

eine rationale Funktion ist, die keine Polstellen in Ω_n besitzt, ist $f - r_{n+1}$ auf Ω_n holomorph (ergänzbar). Sei $(H_k)_{k=0}^{\infty}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω_n wie in Lemma 3.2. Ist $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig und G eine beliebige Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus H_k$, so existiert nach Lemma 3.2 ein $w \in (\mathbb{C} \setminus \Omega_n) \cap G$. Nach Definition von Ω_n ist $w \in \overline{\mathbb{C} \setminus K_n}$. Da G offen ist, gibt es eine Zusammenhangskomponente G_1 von $\mathbb{C} \setminus K_n$ mit $G_1 \cap G \neq \emptyset$. Da G_1 zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus K_n \subseteq \mathbb{C} \setminus H_k$ ist, folgt $G_1 \subseteq G$. Nach Lemma 3.2 existiert ein Punkt $z_{n,k} \in G_1 \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) \subseteq G \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$. Nach dem Satz von Runge gibt es eine rationale Funktion $\varphi_{n,k}$ mit Polen höchstens in $\mathbb{C} \setminus \Omega$ und mit

$$\sup_{z \in H_k} |\varphi_{n,k}(z) - (f(z) - r_{n+1}(z))| < 2^{-k}.$$

Also konvergiert die Folge $(\varphi_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω_n gegen $f - r_{n+1}(z)$. Mit $g_k := (\varphi_{n,k} - r_{n+1})|_{\Omega_{n+1}}$ folgt $g_k \in X_{n+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$d_n(\rho_n(g_k), f) = \delta_n(\varphi_{n,k} + r_{n+1} - r_n, f - r_n) = \delta_n(\varphi_{n,k}, f - r_{n+1}) \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Also liegt $\rho_n(X_{n+1})$ dicht in (X_n, d_n) und die Voraussetzungen zum abstrakten Satz von Mittag-Leffler sind erfüllt. Es gibt somit eine Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $f_n \in X_n$ und $\rho_n(f_{n+1}) = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die durch $g(z) := f_n(z)$ für alle $z \in \Omega_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, definierte Funktion ist also wohldefiniert und auf Ω meromorph mit Hauptteil h_a für alle $a \in A$. □

Zwei Metriken

$$d_1, d_2 : X \times X \to [0, \infty)$$

auf einer nicht leeren Menge X heißen *äquivalent*, falls eine Menge $G \subseteq X$ genau dann bezüglich d_1 offen ist, wenn sie bezüglich d_2 offen ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Identität $\mathrm{id} : X \to X$ eine Homöomorphie ist.

3.6. Lemma. *Sei U eine nicht leere offene Teilmenge eines metrischen Raums. Dann ist die von d auf U induzierte Metrik $d|_{U\times U} : U \times U \to [0,\infty)$ äquivalent zu der durch*

$$d_U(x,y) := d(x,y) + \left|\operatorname{dist}(x, X\setminus U)^{-1} - \operatorname{dist}(y, X\setminus U)^{-1}\right| \qquad x,y\in U$$

(mit der Vereinbarung $\operatorname{dist}(x,\emptyset)^{-1} := 0$*) auf U definierten Metrik $d_U : U\times U \to [0,\infty)$. Ist (X,d) vollständig, so ist auch (U,d_U) vollständig.*

Beweis. Da die Behauptung im Fall $U = X$ offensichtlich gilt, betrachten wir nur den Fall $U \neq X$, d.h. $X\setminus U \neq \emptyset$. Daß d_U eine Metrik auf U definiert, rechnet man unmittelbar nach. Für alle $x, y \in U$ ist $d(x,y) \le d_U(x,y)$. Also gilt für jedes $\varepsilon > 0$, $x \in U$: Die ε-Umgebung bezüglich d_U von x ist enthalten in der ε-Umgebung bezüglich $d|U\times U$ von x. Insbesondere ist jede bezüglich $d_{U\times U}$ offene Teilmenge auch bezüglich d_U offen, d.h.: $\mathrm{id} : (U, d_U) \to (U, d_{U\times U})$ ist stetig.

Sei nun $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige gegen ein $a\in U$ bezüglich d konvergente Folge aus U. Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{dist}(\cdot, X\setminus U) : U \to \mathbb{R}$ gilt dann auch

$$\operatorname{dist}(x_n, X\setminus U) \to \operatorname{dist}(a, X\setminus U) > 0 \qquad \text{für } n\to\infty.$$

und somit

$$d_U(x_n,a) := d(x_n,a) + \left|\operatorname{dist}(x_n, X\setminus U)^{-1} - \operatorname{dist}(a, X\setminus U)^{-1}\right| \to 0 \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Also ist auch $\mathrm{id} : (U, d_{U\times U}) \to (U, d|_U)$ stetig. Damit ist die Äquivalenz der beiden Metriken gezeigt.

Sei nun (X,d) vollständig und sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Cauchyfolge in (U,d_U). Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit

$$\forall n,m \ge n_0 : \qquad d(x_n,x_m) \le d_U(x_n,x_m) < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Insbesondere ist $(x_n)_{n=1}^\infty$ auch eine Cauchyfolge bezüglich d und daher (wegen der Vollständigkeit von (X,d)) bezüglich d konvergent gegen ein $a\in\overline{U}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $n_0\in\mathbb{N}$ mit

(3.7)

$$\forall n\ge n_0\,\forall p\in\mathbb{N} : d_U(x_n,x_{n+p}) = d(x_n,x_{n+p}) + \left|\operatorname{dist}(x_n, X\setminus U)^{-1} - \operatorname{dist}(x_{n+p}, X\setminus U)^{-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $d(x_n,x_{n+p}) \to d(x_n,a)$ und $\operatorname{dist}(x_{n+p}, X\setminus U) \to \operatorname{dist}(a, X\setminus U)$ für $p\to\infty$ ist dies nur möglich, wenn $\operatorname{dist}(a, X\setminus U) > 0$ und somit $a\in U$ gilt. Führen wir nun in (3.7) den Grenzübergang für $p\to\infty$ durch, so erhalten wir für alle $n\ge n_0$:

$$d_U(x_n,a) = d(x_n,a) + \left|\operatorname{dist}(x_n, X\setminus U)^{-1} - \operatorname{dist}(a, X\setminus U)^{-1}\right| \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Also gilt $x_n\to a$ in dem metrischen Raum (U,d_U) für $n\to\infty$. Damit ist die Vollständigkeit von (U,d_U) bewiesen. □

3.7. Bemerkung. Der Durchschnitt $U\cap V$ von zwei dichten offenen Teilmengen U, V eines metrischen Raums (X,d) ist ebenfalls dicht in (X,d).

Beweis. Sind $x\in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es wegen der Dichtheit von U in (X,d) ein $u\in U\cap U_\varepsilon(x)$. Da $U\cap U_\varepsilon(x)$ offen ist gibt es ein $\delta\in(0,\varepsilon/2)$ mit $U_\delta(u)\subseteq U\cap U_\varepsilon(x)$. Da auch V dicht liegt in (X,d), gibt es ein $v\in V\cap U_\delta(u)\subseteq V\cap U\cap U_\varepsilon(x)$. Also enthält jede ε–Umgebung von x ein Element von $U\cap V$. Daher liegt $U\cap V$ dicht in (X,d). □

Insbesondere folgt mit dieser Bemerkung durch vollständige Induktion, daß endliche Durchschnitte dichter, offener Teilmengen eines metrischen Raums wieder dichte, offene Teilmengen sind.

3.8. Satz von Baire. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von dichten, offenen Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ dicht in (X, d).*

Beweis. Wir setzen $(X_0, d) := (X, d)$ und definieren induktiv $X_{n+1} := X_n \cap U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nach der Vorbemerkung sind die Mengen X_n dichte, offene Teilmengen von (X, d) mit $X_{n+1} \subseteq X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Versehen mit den Metriken $d_n := d_{X_n}$ sind die Räume (X_n, d_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ vollständig. Da die Metriken d_n nach Lemma 3.6 äquivalent zu $d|_{X_n \times X_n}$ sind, sind die Inklusionsabbildungen $i_n : X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ stetig mit dichtem Bild. Nach dem abstrakten Satz von Mittag-Leffler (Satz 3.1) ist also

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (i_0 \circ i_1 \circ \cdots \circ i_n)(X_{n+1})$$

dicht in (X, d). □

Häufig wenden wir den Satz von Baire auch in folgender Form an:

3.9. Folgerung. *Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen eines vollständigen, nicht leeren metrischen Raums (X, d) mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Dann ist $\operatorname{int} A_n \neq \emptyset$ für wenigstens ein $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir wenden den Satz von Baire an auf die Mengen $U_n := X \setminus A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wäre $\operatorname{int} A_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so wäre $\overline{U_n} = X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher nach dem Satz von Baire der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n) = \emptyset$ dicht in (X, d) im Widerspruch zu $X \neq \emptyset$. □

3.10. Lemma. *Ist F ein Untervektorraum eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$ mit $\operatorname{int} F \neq \emptyset$, so gilt schon $E = F$.*

Beweis. Hat F einen inneren Punkt f, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f) = f + \varepsilon B_E \subset F$. Da F ein Untervektorraum von E ist, folgt dann $B_E = \frac{1}{\varepsilon}(U_\varepsilon(f) - f) \subset F$ und somit auch $E = \bigcup_{r>0} rB_E \subseteq F \subseteq E$. □

3.11. Folgerung. *Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} E = \aleph_0$, d.h. es gibt eine abzählbar unendliche, linear unabhängige Teilmenge $\mathcal{B} = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ von E mit $E = \mathrm{LH}(\mathcal{B})$. Dann gibt es keine Norm auf E bezüglich der E vollständig ist. Insbesondere ist also jeder unendlich dimensionale Banachraum schon überabzählbar unendlich dimensional.*

Beweis. Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf E und $\mathcal{B} = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbar unendliche, linear unabhängige Teilmenge von E mit $E = \mathrm{LH}(\mathcal{B})$, so folgt mit $F_n := \mathrm{LH}(\{e_1, \ldots, e_n\})$: F_n ist in $(E, \|\cdot\|)$ abgeschlossen (nach Folgerung 1.14) und erfüllt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Wäre $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, so gäbe es nach Folgerung 3.9 und Lemma 3.10 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $E = F_{n_0}$ im Widerspruch zu $\dim_{\mathbb{K}} E = \aleph_0$. □

3.12. Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt

- *dicht in X*, falls $\overline{A} = X$.
- *nirgends dicht in X*, falls $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.
- *von erster Kategorie* oder *mager in X*, falls A abzählbare Vereinigung von in X nirgends dichten Teilmengen ist.
- *von zweiter Kategorie* oder *nicht mager in X*, falls A nicht von erster Kategorie in X ist.

3.13. Folgerung (Kategoriensatz von Baire). *Jeder nicht leere vollständige metrische Raum ist von zweiter Kategorie in sich.*

Beweis. Sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von nirgends dichten Teilmengen von X. Dann ist $X \setminus \overline{A_n}$ offen und dicht in X für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Baire ist dann aber auch die Menge

$$G := \bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus \overline{A_n}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \overline{A_n}$$

dicht in X. Wegen $X \neq \emptyset$ muß $X \neq \bigcup_{n=1}^\infty \overline{A_n}$ gelten. Also ist X von zweiter Kategorie in sich. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.

3.1. Aufgabe. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger komplexwertiger Funktionen auf einem vollständigen metrischen Raum X, so daß $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in X$.

(a) Zeigen Sie, daß eine nichtleere offene Teilmenge V in X und ein $0 < M < \infty$ existieren, so daß $\sup\{|f_n(x)| \,:\, x \in V,\, n \in \mathbb{N}\} < M$ ist.
(b) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, daß eine nichtleere offene Teilmenge V in X und eine natürliche Zahl N existieren, so daß $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ ist für alle $x \in V$ und $n \geq N$.
Hinweis: Betrachte für $N \in \mathbb{N}$ die Mengen $A_N := \{x \in X,\, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \text{ für } m, n \geq N\}$.

3.2. Aufgabe. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *isoliert*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$. Zeigen Sie:

(a) Hat (X, d) keine isolierten Punkte, so ist X überabzählbar.
(b) Ist X abzählbar, so liegt die Menge der isolierten Punkte dicht in (X, d).

3.3. Aufgabe. Sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige Funktion. Ist I ein nicht zu einem Punkt ausgeartetes Intervall, so heißt

$$\omega_f(I) := \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$$

die *Oszillation von f auf I*. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert
$$\omega_f(x) := \lim_{\delta\to 0} \omega_f((x-\delta, x+\delta))$$
in $[0, \infty]$; er heißt die *Oszillation von f in x*.
(b) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \,:\, \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen für alle $\varepsilon > 0$.
(c) Die Menge
$$\bigcup_{n=1}^\infty \{x \in \mathbb{R} \,:\, \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$
ist die Menge aller Unstetigkeitspunkte von f.
(d) Die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist genau dann von erster Kategorie in $\mathbb{R}$, wenn es eine dichte Menge gibt, in deren Punkten f stetig ist.

3.4. Aufgabe. Zeigen Sie: Es gibt stetige Funktionen auf $[0, 1]$, die an keiner Stelle differenzierbar sind.
Hinweis: Betrachte $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$ mit

$$E_n := \left\{ f \in C[0,1]\,;\; \sup_{0<|h|\leq 1} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n \quad \forall\, t \in [0,1] \right\}.$$

KAPITEL 4

Der Satz von Banach–Steinhaus

4.1. Definition. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume. Eine Familie $\mathcal{A}$ linearer Abbildungen von E nach F heißt *gleichstetig*, falls es zu jeder Nullumgebung U in $(F, \|\cdot\|_F)$ eine Nullumgebung V in $(E, \|\cdot\|_E)$ gibt mit $\mathcal{A}(V) := \{Av; A \in \mathcal{A}, v \in V\} \subseteq U$. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall A \in \mathcal{A}\, \forall x \in E: \quad \|x\|_E < \delta \Longrightarrow \|Ax\|_F < \varepsilon.$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall A \in \mathcal{A}\, \forall x \in E: \quad \|x\|_E \leq \delta \Longrightarrow \|Ax\|_F \leq \varepsilon.$$

Insbesondere ist jede gleichstetige Menge von linearen Abbildungen von E nach F schon in $\mathcal{L}(E, F)$ enthalten.

4.2. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume. Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, F)$ gilt:*

(a) *Ist $\mathcal{A}$ gleichstetig, so ist für jede in $(E, \|\cdot\|_E)$ beschränkte Menge B auch die Menge $\mathcal{A}(B) := \{Ax; A \in \mathcal{A}, x \in B\}$ beschränkt in $(F, \|\cdot\|_F)$. Insbesondere ist für alle $x \in E$ die Menge $\mathcal{A}(x) := \{Ax; A \in \mathcal{A}\}$ beschränkt in $(F, \|\cdot\|_F)$.*

(b) *Genau dann ist $\mathcal{A}$ gleichstetig, wenn* $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$ *, d.h. wenn $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}(E, F)$ beschränkt ist.*

Beweis. (a) Sei $\mathcal{A}$ gleichstetig. Da B beschränkt in E ist existiert ein $C > 0$ mit $\|x\|_E \leq C$ für alle $x \in B$. Wegen der Gleichstetigkeit von $\mathcal{A}$ gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so daß $\|Ax\|_F \leq 1$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq \delta$. Damit gilt für alle $A \in \mathcal{A}$, $x \in B$:

$$\|Ax\|_F = \frac{C+1}{\delta} \left\| A \left(\frac{\delta}{C+1} x \right) \right\|_F < \frac{C+1}{\delta}.$$

Also ist $\mathcal{A}(B)$ beschränkt in $(F, \|\cdot\|_F)$. Da für alle $x \in E$ die Menge $\{x\}$ in $(E, \|\cdot\|_E)$ beschränkt ist folgt auch der Zusatz.

(b) "$\Longrightarrow$" erhalten wir, indem wir (a) auf die Einheitskugel B_E von E anwenden. Sei nun umgekehrt $C := \sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E < \delta := \frac{\varepsilon}{C+1}$ und alle $A \in \mathcal{A}$ gilt dann $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E < \varepsilon$. Also ist $\mathcal{A}$ gleichstetig. □

4.3. Satz von Banach–Steinhaus. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, F)$. Ist die Menge $B := \{x \in E;\ \mathcal{A}(x) \text{ ist beschränkt in } F\}$ von zweiter Kategorie in E, so gilt schon $B = E$ und $\mathcal{A}$ ist gleichstetig, also nach Lemma 4.2 beschränkt in $\mathcal{L}(E, F)$.*

Beweis. Als Durchschnitt von (wegen der Stetigkeit der Abbildungen $A \in \mathcal{A}$) abgeschlossenen Mengen ist die Menge $M := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(B_F)$ abgeschlossen in $(E, \|\cdot\|_E)$. Für alle $x \in B$ existiert nach Definition von B ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $\|Ax\|_F \leq n_x$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Es folgt $x \in n_x M$ und damit

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nM.$$

Da nach Voraussetzung die Menge B von zweiter Kategorie in E ist, muß für wenigstens ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Menge $n_0 M = \overline{n_0 M}$ nicht leeres Inneres haben. Nun ist die Abbildung $x \mapsto n_0 x$ eine Homöomorphie von E auf sich ist, so daß schon $\mathrm{int} M \neq \emptyset$ gilt. Insbesondere besitzt M einen inneren Punkt x_0. Es gibt also ein $\rho > 0$ mit $U_\rho(x_0) \subset M$. Für alle $u \in B_E$ gilt dann wegen $\frac{\rho}{2}u + x_0 \in U_\rho(x_0) \subset M$ und $x_0 \in M$:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \|Au\|_F = \frac{2}{\rho}\left\|A\left(\frac{\rho}{2}u + x_0\right) - Ax_0\right\|_F \leq \frac{4}{\rho}\,.$$

Also ist $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}(E, F)$ normbeschränkt und daher nach Lemma 4.2 (b) gleichstetig. □

4.4. Satz von der gleichmässigen Beschränktheit. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, F)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\forall x \in E: \quad \sup\limits_{A\in\mathcal{A}} \|Ax\|_F < \infty.$
(b) *$\mathcal{A}$ ist gleichstetig.*
(c) $\exists C > 0\, \forall x \in B_E\, \forall A \in \mathcal{A}: \quad \|Ax\|_F \leq C.$
(d) $\exists C > 0\, \forall x \in E\, \forall A \in \mathcal{A}: \quad \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E.$
(e) $\sup\limits_{A\in\mathcal{A}} \|A\| < \infty.$

Beweis. Die Äquivalenz von (c) und (d) zu (e) rechnet man unmittelbar nach. Nach Lemma 4.2 sind die Aussagen (b) und (e) äquivalent. (c)$\Longrightarrow$(a) ist offensichtlich und die Implikation (a)$\Longrightarrow$(b) ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz 4.3 von Banach–Steinhaus und dem Kategoriensatz 3.13 von Baire. □

In Lemma 1.3 hatten wir gezeigt:

4.5. Lemma. *Jede Cauchyfolge in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ ist beschränkt.*

4.6. Satz. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume und sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathcal{L}(E, F)$.*

(a) *Ist die Menge*
$$C := \{x \in E\,;\, (A_n x)_{n=1}^\infty \text{ ist Cauchyfolge in } F\}$$
von zweiter Kategorie in E, so ist schon $C = E$ und $(A_n)_{n=1}^\infty$ ist gleichstetig.
(b) *Ist $(F, \|\cdot\|_F)$ vollständig und ist die Menge*
$$L := \{x \in E\,;\, Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x \text{ existiert in } F\}$$
von zweiter Kategorie in E, so ist schon $L = E$ und die Abbildung $A : E \to F$ ist stetig und linear.

Beweis. (a) Ist $x \in C$, so ist $\{A_n x; n \in \mathbb{N}\}$ nach Lemma 4.5 in F beschränkt. Nach dem Satz 4.3 von Banach–Steinhaus ist die Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ also gleichstetig. Man rechnet leicht nach, daß C und damit auch $\overline{C}$ ein Untervektorraum von E ist. Da C von zweiter Kategorie in E ist, folgt $\mathrm{int}\overline{C} \neq \emptyset$ und damit nach Lemma 3.10 schon $\overline{C} = E$, d.h. C liegt dicht in E. Sei nun $x \in E$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der Gleichstetigkeit von $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall u \in U_\delta(0): \quad \|A_n u\|_F < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Da C in E dicht liegt, gibt es ein $u \in C$ mit $\|x - u\|_E < \delta$ und da $\{A_n u; n \in \mathbb{N}\}$ eine Cauchyfolge ist gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n, m \geq n_0: \quad \|A_n u - A_m u\|_F < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Damit folgt für alle $n, m \geq n_0$

$$\|A_n x - A_m x\|_F \leq \|A_n(x-u)\|_F + \|A_n u - A_m u\|_F + \|A_m(u-x)\|_F < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Also ist $x \in C$ und es folgt $E = C$.

(b) Wegen der Vollständigkeit von F ist $L = C$. Nach Teil (a) folgt also $L = E$ und die Gleichstetigkeit der Folge $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$. Wegen der Linearität des Grenzwertes ist die hierdurch definierte Abbildung $A : E \to F$ linear. Nach Lemma 4.2 (b) ist $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ normbeschränkt in $\mathcal{L}(E, F)$. Wegen der Stetigkeit der Norm folgt also für alle $x \in B_E$:

$$\|Ax\|_F = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_F \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty.$$

Also ist A stetig und $\|A\| \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$. ☐

4.7. Folgerung. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathcal{L}(E, F)$.*

(a) *Existiert für alle $x \in E$ der Grenzwert $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$, so ist die hierdurch definierte Abbildung $A : E \to F$ linear und stetig.*
(b) *Ist auch F vollständig und ist für alle $x \in E$ die Folge $\{A_n x; n \in \mathbb{N}\}$ eine Cauchyfolge in F, so ist die durch $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$, $x \in E$, definierte Abbildung linear und stetig.*

In beiden Fällen ist $\|A\| \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$.

Beweis. In beiden Fällen ist $C = L = E$. Nach dem Kategoriensatz 3.13 von Baire ist E von zweiter Kategorie in sich. Mit Satz 4.6 und dem zugehörigen Beweis folgen die Behauptungen. ☐

4.8. Folgerung. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume und sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathcal{L}(E, F)$ mit*

(a) $\forall x \in E: \quad \{A_n x\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ *ist normbeschränkt in F.*
(b) $C := \{x \in E\,;\, (A_n x)_{n=1}^\infty$ *ist Cauchyfolge in $F\}$ ist dicht in E.*

Dann ist schon $E = C$ und die durch $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$, $x \in E$, definierte Abbildung ist linear und stetig.

Beweis. Nach dem Satz 4.4 von der gleichmäßigen Beschränktheit ist $(A_n)_{n=1}^\infty$ gleichstetig. Nach dem Beweis zu Satz 4.6 folgt aus der Dichtheit von C und der Gleichstetigkeit von $(A_n)_{n=1}^\infty$ die Behauptung. ☐

4.9. Satz. *Seien E, F, G normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume und sei E vollständig. Für eine bilineare Abbildung $B : E \times F \to G$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *B ist stetig.*
(b) *B ist komponentenweise stetig, d.h. für alle $x \in E$ ist die Abbildung $y \mapsto B(x, y)$ stetig und für alle $y \in F$ ist die Abbildung $x \mapsto B(x, y)$ stetig.*
(c) *Für jede Nullfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E und alle $y \in F$ gilt $B(x_n, y) \to 0$ für $n \to \infty$ und für alle Nullfolgen $(y_n)_{n=1}^\infty$ in F und alle $x \in F$ gilt $B(x, y_n) \to 0$ für $n \to \infty$.*
(d) *B ist stetig in $(0, 0)$.*
(e) $\|B\| := \sup_{x\in B_E, y\in B_F} \|B(x, y)\|_G < \infty.$
(f) $\forall x \in E: \quad \sup_{y\in B_F} \|B(x, y)\|_G < \infty$ *und* $\forall y \in F: \quad \sup_{x\in B_E} \|B(x, y)\|_G < \infty.$

Beweis. Die Implikationen (a)$\Longrightarrow$(d) sowie (e)$\Longrightarrow$(f) sind klar und nach Lemma 1.8 sind die Aussagen (b), (c) und (f) äquivalent.

(b)$\Longrightarrow$(a): Sei $(x, y) \in E \times F$ beliebig und sei $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $E \times F$ für $n \to \infty$. Insbesondere gilt dann $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung (b) gibt es ein $n_F \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_F : \quad \|B(x, y_n) - B(x, y)\|_G < \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{4.1}$$

Ebenfalls nach Voraussetzung (b) ist $E = \{u \in E\,;\, (B(u, y_n))_{n=1}^{\infty}$ ist konvergent in $G\}$. Da E als Banachraum nach dem Kategoriensatz 3.13 von Baire von zweiter Kategorie in sich ist, folgt nach Satz 4.6, daß $(B(\cdot, y_n))_{n=1}^{\infty}$ eine gleichstetige Folge in $\mathcal{L}(E, G)$ ist. Es gibt daher ein $\delta > 0$, so daß

$$\forall u \in U_\delta(0)\, \forall n \in \mathbb{N} : \quad \|B(u, y_n)\|_G < \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{4.2}$$

Zu δ gibt es wegen $x_n \to x$ für $n \to \infty$ ein $n_E \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_E : \quad \|x - x_n\|_E < \delta \,. \tag{4.3}$$

Mit Hilfe von (4.1), (4.2) und (4.3) folgt für alle $n \geq n_0 := \max\{n_E, n_F\}$:

$$\|B(x, y) - B(x_n, y_n)\|_G \leq \|B(x, y) - B(x, y_n)\|_G + \|B(x - x_n, y_n)\|_G < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Also ist B in allen $(x, y) \in E \times F$ stetig.

(d)$\Longrightarrow$(e): Sei nun (d) erfüllt. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $\|B(x, y)\|_G < 1$ für alle $x \in E, y \in F$ mit $\|x\|_E \leq \delta, \|y\|_F \leq \delta$. Für alle $u \in B_E, v \in B_F$ folgt dann

$$\|B(u, v)\|_G = \delta^{-2}\|B(\delta u, \delta v)\|_G < \delta^{-2}.$$

Also gilt (e). $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 4.

4.1. Aufgabe. Wir betrachten eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerischer Quadraturformeln auf dem Intervall $[a, b]$,

$$S_n : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(x_i^{(n)}).$$

Hierbei seien die Stützstellen $x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ paarweise verschiedene Punkte im Intervall $[a, b]$ und $a_0^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie den folgenden *Satz von Szegö*:

Genau dann gilt für alle $f \in C[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\, dx \,, \tag{4.4}$$

wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es gibt eine dichte Teilmenge P von $C[a, b]$, so daß (4.4) für alle $f \in P$ gilt.
(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| < \infty$.

Hinweis: Zeigen Sie, daß S_n stetig und linear ist und berechnen Sie $\|S_n\|$.

4.2. Aufgabe. Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 4.1.

(a) Sei nun $a_i^{(n)} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq n$. Beweisen Sie: Genau dann gilt (4.4) für alle $f \in C[a, b]$, wenn (4.4) für alle Polynome gilt.

(b) Bei der *summierten Trapezregel* verwendet man die Stützstellen $x_i^{(n)} := a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \dots, n$ und

$$S_n(f) := \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^{(n)})\right).$$

Zeigen Sie, daß (4.4) für alle $f \in C[a,b]$ erfüllt ist.

KAPITEL 5

Die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

5.1. Definition. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ zwischen zwei normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen E und F heißt *offen*, falls für jede in E offene Menge Ω auch die Bildmenge $T(\Omega)$ offen in F ist.

Für den Rest dieses Kapitels seien E und F stets zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume.

5.2. Lemma. *Für eine lineare Abbildung $T : E \to F$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist offen.*
(b) *Für jede Nullumgebung U in E ist $T(U)$ eine Nullumgebung in F.*
(c) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : U_\delta^F(0) \subseteq T(U_\varepsilon^E(0))$.
(d) $\forall n \in \mathbb{N} : \quad T(U_{2^{-n}}^E(0))$ *ist eine Nullumgebung in F.*

Beweis. Die Äquivalenz von (b) und (d) rechnet man leicht nach.

Ist (a) erfüllt und U eine beliebige Umgebung von 0, so ist $\mathrm{int}U$ offene Umgebung von 0 und daher nach Voraussetzung $T(\mathrm{int}U)$ offen. Wegen $0 = T(0) \in T(\mathrm{int}U) \subseteq T(U)$ ist $T(U)$ also eine Umgebung von 0 in F. Damit folgt (b).

Ist (b) erfüllt und $\varepsilon > 0$ beliebig, so ist nach Voraussetzung $T(U_\varepsilon^E(0))$ eine Umgebung von 0 in F. Es gibt also ein $\delta > 0$ mit $U_\delta^F \subseteq T(U_\varepsilon^E(0))$. Also ist (c) erfüllt.

Sei nun (c) erfüllt und $\Omega \subseteq E$ offen. Ist $T(x_0)$ ein beliebiger Punkt aus $T(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^E(x_0) \subseteq \Omega$. Es folgt $U_\varepsilon^E(0) = U_\varepsilon^E(x_0) - x_0 \subseteq \Omega - x_0$. Nach Voraussetzung (c) gibt es also ein $\delta > 0$ mit $U_\delta^F(0) \subseteq T(U_\varepsilon^E(0))$. Es folgt: $U_\delta^F(0) \subseteq T(U_\varepsilon^E(0)) \subseteq T(\Omega - x_0) = T(\Omega) - Tx_0$ und damit $U_\delta^F(Tx_0) = Tx_0 + U_\delta^F(0) \subseteq T(\Omega)$. Also ist jeder Punkt Tx_0 aus Ω ein innerer Punkt von $T(\Omega)$. Die Bildmenge $T(\Omega)$ ist daher offen. □

5.3. Beispiel. Sei E ein normierter Raum und F ein abgeschlossenener Untervektorraum von E. Dann ist der kanonische Epimorphismus $\pi : E \to E/F$ stetig und offen.

Beweis. Die Stetigkeit von π wurde schon in Lemma 1.20 (c) gezeigt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle $x \in E$ mit $\|\pi(x)\|_{E/F} < \varepsilon$ gibt es nach Definition der Norm $\|\cdot\|_{E/F}$ ein $f \in F$ mit $\|x + f\|_E < \varepsilon$. Wegen $\pi(x + f) = \pi(x)$ für alle $f \in F$ folgt also $\pi(U_\varepsilon^E(0)) \supseteq U_\varepsilon^{E/F}(\pi(0))$. Nach Lemma 5.2 ist π also eine offene Abbildung. □

5.4. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume. Ist $T : E \to F$ linear und offen, so ist T schon surjektiv.*

Beweis. Da E offene Teilmenge von $(E, \|\cdot\|_E)$ und T eine offene, lineare Abbildung ist, ist $T(E)$ offener Untervektorraum von $(F, \|\cdot\|_F)$. Nach Lemma 3.10 folgt $T(E) = F$. □

5.5. Satz von der offenen Abbildung. *Seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume, E sei vollständig. Ist $A \in \mathcal{L}(E, F)$ und $A(E)$ von zweiter Kategorie in $(F, \|\cdot\|_F)$, so gilt:*

(a) *$A(E) = F$, d.h. A ist surjektiv.*

(b) *A ist eine offene Abbildung.*

BEWEIS. Nach Lemma 5.4 genügt es (b) zu beweisen. Wegen Lemma 5.2 genügt es hierfür zu zeigen, daß $A(U^E_{2^{-n}}(0))$ eine Nullumgebung in F ist. Wir zeigen zunächst:

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\overline{A(U^E_{2^{-n}}(0))}$ eine Nullumgebung in F.*

Sei also $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Ist $x \in E$ beliebig, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k}\|x\|_E < 2^{-n-1}$ also mit $x \in kU^E_{2^{-n-1}}(0)$. Es folgt $E = \bigcup_{k=1}^\infty kU^E_{2^{-n-1}}(0)$ also auch $A(E) \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty k\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))}$. Da $A(E)$ von zweiter Kategorie in F ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}\left(k\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))}\right) \neq \emptyset$. Da die Multiplikation mit k eine Homöomorphie von F auf sich ist, folgt auch $\operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} \neq \emptyset$.

Ist $y \in \operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))}$ beliebig, so ist also $\operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} - y$ eine Nullumgebung in F. Wegen

$$\begin{aligned}\operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} - y \subseteq& \operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} + \operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} \subseteq \overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0)) + A(U^E_{2^{-n-1}}(0))}\\ \subseteq& \overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0) + U^E_{2^{-n-1}}(0))} \subseteq \overline{A(U^E_{2^{-n}}(0))}\end{aligned}$$

ist auch $\overline{A(U^E_{2^{-n}}(0))}$ eine Nullumgebung in F.

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\overline{A(U^E_{2^{-n-2}}(0))} \subseteq A(U^E_{2^{-n}}(0))$.* Insbesondere ist also $A(U^E_{2^{-n}}(0))$ eine Nullumgebung in F.

Sei $y \in \overline{A(U^E_{2^{-n-2}}(0))}$ beliebig. Wir konstruieren induktiv zwei Folgen $(x_k)_{k=0}^\infty$ und $(y_k)_{k=1}^\infty$ in E bzw. F, so daß für alle $l \in \mathbb{N}$ die folgende Bedingung (E_l) erfüllt ist:

$$(\mathrm{E}_l) \qquad \begin{aligned}&\|x_{k-1}\|_E \leq 2^{-k-n}, \quad y_k \in \overline{A(U^E_{2^{-n-1-k}}(0))} \quad \text{für } 1 \leq k \leq l\\ &Ax_k = y_k - y_{k+1} \quad \text{für } 1 \leq k \leq l-1\end{aligned}$$

Mit $y_1 = y$ und $x_0 = 0$ ist offensichtlich (E_l) erfüllt.

Seien nun schon $x_0, \ldots, x_{l-1} \in E$ und $y_1, \ldots, y_l \in F$ so konstruiert, daß (E_l) erfüllt ist. Wir konstruieren x_l und y_{l+1}: Wegen (i) ist $y_l - \overline{A(U^E_{2^{-n-1-(l+1)}}(0))}$ eine Umgebung von $y_l \in \overline{A(U^E_{2^{-n-1-l}}(0))}$. Es gibt also ein $x_l \in U^E_{2^{-n-1-l}}(0)$ und ein $y_{l+1} \in \overline{A(U^E_{2^{-n-1-(l+1)}}(0))}$ mit $y_l - y_{l+1} = Ax_l$. Damit ist dann (E_{l+1}) erfüllt und die induktive Konstruktion vollendet.

Mit $s_k := \sum_{l=1}^k x_l$ gilt für alle $p \in \mathbb{N}$:

$$\|s_k - s_{k+p}\|_E = \left\|\sum_{j=1}^p x_{k+j}\right\|_E \leq \sum_{j=1}^p \|x_{k+j}\|_E \leq \sum_{j=1}^p 2^{-n-k-j-1} < 2^{-n-k-1} \to 0 \text{ für } k \to \infty\,.$$

$(s_k)_{k=1}^\infty$ ist also eine Cauchyfolge in E und damit wegen der Vollständigkeit von E konvergent gegen ein $x \in E$. Wegen

$$\|s_k\|_E \leq \sum_{l=1}^k \|x_l\|_E \leq \sum_{l=1}^k 2^{-n-l-1} < 2^{-n-1}$$

folgt $\|x\|_E \leq 2^{-n-1}$, also $x \in \overline{U^E_{2^{-n-1}}(0)} \subset U^E_{2^{-n}}(0)$.

Wir zeigen nun noch, daß $Ax = y$ gilt. Hierzu beachten wir unter Verwendung von (E_l) und $y_1 = y$:

$$As_k = \sum_{l=1}^k Ax_l = \sum_{l=1}^k (y_l - y_{l+1}) = y - y_{k+1}\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da A stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $A(U^E_\delta(0)) \subseteq U^F_{\varepsilon/2}(0)$. Wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n-2-k_0} < \delta$, so folgt für alle $k \geq k_0$:

$$y_{k+1} \in \overline{A(U^E_{2^{-n-2-k}}(0))} \subseteq \overline{A(U^E_\delta(0))} \subseteq \overline{U^F_{\varepsilon/2}(0)} \subset U^F_\varepsilon(0).$$

und damit $\|y - As_k\|_F = \|y_{k+1}\|_F < \varepsilon$. Also gilt $y_k \to 0$ in F für $k \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von A folgt

$$Ax = \lim_{k\to\infty} As_k = \lim_{k\to\infty}(y - y_{k+1}) = y.$$

Damit ist die Behauptung (b) bewiesen. □

5.6. Folgerung. *Seien E und F zwei Banachräume. Für eine stetige lineare Abbildung $A : E \to F$ sind äquivalent:*

(a) *A ist eine offene Abbildung.*
(b) *A ist surjektiv.*
(c) *$A(E)$ ist von zweiter Kategorie in F.*

Beweis. Nach Lemma 5.4 folgt (b) aus (a) und nach dem Kategoriensatz von Baire ist (c) eine Konsequenz von (b). Ist (c) erfüllt, so gilt (a) nach dem Satz von der offenen Abbildung. □

5.7. Satz von der inversenen Abbildung. *Seien E, F zwei Banachräume. Ist $A \in \mathcal{L}(E, F)$ bijektiv, so ist $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$, d.h. A ist ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\Omega \subset E$ eine beliebige offene Menge. Nach Folgerung 5.6 ist dann die Menge $(A^{-1})^{-1}(\Omega) = A(\Omega)$ offen in F. Also ist A^{-1} stetig. □

Bisher haben wir nur lineare Abbildungen betrachtet, die auf dem ganzen Ausgangsraum definiert waren. Wir wollen den Begriff der linearen Abbildung jetzt etwas allgemeiner fassen und auch lineare Abbildungen zulassen, die nur auf einem Untervektorraum definiert sind.

5.8. Definition. Seien E, F zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume. Ein *linearer Operator* T von E nach F ist eine auf einem Untervektorraum $D(T)$ definierte lineare Abbildung mit Werten in F. Wir schreiben $T : E \supseteq D(T) \to F$. Wir nennen $D(T)$ den *Definitionsbereich* von T und definieren

- den *Kern* von T durch $\ker T := N(T) := \{x \in D(T); Tx = 0\}$,
- das *Bild* T durch $\operatorname{ran} T := R(T) := \{Tx; x \in D(T)\}$ und
- den *Graphen* von T durch $G(T) := \{(x, Tx); x \in D(T)\}$.

Zwei lineare Operatoren T und S heißen *gleich*, $S = T$, genau dann, wenn $D(T) = D(S)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in D(T) = D(S)$ gilt. T heißt eine *Erweiterung* von S und S eine Einschränkung von T, falls gilt $D(T) \supseteq D(S)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in D(S)$. Wir schreiben dann auch $S \subseteq T$. Offensichtlich gilt

$$S \subseteq T \iff G(S) \subseteq G(T) \quad \text{und} \quad S = T \iff G(S) = G(T).$$

5.9. Definition. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume. Ein linearer Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ heißt *abgeschlossenen*, falls sein Graph $G(T)$ in $E \times F$ abgeschlossen ist. Hierbei versehen wir $E \times F$ mit der durch $\|(e, f)\|_{E\times F} := \|e\|_E + \|f\|_F$ für alle $(e, f) \in E \times F$ definierten Norm. Die durch

$$\|x\|_T := \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad \text{für alle } x \in D(T)$$

definierte Norm heißt die *Graphennorm* für T. Durch $x \mapsto (x, Tx)$ ist dann ein isometrischer Isomorphismus von $(D(T), \|\cdot\|_T)$ auf $(G(T), \|\cdot\|_{E\times F}|_{G(T)})$ gegeben.

Die Einführung der Graphennorm hat den Vorteil, daß $T : (D(T), \|\cdot\|_T) \to F$ stetig ist, wenn wir den Definitionsbereich mit der Graphennorm versehen.

Sind $E = \mathcal{H}$ und $F = \mathcal{K}$ Prä-Hilberträume, so werden $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ und $D(T)$ wieder zu Prä-Hilberträumen vermöge der durch

$$\langle (x, y), (u, v)\rangle := \langle x, u\rangle_{\mathcal{H}} + \langle y, v\rangle_{\mathcal{K}} \qquad \text{für alle } x, u \in \mathcal{H},\ y, v \in \mathcal{K}$$

und

$$\langle x, u\rangle_T := \langle x, u\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Tx, Tu\rangle_{\mathcal{K}} \qquad \text{für alle } x, u \in D(T)$$

definierten Skalarprodukte. Die hier durch definierten Normen sind (wie man leicht verifiziert) äquivalent zu den oben definierten Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{K}}$ bzw. $\|\cdot\|_T$.

5.10. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Für einen linearen Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ gilt: T ist genau dann abgeschlossen, wenn $(D(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig ist.*

Beweis. Da die Abbildung $x \mapsto (x, Tx)$ eine lineare Isometrie von $(D(T), \|\cdot\|_T)$ auf $G(T)$ versehen mit der durch $\|\cdot\|_{E\times F}$ induzierten Norm ist und $(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ vollständig ist, ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ genau dann vollständig, wenn $G(T)$ vollständig ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $G(T)$ abgeschlossener Untervektorraum von $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ ist. □

5.11. Definition. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume. Ein linearer Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ heißt *abschließbar*, falls es einen abgeschlossenen Operator $S : E \supseteq D(S) \to F$ mit $T \subseteq S$ gibt.

Für einen linearen Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ heißt

$$\mathfrak{S}(T) := \left\{ y \in F\,;\ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ in } D(T) \\ \text{mit } \|x_n\|_E \to 0 \text{ und } Tx_n \to y \text{ in } F \text{ für } n \to \infty \end{array} \right\}$$

der *separierende Raum* zu T.

5.12. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und sei $T : E \supseteq D(T) \to F$ ein linearer Operator.*

(a) *Für T sind äquivalent:*
  (i) *T ist abschließbar.*
  (ii) *$\mathfrak{S}(T) = \{0\}$.*
  (iii) *$\overline{G(T)} \cap (\{0\} \times F) = \{(0, 0)\}$.*

(b) *Ist T abschließbar, so gibt es genau eine minimale abgeschlossene Erweiterung $\overline{T}$ von T. Es ist $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. $\overline{T}$ heißt die Abschließung von T.*

Beweis. (a) (i) $\Longrightarrow$ (ii): Ist T abschließbar, so existiert ein abgeschlossener Operator $S \supseteq T$. Sei nun $y \in \mathfrak{S}(T)$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $D(T) \subseteq D(S)$ mit $\|x_n\|_E \to 0$ und $Sx_n = Tx_n \to y$ in F für $n \to \infty$. Es folgt $(0, y) \in \overline{G(S)} = G(S)$ und damit $S(0) = y$. Da S linear ist, ist dies nur möglich, wenn $y = 0$ gilt. Also folgt $\mathfrak{S}(T) = \{0\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Für alle $y \in F$ mit $(0, y) \in \overline{G(T)}$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $D(T)$ mit $x_n \to 0$ in E und $Tx_n \to y$ in F. Es folgt $y \in \mathfrak{S}(T)$. Ist also $\mathfrak{S}(T) = \{0\}$, so muß (iii) gelten.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Sei nun (iii) erfüllt. Wir definieren

$$D(\overline{T}) := \{x \in E\,; \exists y \in F : (x, y) \in \overline{G(T)}\}\,.$$

Für alle $x \in D(\overline{T})$ gibt es wegen der Voraussetzung (iii) genau ein $\overline{T}(x) := y \in F$ mit $(x, \overline{T}(x)) \in \overline{G(T)}$. Man rechnet nach, daß die hierdurch definierte Abbildung $\overline{T} : E \supseteq D(\overline{T}) \to F$ ein linearer Operator ist. Aus der Definition von $\overline{T}$ folgt $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Also ist $\overline{T}$ eine abgeschlossene Erweiterung von T.

(b) Ist T abschließbar, so gilt (iii) nach (a) und aus dem Beweis zu (iii) $\Longrightarrow$ (i) folgt die Existenz einer abgeschlossenen Erweiterung $\overline{T}$ mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Sei nun $S \supseteq T$

eine beliebige abgeschlossene Erweiterung von T. Dann ist $G(T) \subseteq G(S)$ und daher auch $G(\overline{T}) = \overline{G(T)} \subseteq \overline{G(S)} = G(S)$. Also gilt $\overline{T} \subseteq S$ und es folgt, daß $\overline{T}$ die eindeutig bestimmte minimale abgeschlossene Erweiterung von T ist. □

Seien nun $A_j : E \supseteq D(A_j) \to F$, $j = 1, 2, 3$, $S : F \supseteq D(S) \to G$ und $T : H \supseteq D(T) \to E$ lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir definieren lineare Operatoren $A_1 + A_2$, SA_1 und λA_1 durch

$$\begin{aligned} D(A_1 + A_2) :=& D(A_1) \cap D(A_2) \text{ und } (A_1 + A_2)x := A_1x + A_2x \text{ für alle } x \in D(A_1 + A_2), \\ D(SA_1) :=& \{x \in D(A_1)\,;\, A_1x \in D(S)\} \text{ und } (SA_1)x := S(A_1x) \text{ für alle } x \in D(SA_1), \\ D(\lambda A_1) :=& D(A_1) \text{ und } (\lambda A_1)x := \lambda(A_1x) \text{ für alle } x \in D(\lambda A_1). \end{aligned}$$

Für die so eingeführten Rechenoperationen rechnet man leicht nach, daß die Assoziativgesetze

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2) + A_3 =& A_1 + (A_2 + A_3) \\ (SA_1)T =& S(A_1T) \end{aligned}$$

und das erste Distributivgesetz

$$(A_1 + A_2)T = (A_1T) + (A_2T)$$

gelten. Für das zweite Distributivgesetz gilt im Allgemeinen nur die abgeschwächte Form

$$S(A_1 + A_2) \supseteq (SA_1) + (SA_2)\,.$$

Daß das Gleichheitszeichen beim zweiten Distributivgesetz im Allgemeinen nicht gilt, zeigt schon das folgende einfache

Beispiel. Sei $E \neq \{0\}$ und sei $A_1 := \mathrm{id}_E$, $A_2 := -\mathrm{id}_E$ mit $D(A_1) := D(A_2) := E$ und sei $S : E \supseteq D(S) \to E$ definiert durch $D(S) := \{0\}$ und $S(0) := 0$. Dann gilt $D(A_1 + A_2) = E$ und $(A_1 + A_2)x = 0 \in D(S)$ für alle $x \in E$ sowie $D((SA_1) + (SA_2)) = D(SA_1) \cap D(SA_2) = \{0\}$.

Ist $A : E \supseteq D(A) \to F$ ein injektiver Operator, so definieren wir $A^{-1} : F \supseteq D(A^{-1}) \to E$ durch $D(A^{-1}) := \mathrm{ran} A$ und $A^{-1}y := x$ für $y = A(x) \in \mathrm{ran} A = D(A^{-1})$. Dann ist auch A^{-1} ein injektiver Operator und es gilt $\mathrm{ran} A^{-1} = D(A)$.

5.13. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und sei $T : E \supseteq D(T) \to F$ ein injektiver linearer Operator. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.*

Beweis. Es ist $G(T^{-1}) = \{(Tx, x)\,;\, x \in D(T)\}$. Die Abbildung

$$\Psi : E \times F \to F \times E \text{ mit } \Psi(x, y) := (y, x) \text{ für alle } (x, y) \in E \times F$$

ist offensichtlich linear und erfüllt $\|\Psi(x, y)\|_{F\times E} = \|y\|_F + \|x\|_E = \|(x, y)\|_{E\times F}$ für alle $(x, y) \in E \times F$, ist also ein isometrischer Isomorphismus mit $\Psi(G(T)) = G(T^{-1})$. $G(T)$ ist also genau dann abgeschlossen in $E \times F$, wenn $G(T^{-1})$ in $F \times E$ abgeschlossen ist. □

5.14. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ und $(G, \|\cdot\|_G)$ normierte Räume, sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ und sei $S : F \supseteq D(S) \to G$ ein abgeschlossener Operator. Dann gilt:*

(a) *T ist ein abgeschlossener linearer Operator und auf $D(T) = E$ sind die Graphennorm $\|\cdot\|_T$ und die Ausgangsnorm $\|\cdot\|_E$ äquivalent.*
(b) *ST ist ein abgeschlossener Operator.*

Beweis. (a) Sei $((x_n, Tx_n))_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge aus $G(T)$ mit $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ in $E \times F$ für $n \to \infty$. Insbesondere gilt dann $x_n \to x$ in E und $Tx_n \to y$ in F für $n \to \infty$.

Wegen der Stetigkeit von T folgt auch $Tx_n \to Tx$ in F für $n \to \infty$. Also ist $y = Tx$ und $(x,y) = (x,Tx) \in G(T)$. Für alle $x \in E$ gilt ferner

$$\|x\|_E \leq \|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \leq \|x\|_E + \|T\|\|x\|_E = (1+\|T\|)\|x\|_E\,,$$

d.h. die Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_T$ sind äquivalent.

(b) Sei $((x_n,(ST)x_n))_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge aus $G(ST)$ mit $(x_n, STx_n) \to (x,y)$ in $E\times G$ für $n \to \infty$. Insbesondere hat man $x_n \to x$ in E und wegen der Stetigkeit von T auch $Tx_n \to Tx$ in F für $n \to \infty$. Wegen $x_n \in D(ST)$ ist $Tx_n \in D(S)$ und $(ST)x_n = S(Tx_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $((Tx_n,(ST)x_n))_{n=1}^\infty$ ist also eine Folge aus $G(S)$, welche in $F\times G$ gegen (Tx,y) konvergiert. Da S ein abgeschlossener Operator ist, folgt $Tx \in D(S)$ und $S(Tx) = y$. Also ist $x \in D(ST)$ und $(ST)x = y$, d.h. $(x,y) \in G(ST)$, d.h. $G(ST)$ ist abgeschlossen. $\square$

Bemerkung. In den Übungen wird gezeigt, daß es stetige lineare Operatoren S und abgeschlossene lineare Operatoren T gibt für die ST *nicht* abgeschlossen ist.

5.15. Lemma. *Seien $(E,\|\cdot\|_E)$ und $(F,\|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und $S \in \mathcal{L}(E,F)$. Ist $T : E \supseteq D(T) \to F$ ein linearer Operator, so gilt:*

(a) *$S+T$ ist abgeschlossen genau dann, wenn T abgeschlossen ist.*
(b) *$S+T$ ist abschließbar genau dann, wenn T abgeschließbar ist. Es ist dann $\overline{S+T} = S+\overline{T}$.*

Beweis. (a) "$\Longrightarrow$" Sei also $S+T$ abgeschlossen und sei $(x,y) \in \overline{G(T)}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in $D(T)$ mit $(x_n,Tx_n) \to (x,y)$ in $E \times F$ für $n \to \infty$. Insbesondere folgt $x_n \to x$ in E und wegen der Stetigkeit von S auch $Sx_n \to Sx$ in F für $n \to \infty$. Also gilt

$$(x_n,(S+T)x_n) = (x_n, Sx_n + Tx_n) \to (x, Sx+y) \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

Da $S+T$ abgeschlossen ist, folgt $x \in D(S+T) = D(S)\cap D(T) = D(T)$ und $Sx+Tx = (S+T)x = Sx+y$ also auch $Tx = y$. Es ist also $(x,y) \in G(T)$. $G(T)$ ist also abgeschlossen in $E \times F$.

"$\Longleftarrow$" Sei nun T ein abgeschlossener Operator. Wegen $-S \in \mathcal{L}(E,F)$ und $T = -S + (T+S)$ folgt aus der bereits gezeigten Beweisrichtung "$\Longrightarrow$", daß auch $S+T$ abgeschlossen ist.

(b) als Übungsaufgabe. $\square$

5.16. Satz vom abgeschlossenen Graphen. *Seien $(E,\|\cdot\|_E)$ und $(F,\|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Für einen linearen Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist abgeschlossen und $D(T)$ ist in $(E,\|\cdot\|_E)$ abgeschlossen.*
(b) *$T : (D(T),\|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F,\|\cdot\|_F)$ ist stetig und $D(T)$ ist in $(E,\|\cdot\|_E)$ abgeschossen.*
(c) *$T : (D(T),\|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F,\|\cdot\|_F)$ ist stetig und $G(T)$ ist in $(E\times F,\|\cdot\|_{E\times F})$ abgeschossen.*

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(b)": Sei also (a) erfüllt. Da T abgeschlossenen ist und $D(T)$ in E abgeschlossen ist, ist (wegen der Vollständigkeit von E) auch $(D(T),\|\cdot\|_E|_{D(T)})$ ein Banachraum. Da $G(T)$ in dem Banachraum $(E\times F,\|\cdot\|_{E\times F})$ abgeschlossen ist, ist auch $G(T)$ bezüglich der durch $\|\cdot\|_{E\times F}$ induzierten Norm ein Banachraum. Dieser ist isometrisch isomorph zu $(D(T),\|\cdot\|_T)$. Also ist auch $(D(T),\|\cdot\|_T)$ ein Banachraum. Die Identität

$$id : (D(T),\|\cdot\|_T) \to (D(T),\|\cdot\|_E|_{D(T)})$$

ist wegen $\|x\|_E \le \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_T$ offensichtlich stetig und bijektiv. Nach dem Satz von der inversen Abbildung ist also auch

$$id : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (D(T), \|\cdot\|_T)$$

stetig. Es gibt also eine Konstante $C > 0$ mit $\|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_T \le C\|x\|_E$ für alle $x \in D(T)$. Es folgt

$$\sup_{x\in D(T), \|x\|_E\le 1} \|Tx\|_F \le C < \infty$$

und damit die Stetigkeit von $T : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F, \|\cdot\|_F)$. Also gilt (b).

"(b)$\Longrightarrow$(c)": Sei nun (b) erfüllt. Da $D(T)$ in E abgeschlossen ist, ist $(D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)})$ ein Banachraum. Wegen der Stetigkeit von $T : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F, \|\cdot\|_F)$ ist nach Lemma 5.14 der Graph $G(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $D(T) \times F$ versehen mit der von $\|\cdot\|_{E\times F}$ induzierten Norm also auch von $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$. Also gilt (c).

"(c)$\Longrightarrow$(a)": Aus (c) folgt wegen der Stetigkeit von $T : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F, \|\cdot\|_F)$, daß für alle $x \in D(T)$ gilt

$$\|x\|_E \le \|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \le \|x\|_E + \|T\|\|x\|_E\,.$$

Die Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_T$ sind daher auf $D(T)$ äquivalent. Da $(D(T), \|\cdot\|_T)$ isometrisch isomorph zu dem abgeschlossenen Unterraum $G(T)$ des Banachraums $(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ und daher vollständig ist, ist auch $(D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)})$ vollständig und damit ein abgeschlossener Unterraum von $(E, \|\cdot\|_E)$. Also gilt (a). □

5.17. Folgerung. *Seien E_1, E_2 zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume und seien F_1, F_2 zwei Banachräume. Seien weiter $J_j \in \mathcal{L}(F_j, E_j)$, $j = 1, 2$ und $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ gegeben. Ist J_2 injektiv und ist $S : F_1 \to F_2$ linear mit $J_2S = TJ_1$, so ist auch S stetig.*

Beweis. Nach dem Satz 5.16 vom abgeschlossenen Graphen genügt es zu zeigen, daß $G(S)$ abgeschlossen ist in $E_1 \times E_2$. Sei also $(x, y) \in \overline{G(S)}$ beliebig vorgegeben. dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in F_1 mit $x_n \to x$ in F_1 und $Sx_n \to y$ in F_2 für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von J_1, J_2 und T und der Vertauschungsbedingung folgt $J_2Sx_n \to J_2y$ und $J_2Sx_n = TJ_1x_n \to TJ_1x = J_2Sx$ in E_2 für $n \to \infty$. Also muß $J_2y = J_2Sx$ gelten. Da J_2 injektiv ist, folgt $Sx = y$ und daher $(x, y) = (x, Sx) \in G(S)$. Damit ist gezeigt, daß $G(S)$ abgeschlossen ist. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 5.

5.1. Aufgabe. Seien E und F zwei Banachräume und sei $T : E \to F$ ein stetiger linearer Operator, so daß $\dim F/T(E) =: N < \infty$ gilt, d.h. so daß das Bild von T von endlicher Kodimension in F ist. Zeigen Sie, daß in diesem Fall das Bild von T abgeschlossen ist.

Hinweis: Man beachte, daß $T(E)$ einen *algebraischen* Komplementärraum der Dimension N besitzt.

5.2. Aufgabe. Seien X_0 und X_1 Untervektorräume eines normierten Raumes $(Y, \|\cdot\|)$, auf denen Normen $\|\cdot\|_0$ bzw. $\|\cdot\|_1$ gegeben seien, so daß $(X_0, \|\cdot\|_0)$ und $(X_1, \|\cdot\|_1)$ Banachräume sind und die kanonischen Einbettungsabbildungen

$$(X_j, \|\cdot\|_j) \hookrightarrow (Y, \|\cdot\|), \quad x \mapsto x$$

stetig sind ($j = 0, 1$). Zeigen Sie:

(a) Ist $T : (Y, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ eine stetige lineare Abbildung mit $TX_0 \subset X_0$, so ist auch die Abbildung $T|_{X_0} : (X_0, \|\cdot\|_0) \to (X_0, \|\cdot\|_0)$ stetig.

(b) Die Untervektorräume $X_\Delta := X_0 \cap X_1$ und

$$X_\Sigma := X_0 + X_1 = \{x_0 + x_1 \,:\, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}$$

werden, versehen mit den durch

$$\|x\|_\Delta := \max_{j=0,1} \|x\|_j \quad \text{und} \quad \|x\|_\Sigma := \inf\{\|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 \,:\, x = x_0 + x_1\}$$

definierten Normen zu Banachräumen.

5.3. Aufgabe. Führen Sie den Beweis zu Lemma 5.15 (b) aus.

5.4. Aufgabe. Geben Sie ein Beispiel eines stetigen linearen Operators S und eines abgeschlossenen linearen Operators T, so daß ST nicht abgeschlossen ist.

KAPITEL 6

Der Satz von Hahn–Banach

6.1. DEFINITION. Sei E ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine Abbildung $p : E \to \mathbb{R}$ heißt *sublineares Funktional*, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) $\forall x \in E\, \forall 0 < \lambda \in \mathbb{R} : \quad p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
(b) $\forall x, y \in E : \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Insbesondere sind also alle reellwertigen $\mathbb{R}$-linearen Funktionale und alle Halbnormen sublineare Funktionale.

6.2. LEMMA. *Sei E ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional auf E. Sei F ein Untervektorraum, $x_0 \in E \setminus F$ und $f : F \to \mathbb{R}$ linear mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F$, so gibt es ein lineares Funktional $f_0 : F_0 := \mathrm{LH}(\{x_0\} \cup F) \to \mathbb{R}$ mit*

$$f_0 \leq p \text{ auf } F_0 \quad \text{und} \quad f_0|_F \equiv f\,.$$

BEWEIS. Für alle $x, y \in F$ gilt:

$$f(x) - f(y) = f(x - y) \leq p(x - y) \leq p(x + x_0) + p(-x_0 - y)$$

und daher

$$-p(-x_0 - y) - f(y) \leq p(x + x_0) - f(x)\,.$$

Hieraus folgt

$$\sup_{y \in F} -p(-x_0 - y) - f(y) \leq \inf_{x \in F} p(x + x_0) - f(x)\,.$$

Insbesondere existiert also ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x, y \in F : \quad -p(-x_0 - y) - f(y) \leq \gamma \leq p(x + x_0) - f(x)\,. \tag{6.1}$$

Wir definieren nun $f_0 : F_0 \to \mathbb{R}$ durch $f_0(x + \lambda x_0) := f(x) + \lambda\gamma$ für alle $x \in F, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist f_0 offensichtlich linear und erfüllt $f_0|_F \equiv f$.

Wir zeigen noch $f_0 \leq p$ auf F_0. Sei also $u = x + \lambda x_0 \in F_0$ beliebig, $x \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\lambda = 0$, so ist $u = x \in F$ und daher nach Voraussetzung $f_0(u) = f(u) \leq p(u)$. Ist $\lambda > 0$, so ersetzen wir in (6.1) x durch $\frac{1}{\lambda}x$ und erhalten aus der rechten Ungleichung

$$\gamma \leq p(\frac{1}{\lambda}x + x_0) - f(\frac{1}{\lambda}x),$$

woraus nach Multiplikation mit λ wegen der positiven Homogenität von p und f folgt:

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda\gamma \leq p(x + \lambda x_0) - f(x) = p(u) - f(x)$$

folgt. Hieraus erhält man durch Addition von $f(x)$ wegen der Linearität von f

$$f_0(u) = f(x) + \lambda\gamma \leq p(u)\,.$$

Im verbleibenden Fall $\lambda < 0$ ersetzen wir in (6.1) in der linken Ungleichung y durch $\frac{1}{\lambda}x$ und erhalten

$$-p(-x_0 - \frac{1}{\lambda}x) - f(\frac{1}{\lambda}x) \leq \gamma.$$

Durch Multiplikation mit λ folgt wegen der positiven Homogenität von p und der Linearität von f,

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda\gamma \le (-\lambda)p(-\frac{1}{\lambda}x - x_0) - f(x) \le p(u) - f(x)\,.$$

Hieraus folgt wie im vorhergehenden Fall $f_0(u) = f(x) + \lambda\gamma \le p(u)$. Damit ist gezeigt, daß $f_0(u) \le p(u)$ für alle $u \in F_0$ erfüllt ist. □

6.3. Satz von Hahn (1927) und Banach (1929). *Sei E ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, $p : E \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional auf E und F ein Untervektorraum von E. Ist $f : F \to \mathbb{R}$ linear mit $f \le p$ auf F, so gibt es ein lineares Funktional $f_* : E \to \mathbb{R}$ mit*

$$f_*|_F \equiv f \quad \textit{und} \quad f_* \le p \ \textit{auf}\ E. \tag{6.2}$$

Beweis. Sei

$$\mathcal{F} := \left\{ (G, f_G);\ \begin{array}{l} G \text{ ist Untervektorraum von } E \text{ mit } F \subseteq G, \\ f_G : G \to \mathbb{R} \text{ ist linear mit } f_G|_F \equiv f \text{ und } f_G \le p \text{ auf } G \end{array} \right\}.$$

Wegen $(F, f) \in \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Auf $\mathcal{F}$ ist eine teilweise Ordnung gegeben durch

$$(G, f_G) \le (H, f_H) :\Longleftrightarrow G \subseteq H \text{ und } f_G \equiv f_H|_G\,.$$

Sei nun $\mathcal{K}$ eine linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{F}$. Wir setzen

$$G_0 := \bigcup_{(G,f_G)\in\mathcal{K}} G \quad \text{und für } u \in G_0 : \quad f_{G_0}(u) := f_G(u) \text{ falls } u \in G \text{ und } (G, f_G) \in \mathcal{K}\,.$$

Da $\mathcal{K}$ linear geordnet ist, ist G_0 ein Untervektorraum und f_{G_0} wohldefiniert. Man rechnet weiter nach, daß f_{G_0} linear ist und $f_{G_0}|G \equiv f_G$ für alle $(G, f_G) \in \mathcal{K}$ gilt. Wegen $f_G \le p$ auf G für alle $(G, f_G) \in \mathcal{F}$ gilt auch $f_{G_0} \le p$ auf G_0. Damit ist gezeigt: Jede linear geordnete Teilmenge $\mathcal{K}$ von $\mathcal{F}$ besitzt eine obere Schranke in $\mathcal{F}$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also wenigstens ein maximales Element (H, f_H) in $\mathcal{F}$.

Ist $H \neq E$, so gibt es ein $x_0 \in E \setminus H$ und damit nach Lemma 6.2 ein lineares Funktional $f_{H_0} : H_0 := \mathrm{LH}(\{x_0\} \cup H) \to \mathbb{R}$ mit $f_{H_0}|_H \equiv f_H$ und $f_{H_0} \le p$ auf H_0. Dann ist aber (H_0, f_{H_0}) ein echt größeres Element aus $\mathcal{F}$ im Widerspruch zur maximalen Wahl von (H_0, f_{H_0}). Daher muß $H_0 = E$ gelten und $f_* := f_{H_0}$ erfüllt (6.2). □

6.4. Beispiel. Es gibt ein lineares Funktional LIM: $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ auf dem Raum $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der beschränkten Folgen mit Werten in $\mathbb{R}$ mit

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \mathrm{LIM}(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n \tag{6.3}$$

für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Insbesondere gilt $\mathrm{LIM}(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für alle konvergenten Folgen $x = (x_n)_{n=1}^\infty$.

Beweis. Für $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ definieren wir $p(x) := \limsup_{n\to\infty} x_n$. Man rechnet unmittelbar nach, daß p ein sublineares Funktional auf $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist (welches übrigens weder linear noch eine Halbnorm ist). Der Raum $c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der konvergenten reellwertigen Folgen ist ein Untervektorraum auf dem durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$ für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ein lineares Funktional $f : c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f \equiv p$ auf $c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ definiert ist. Nach dem Satz 6.3 von Hahn–Banach gibt es also ein lineares Funktional LIM: $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, welches f auf ganz $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ fortsetzt und die rechte Ungleichung in (6.3) erfüllt. Zum Beweis der linken Ungleichung beachten wir, daß für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ gilt

$$-\mathrm{LIM}(x) = \mathrm{LIM}(-x) \le p(-x) = \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n\,,$$

woraus die linke Ungleichung in (6.3) durch Multiplikation mit -1 folgt. □

Später, in Satz 6.8, werden wir sehen, daß man LIM sogar so finden kann, daß noch einige zusätzliche Eigenschaften erfüllt sind.

6.5. Satz von Hahn–Banach für reelle und komplexe Vektorräume. *Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und sei $p : E \to [0, \infty)$ eine Halbnorm auf E. Ist F eine Untervektorraum von E und $f : F \to \mathbb{K}$ ein $\mathbb{K}$–lineares Funktional auf F mit $|f(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in F$, so gibt es ein $\mathbb{K}$–lineares Funktional $f_0 : E \to \mathbb{K}$ auf E mit $|f_0(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in E$ und $f_0|_F \equiv f$.*

Beweis. (a) Wir führen den Beweis zunächst für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gilt auf F: $f \leq |f| \leq p$. Nach dem Satz 6.3 von Hahn–Banach gibt es also ein lineares Funktional $f_0 : E \to \mathbb{R}$ mit $f_0|_F \equiv f$ und $f_0 \leq p$ auf ganz E. Da dann auch

$$-f_0(x) = f_0(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

für alle $x \in E$ gelten muß, folgt $|f_0| \leq p$ auf E.

(b) Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (Bohnenblust und Sobcyk): Da $\mathbb{R}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist, ist jeder $\mathbb{C}$–Vektorraum insbesondere auch ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Ist nun $f : F \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$–linear mit $|f| \leq p$ auf F, so sind die Funktionale

$$f_1 := \operatorname{Re} f, \quad x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$$
$$f_2 := \operatorname{Im} f, \quad x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$$

reell linear und erfüllen $|f_j| \leq |f| \leq p$ auf F für $j = 1, 2$. Nach (a) gibt es also ein reell lineares Funktional $g_1 : E \to \mathbb{R}$ mit $|g_1| \leq p$ auf E und $g_1|_F \equiv \operatorname{Re} f$. Wir setzen $g_2(x) := -g_1(ix)$ für alle $x \in E$ und definieren $f_0 : E \to \mathbb{C}$ durch

$$f_0(x) := g_1(x) + ig_2(x) = g_1(x) - ig_1(ix) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Zu zeigen ist nun:

(i) f_0 ist komplex linear.
(ii) $|f_0| \leq p$ auf E.
(iii) $f_0|_F \equiv f$.

Zu (i): Da g_1 und g_2 reell linear sind, ist f_0 reell linear. Sei nun $x \in E$ und $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ beliebig mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_0(\lambda x) = g_1(\alpha x + i\beta x) - ig_1(i\alpha x - \beta x) = \alpha g_1(x) + \beta g_1(ix) - i\alpha g_1(ix) + i\beta g_1(x) = \\ = \lambda g_1(x) - i\lambda g_1(ix) = \lambda f_0(x) \end{aligned}$$

Also ist f_0 komplex linear.

Zu (ii) Sei $x \in E$ beliebig. Dann gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $f_0(x) = e^{i\varphi}|f_0(x)|$. Es folgt:

$$|f_0(x)| = e^{-i\varphi} f_0(x) = f_0(e^{-i\varphi} x) = \operatorname{Re} f_0(e^{-i\varphi} x) = g_1(e^{-i\varphi} x) \leq p(e^{-i\varphi} x) = p(x)$$

und damit (ii).

Zu (iii): Nach Konstruktion ist $g_1|_F \equiv \operatorname{Re} f$. Nun gilt für alle $x \in F$:

$$\begin{aligned} g_1(ix) + ig_1(x) = \operatorname{Re} f(ix) + i \operatorname{Im} f(ix) = f(ix) = if(x) = i \operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Im} f(ix) = \\ = ig_1(x) - \operatorname{Im} f(x), \end{aligned}$$

d.h. es gilt $\operatorname{Im} f(x) = -g_1(ix)$. Damit folgt für alle $x \in F$: $f_0(x) = g_1(x) - ig_1(ix) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = f(x)$. □

6.6. Lemma. *Sei F ein abgeschlossener Untervektorraum eines normierten Raums E. Ist F_0 ein weiterer Untervektorraum von E mit $F \subset F_0$ und $\dim F_0/F < \infty$, so ist auch F_0 abgeschlossen.*

Beweis. F_0/F ist als endlich dimensionaler Unterraum des nach Lemma 1.20 normierten Raums E/F nach 1.17 abgeschlossen in E/F. Da der kanonische Epimorphismus $\pi : E \to E/F$ nach Lemma 1.20 stetig ist, ist auch $F_0 = \pi^{-1}(F_0/F)$ abgeschlossen in E. □

6.7. Folgerungen. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum.*

(a) *Ist F ein Untervektorraum von E und $f : F \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional auf F, so gibt es ein stetiges lineares Funktional $f_0 : E \to \mathbb{K}$ auf E mit $f_0|_F \equiv f$ und $\|f_0\|_{E'} = \|f\|_{F'}$.*

(b) *Ist F ein abgeschlossener Untervektorraum von E und $x_0 \in E \setminus F$, so gibt es ein $f_0 \in E'$ mit $\|f_0\|_{E'} = 1$, $f_0|_F \equiv 0$ und $f_0(x_0) = \inf_{x\in F} \|x_0 - x\|$.*

(c) *Zu jedem $x_0 \in E$ mit $\|x_0\| = 1$ gibt es ein $f_0 \in E'$ mit $\|f_0\|_{E'} = 1 = f_0(x_0)$.*

Beweis. (a) $p : E \to [0, \infty)$ mit $p(x) := \|f\|_{F'}\|x\|$ für alle $x \in E$ ist eine Halbnorm auf E mit $|f| \le p$ auf F. Nach der Variante 6.5 des Satzes von Hahn–Banach gibt es also ein lineares Funktional $f_0 : E \to \mathbb{K}$ mit $f_0|_F \equiv f$ und $|f_0(x)| \le p(x) = \|f\|_{F'}\|x\|$ für alle $x \in E$. Insbesondere ist f_0 stetig und $\|f_0\|_{E'} \le \|f\|_{F'}$. Wegen $\|f\|_{F'} \le \|f_0\|_{E'}$ folgt die Behauptung.

(b) Wir setzen $F_0 :=\mathrm{LH}(F \cup \{x_0\})$. Da F ein abgeschlossener Untervektorraum von E ist, ist F_0 nach Lemma 6.6 abgeschlossen und es ist $d := \mathrm{dist}(x_0, F) = \inf_{x\in F} \|x_0 - x\| > 0$. Durch $f(x + \lambda x_0) := \lambda d$ für alle $x \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein lineares Funktional $f : F_0 \to \mathbb{K}$ gegeben mit $f|_F \equiv 0$ und

$$\begin{aligned}\|f\|_{F_0'} &= \sup_{0\neq y\in F_0} \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \sup_{0\neq\lambda\in\mathbb{K},x\in F} \frac{|f(x + \lambda x_0)|}{\|x + \lambda x_0\|} = \sup_{0\neq\lambda\in\mathbb{K},x\in F} \frac{|\lambda|d}{\|x + \lambda x_0\|} = \\ &= d \sup_{0\neq\lambda\in\mathbb{K}} \sup_{x\in F} \frac{1}{\|\frac{1}{\lambda}x + x_0\|} = d \sup_{0\neq\lambda\in\mathbb{K}} \frac{1}{\inf_{u\in F} \|u + x_0\|} = 1\,.\end{aligned}$$

Nach Teil (a) gibt es also ein $f_0 \in E'$ mit $\|f_0\|_{E'} = 1$ und $f_0|_{F_0} \equiv f$. Dieses stetige lineare Funktional hat die gewünschten Eigenschaften.

(c) erhält man aus (b) in dem Spezialfall $F = \{0\}$. □

Als Anwendung beweisen wir die schon angekündigte Verschärfung von 6.4:

6.8. Satz (Banach–Grenzwerte). *Es gibt ein lineares Funktional L auf $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ so daß gilt:*

(a) *$L(\mathbf{1}) = 1$, wobei $\mathbf{1}$ die konstante Folge $(1)_{n=1}^\infty$ bezeichne.*

(b) *$L(x) \ge 0$ für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ mit x_n reell und $x_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Mit $Sx := (x_{n+1})_{n=1}^\infty$ für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ gilt $L(Sx) = L(x)$ für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.*

(d) *L ist stetig mit $\|L\| = 1$.*

Funktionale mit den Eigenschaften (a)-(c) heißen auch Banach-Grenzwerte. Sie haben zusätzlich folgende Eigenschaften:

(e) *Für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ gilt*

$$|L(x)| \le \limsup_{n\to\infty} |x_n|\,.$$

(f) *Für alle reellwertigen Folgen $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le L(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n\,.$$

(g) *Für alle konvergenten Folgen $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ gilt $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Beweis. Sei $F := \overline{\operatorname{ran}(1-S)}$. Dies ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Wegen $0 \in F$ ist $\operatorname{dist}(\mathbf{1}, F) \le 1$. Wir zeigen zunächst:

(i) $\operatorname{dist}(\mathbf{1}, F) = 1$.

Zum Beweis gehen wir indirekt vor und nehmen an, es ist $\operatorname{dist}(\mathbf{1}, F) < c < 1$. Dann gibt es eine Folge $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - x_{n+1} - 1| < c\,.$$

Es folgt mit $\varepsilon_n := x_n - x_{n+1} - 1$:

$$x_1 - x_{n+1} = n + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Wegen $|\varepsilon_k| < c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir:

$$|x_1 - x_{n+1}| \ge n - nc \to \infty \quad \text{für } n \to \infty$$

im Widerspruch zur Beschränktheit der Folge $x = (x_n)_{n=1}^\infty$. Also muß doch (i) gelten.

(ii) Wir fassen $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum auf und F als $\mathbb{R}$–Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Nach Folgerung 6.7 (b) gibt es ein $\mathbb{R}$–lineares Funktional $L_\mathbb{R} : \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ mit $\|L_\mathbb{R}\| = 1$, $L_\mathbb{R}|_F \equiv 0$ und $L_\mathbb{R}(\mathbf{1}) = \operatorname{dist}(\mathbf{1}, F) = 1$. Für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ definieren wir reellwertige Folgen $\operatorname{Re}(x) := (\operatorname{Re}(x_n))_{n=1}^\infty$, $\operatorname{Im}(x) := (\operatorname{Im}(x_n))_{n=1}^\infty$. Hiermit ist $x = \operatorname{Re}(x) + i\operatorname{Im}(x)$. Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß durch $L(x) := L_\mathbb{R}(\operatorname{Re}(x)) + iL_\mathbb{R}(\operatorname{Im}(x))$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional $L : \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert ist. Nach Konstruktion erfüllt L die Bedingung (a) und wegen $\operatorname{Re}(x - Sx) = (1-S)\operatorname{Re}(x)$, $\operatorname{Im}(x - Sx) = (1-S)\operatorname{Im}(x))$ für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ und $L_\mathbb{R}|_{\operatorname{ran}(1-S)} \equiv 0$ auch (c).

(iii) Wir zeigen nun $\|L\| = 1$: Sei hierzu $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ beliebig mit $\|x\|_\infty \le 1$. Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $|L(x)| = e^{i\varphi}L(x)$. Wegen der Linearität von L und $\|L_\mathbb{R}\| = 1$ folgt

$$|L(x)| = L(e^{i\varphi}x) = \operatorname{Re}(L(e^{i\varphi}x)) = L_\mathbb{R}(\operatorname{Re}(e^{i\varphi}x)) \le \|\operatorname{Re}(e^{i\varphi}x)\|_\infty \le \|x\|_\infty \le 1\,.$$

Also ist L stetig mit $\|L\| \le 1$. Wegen $L(\mathbf{1}) = 1 = \|\mathbf{1}\|_\infty$ folgt $\|L\| = 1$.

(iv) Sei nun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ mit $x_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $0 \le x_n \le \|x\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und hieraus $\|x - \frac{1}{2}\|x\|_\infty\mathbf{1}\| \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty$. Wegen (a) und $\|L\| = 1 = L(\mathbf{1})$ ergibt sich

$$|L(x) - \frac{1}{2}\|x\|_\infty| = |L(x - \frac{1}{2}\|x\|_\infty\mathbf{1})| \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty$$

und hieraus (wegen $L(x) = L_\mathbb{R}(x) \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{1}{2}\|x\|_\infty \le L(x) - \frac{1}{2}\|x\|_\infty \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty,$$

d.h. $0 \le L(x) \le \|x\|_\infty$. Damit ist (b) gezeigt.

(v) Zu (e): Sei $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig und $\alpha := \limsup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \ge n_0$ gilt: $|x_n| < \alpha + \varepsilon$. Insbesondere folgt $\|S^{n_0}(x)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{k+n_0}| \le \alpha + \varepsilon$. Es folgt wegen (c):

$$|L(x)| = |L(S^{n_0}(x))| \le \|S^{n_0}(x)\|_\infty \le \alpha + \varepsilon\,.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, erhalten wir (e).

(vi) Zu (f): Sei $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ beliebig. Mit $\alpha := \liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\beta := \limsup_{n\to\infty} x_n$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |x_n - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)| \le \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Nach (e) und (a) erhalten wir

$$|L(x) - \frac{\alpha + \beta}{2}| = |L(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\mathbf{1})| \le \frac{\beta - \alpha}{2}\,.$$

Wegen $L(x) \in \mathbb{R}$ folgt hieraus
$$-\frac{\beta-\alpha}{2} \le L(x) - \frac{\alpha+\beta}{2} \le \frac{\beta-\alpha}{2}\,,$$
woraus sich (f) ergibt.

(vii) Zu (g): Sei nun $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ eine in $\mathbb{C}$ konvergente Folge. Dann sind die Folgen $\mathrm{Re}(x)$ und $\mathrm{Im}(x)$ konvergente reellwertige Folgen. Nach (f) gilt also $L(x) = L(\mathrm{Re}(x)) + iL(\mathrm{Im}(x)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(x_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$. □

Eine stetige lineare Abbildung $P : E \to E$ von einem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ in sich heißt *stetige Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt und ein Unterraum F von $(E, \|\cdot\|)$ heißt *stetig projiziert*, falls es eine stetige Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{ran} P = F$ gibt. Wegen $F = \ker 1 - P$ ist F dann insbeondere abgeschlossen. Nach dem Projektionssatz ist jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums stetig projiziert (sogar mit einer orthogonalen Projektion). In Banachräumen, die nicht topologisch isomorph zu einem Hilbertraum sind, ist dies im Allgemeinen nicht mehr richtig. Mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von Hahn und Banach kann man jedoch zeigen, daß endlich dimensionale Untervektorräume und abgeschlossenen Untervektorräume von endlicher Kodimension eines normierten Raums stets stetig projiziert sind. Zunächst zeigen wir ein Lemma von Auerbach:

6.9. Lemma (von Auerbach). *Sei $(F, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit* $\dim F = n < \infty$. *Dann gibt es $x_1, \dots, x_n \in F$ und $x_1', \dots, x_n' \in F'$ mit $\|x_j\| = \|x_j'\| = x_j'(x_j) = 1$ für $j = 1, \dots, n$ und $x_j'(x_k) = 0$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \ne k$. Insbesondere ist $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von F.*

Beweis. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von F. Dann hat jedes Element $x \in F$ eine eindeutige Darstellung der Form
$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) e_j$$
mit $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x) \in \mathbb{K}$. Die durch
$$V(u_1, \dots, u_n) := \det(\alpha_j(u_k))_{j,k=1,\dots n} \qquad (u_1, \dots, u_n \in F)$$
definierte Abbildung $V : F^n \to \mathbb{K}$ ist dann eine stetige, alternierende Multilinearform auf F^n. Wegen der Kompaktheit von $(\partial B_F)^n$ gibt es $x_1, \dots, x_n \in F$ mit $\|x_j\| = 1$ für $j = 1, \dots, n$ und mit
$$V(x_1, \dots, x_n) = \max_{u_1,\dots,u_n \in \partial B_F} |V(u_1, \dots, u_n)|.$$
Für $j = 1, \dots, n$ definieren wir nun stetige lineare Funktionale $x_j' : F \to \mathbb{K}$ durch
$$x_j'(x) := \frac{V(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)}{V(x_1, \dots, x_n)}\,.$$
Direkte Rechnung zeigt nun, daß $x_1, \dots, x_n$, $x_1', \dots, x_n'$ die gewünschten Eigenschaften besitzen. □

Wir zeigen nun die angekündigten Projektionsaussagen:

6.10. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ist F ein Untervektorraum der Dimension n von E, so gibt es eine Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ mit* $\operatorname{ran} P = F$ *und $\|P\| \le n$.*
(b) *Ist F ein abgeschlossener Untervektorraum der Kodimension n von E und ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es eine Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ mit* $\operatorname{ran} P = F$ *und $\|P\| \le n + 1 + \varepsilon$.*

Beweis. (a) Nach dem Auerbachlemma gibt es $x_1, \ldots, x_n \in F$, $x_1', \ldots, x_n' \in F'$ mit $\|x_j\| = \|x_j'\| = x_j'(x_j) = 1$ für $j = 1, \ldots, n$ und $x_j'(x_k) = 0$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq k$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (in der Form von Folgerung 6.7 (a)) gibt es $y_1', \ldots y_n' \in E'$ mit $y_j'|_F \equiv x_j'$ und $\|y_j'\|_{E'} = \|x_j'\|_{F'} = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Durch

$$P(y) := \sum_{j=1}^{n} y_j'(x)x_j \qquad (y \in E)$$

ist also eine stetige lineare Abbildung mit Bild in F auf E definiert. Wegen

$$\|P(y)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j'(x)| \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|y_j'\|_{E'} \|x\| \cdot |\|x_j\| = n\|x\|$$

ist $\|P\| \leq n$. Ist $x \in F$ beliebig, so hat x eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \qquad \text{mit} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Es folgt

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j'(x)x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_j'(x_k)x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_j'(x_k)x_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = x.$$

Insbesondere folgt also $P^2 = P$ und $\operatorname{ran} P = F$.

(b) Wegen $\dim E/F = n < \infty$ gibt es nach dem Auerbachlemma Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_n \in E/F$ und stetige lineare Funktionale $\xi_1', \ldots, \xi_n' \in (E/F)'$ mit $\|\xi_j\|_{E/F} = \|\xi_j'\|_{(E/F)'} = 1$ und $\xi_j'(\xi_k) = \delta_{j,k}$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Bezeichnet $\pi : E \to E/F$ den kanonischen Epimorphismus, so ist $x_j' := \xi_j' \circ \pi \in E'$ mit $\|x_j'\|_{E'} \leq \|\xi_j'\|_{(E/F)'} \|\pi\| = 1$ für $j = 1, \ldots, n$. Nach Definition der Norm im Quotientenraum gilt

$$1 = \|\xi_j\|_{E/F} = \inf_{x \in \xi_j} \|x\| \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Insbesondere gibt es also zu $\varepsilon > 0$ Elemente $x_j \in E$ mit $\pi(x_j) = \xi_j$ und $\|x_j\| < 1 + \frac{\varepsilon}{n}$ für $j = 1, \ldots, n$. Wegen $x_j'(x_k) = \xi_j'(\xi_k) = \delta_{j,k}$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ sind die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig und der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum F_0 hat die Dimension n.

Wir definieren nun für alle $x \in E$:

$$Qx := x - \sum_{k=1}^{n} x_k'(x)x_k\,, \qquad Px := (1 - Q)x = \sum_{k=1}^{n} x_k'(x)x_k\,.$$

Wie im Beweis zu (a) sieht man P (und damit auch $Q = 1 - P$ ist eine stetige Projektion mit $\ker Q = \operatorname{ran} P = F_0$ Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $x \in E$:

$$\|Q(x)\| \leq \|x\| + \sum_{k=1}^{n} |x_k'(x)| \cdot \|x_k\| \leq \|x\| \cdot \Big(1 + n\big(1 + \frac{\varepsilon}{n}\big)\Big) \leq (n + 1 + \varepsilon)\|x\|$$

und somit $\|Q\| \leq n + 1 + \varepsilon$. Wegen $F = \ker \pi \subseteq \ker x_j'$, $j = 1, \ldots, n$, gilt $Q(x) = x$ für alle $x \in F$ und daher $F \subseteq \operatorname{ran} Q$. Da F von der Kodimension n in E ist und $\ker Q = F_0$ die Dimension n hat, muß $F = \operatorname{ran} Q$ gelten. □

6.11. Trennungssatz von Hahn–Banach. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und seien A, B zwei disjunkte, konvexe, nicht leere Teilmengen von E.*

(a) *Ist A offen, so gibt es ein $f \in E'$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit*

$$\forall a \in A, b \in B: \quad \operatorname{Re} f(a) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(b).$$

(b) *Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es $f \in E'$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ mit*

$$\forall a \in A, b \in B: \quad \operatorname{Re} f(a) < \gamma - \varepsilon < \gamma < \operatorname{Re} f(b).$$

Beweis. (i) Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vorausgesetzt.

(a) Seien $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ fest gewählt. Mit $x_0 := b_0 - a_0$ gilt: $C := x_0 + A - B$ ist eine offene, konvexe Nullumgebung in E. Wir definieren $p : E \to [0, \infty)$ durch

$$p(x) := \inf\{\rho > 0 \,;\, x \in \rho C\}\,.$$

Man rechnet nach, daß p sublinear ist. Wegen $A \cap B = \emptyset$ ist $x_0 \notin C$ und daher $p(x_0) \geq 1$. Wir setzen $F := \mathrm{LH}\{x_0\}$ und definieren ein lineares Funktional $f_0 : F \to \mathbb{R}$ durch $f_0(\lambda x_0) := \lambda$ für alle $\lambda x_0 \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in [0, \infty): &\quad f_0(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0), \\ \forall \lambda \in (-\infty, 0): &\quad f_0(\lambda x_0) = \lambda < 0 \leq p(\lambda x_0) \end{aligned}$$

und damit $f_0(x) \leq p(x)$ auf F. Nach dem Satz 6.3 von Hahn–Banach gibt es also ein lineares Funktional $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f|_F \equiv f_0$ und $f \leq p$ auf E. Insbesondere ist $f \leq 1$ auf C und daher

$$-1 \leq f \quad \text{auf } -C.$$

Für alle $x \in V := C \cap (-C)$ ist also $|f(x)| \leq 1$. Da V eine konvexe Nullumgebung ist, folgt $f \in E'$. Ferner gilt für alle $a \in A, b \in B$:

$$f(a) - f(b) + 1 = f(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1,$$

da $a - b + x_0 \in C$ und C offen ist. Also gilt

$$\forall a \in A, b \in B: \quad f(a) < f(b).$$

Insbesondere ist f nicht konstant, also $f(E) = \mathbb{R}$. Wir setzen nun $\gamma := \sup_{a \in A} f(a)$. Wäre $\gamma \in f(A)$, also $\gamma = f(a)$ für ein $a \in A$, so gäbe es, da A offen ist, ein $\delta > 0$ mit $(1 \pm \delta)a \in A$ und es würde folgen $(1 \pm \delta)\gamma = (1 \pm \delta)f(a) \in f(A)$ im Widerspruch zur Definition von γ. Also ist $\gamma \notin f(A)$ und es folgt

$$\forall a \in A, b \in B: \quad \operatorname{Re} f(a) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(b).$$

(b) Da A kompakt und B abgeschlossen ist mit $A \cap B = \emptyset$, ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. es gibt also ein $\delta > 0$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > \delta$. Es folgt daher $(A + U_\delta(0)) \cap B = \emptyset$. Da $A + U_\delta(0)$ offen und konvex ist, gibt es nach (a) ein $f \in E'$ und ein $\gamma_1 > 0$ mit

$$\forall a \in A + U_\delta(0), b \in B: \quad \operatorname{Re} f(a) < \gamma_1 \leq \operatorname{Re} f(b).$$

Da f stetig ist, ist $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von $(-\infty, \gamma_1)$. Es gibt also ein $\varepsilon_1 > 0$ mit $f(a) < \gamma_1 - \varepsilon_1$. Mit $\gamma := \gamma_1 - \varepsilon_1/2$ und $\varepsilon := \varepsilon_1/2$ folgt die Behauptung.

(ii) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Indem man E zunächst als $\mathbb{R}$–Vektorraum auffaßt, findet man gemäß (i) ein stetiges, reell–lineares Funktional $f_1 : E \to \mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Sodann definiert man für alle $x \in E$: $f(x) := f_1(x) - i f_1(ix)$ und rechnet nach, daß f komplex–linear ist. Es folgt $f \in E'$ und f hat wegen $\operatorname{Re} f = f_1$ die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 6.

6.1. Aufgabe. (a) Zeigen Sie, daß in jedem normierten Raum X gilt:

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)|\,;\,\varphi \in X',\,\|\varphi\| \leq 1\}.$$

(b) Ist X ein normierter Raum und U ein Untervektorraum, so sind äquivalent:
 (i) U liegt dicht in X.
 (ii) Falls $\varphi \in X'$ und $\varphi|_U = 0$, so gilt $\varphi = 0$.

6.2. Aufgabe. Sei X ein Banachraum und M ein Unterraum von X. Der *Annihilator* $M^\perp$ von M ist definiert als

$$M^\perp := \{\varphi \in X'\,;\,\varphi(x) = 0 \text{ für alle } x \in M\} \subset X'.$$

Sei nun M ein abgeschlossener Unterraum von X. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$s : M' \to X'/M^\perp, \qquad s(\psi) := \varphi + M^\perp,$$

mit einer Hahn-Banach Fortsetzung φ von ψ auf X, ist ein isometrischer Isomorphismus von M' auf $X'/M^\perp$, wenn $X'/M^\perp$ mit der Quotientennorm versehen ist.

(b) Sei $\pi : X \to X/M$ die Quotientenabbildung. Dann ist die Abbildung

$$t : (X/M)' \to M^\perp, \qquad t(\varphi) := \varphi \circ \pi$$

ein isometrischer Isomorphismus von $(X/M)'$ auf $M^\perp$.

6.3. Aufgabe. Sei X ein normierter Raum. Mit X'' bezeichnet man den Dualraum von X', er wird *Bidual von* X genannt.

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$i : X \to X'', \quad (i(x))(\varphi) := \varphi(x)$$

eine lineare Isometrie ist.

Die Abbildung i ist i.a. nicht surjektiv. Ein Banachraum heißt *reflexiv*, falls die Abbildung i surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, daß abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume wieder reflexiv sind.

6.4. Aufgabe. (a) Zeigen Sie: Jeder Banachraum kann isometrisch in

$$\ell^\infty(I) := \{(x_i)_{i\in I}\,;\,x_i \in \mathbb{C},\,\|(x_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup_{i\in I}|x_i| < \infty\}$$

eingebettet werden für eine geeignete Indexmenge I.

(b) Jeder separable Banachraum kann isometrisch in $\ell^\infty(\mathbb{N})$ eingebettet werden.

6.5. Aufgabe. Zeigen Sie: Jeder Banachraum E ist Quotient eines $\ell^1(I)$-Raumes nach einem abgeschlossenen Unterraum.

Hinweis: Wählen Sie $I = \{x \in E \,:\, \|x\| \leq 1\}$.

KAPITEL 7

Banachalgebren: Erste Eigenschaften

Weiterhin sei stets $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen.

7.1. Definition. Sei $\mathfrak{R}$ eine Algebra über $\mathbb{K}$. Wir nennen $\mathfrak{R}$ eine *normierte $\mathbb{K}$–Algebra*, falls auf $\mathfrak{R}$ eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben ist, so daß $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum ist und so daß $\|\cdot\|$ *submultiplikativ* ist, d.h.

$$\forall a, b \in \mathfrak{R}: \quad \|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| .$$

Eine vollständige normierte $\mathbb{K}$–Algebra nennen wir auch eine *Banachalgebra*.

Beispiele von Banachalgebren sind uns schon mehrfach im Rahmen dieser Vorlesung begegnet. Wir wollen uns nun systematischer mit der Theorie der Banachalgebren beschäftigen.

7.2. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra, die mit einer Norm $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$ versehen sei, so daß gilt:*

(i) $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|_{\mathfrak{R}})$ *ist ein Banachraum.*

(ii) *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ sind die linearen Abbildungen*

$$L(x): \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}, \quad y \mapsto xy \textit{ und}$$
$$R(x): \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}, \quad y \mapsto yx \textit{ stetig.}$$

Dann gibt es eine zu $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$ äquivalente Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathfrak{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\forall x, y \in \mathfrak{R}: \quad \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, *d.h.* $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ *ist eine Banachalgebra.*

(b) *Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so kann $\|\cdot\|$ zusätzlich so gewählt werden, daß $\|1\| = 1$ gilt.*

Beweis. Wir betrachten den Banachraum

$$(E, \|\cdot\|_E) := \begin{cases} (\mathfrak{R}, \|\cdot\|_{\mathfrak{R}}) & \text{falls } \mathfrak{R} \text{ ein Einselement 1 besitzt,} \\ (\mathfrak{R} \oplus \mathbb{K} \cdot 1, \|\cdot\|_E) & \text{sonst,} \\ & \text{wobei } \|a + k \cdot 1\|_E := \|a\|_{\mathfrak{R}} + |k| \text{ für alle } a \in \mathfrak{R}, k \in \mathbb{K} . \end{cases}$$

Die Abbildung $L : \mathfrak{R} \to \mathcal{L}(E)$ mit $L(x)(a + k \cdot 1) := xa + kx$ für alle $x, a \in \mathfrak{R}$, $k \in \mathbb{K}$ ist ein Monomorphismus (wegen $L(x) = 0 \Longrightarrow 0 = L(x)(1) = x$) mit $L(1) = \mathrm{id}_E$ falls $\mathfrak{R}$ ein Einselement besitzt. Nach Definition der Operatornorm in $\mathcal{L}(E)$ gilt für alle $x \in \mathfrak{R}$:

$$\|L(x)\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{u \in B_E} \|L(x)u\|_E \geq \|x \frac{1}{\|1\|_E} \cdot 1\|_E = \frac{\|x\|_{\mathfrak{R}}}{\|1\|_E} .$$

Damit folgt

$$\forall x \in \mathfrak{R}: \quad \|x\|_{\mathfrak{R}} \leq \|1\|_E \cdot \|L(x)\|_{\mathcal{L}(E)} . \tag{7.1}$$

Durch $\|x\| := \|L(x)\|_{\mathcal{L}(E)}$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ ist also eine submultiplikative Norm auf $\mathfrak{R}$ gegeben. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so gilt wegen $L(1) = \mathrm{id}_E$: $\|1\| = \|L(1)\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Wir zeigen, daß $\operatorname{ran} L = L(\mathfrak{R})$ vollständig ist. Sei also $(L(x_n))_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Cauchyfolge in $L(\mathfrak{R})$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{L}(E)$ folgt $L(x_n) \to T$ bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$ für ein $T \in \mathcal{L}(E)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt:

$$\|x_n - x_m\|_{\mathfrak{R}} \leq \|L(x_n) - L(x_m)\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \|1\|_E < \varepsilon ,$$

wobei die linke Ungleichung aus (7.1) folgt. Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist also eine Cauchyfolge in $\mathfrak{R}$ und konvergiert daher (wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$) gegen ein $x \in \mathfrak{R}$ bezüglich $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$. Für alle $a + k \cdot 1 \in E$, $a \in \mathfrak{R}, k \in \mathbb{K}$, gilt dann bei $n \to \infty$:

$$L(x_n)(a + k \cdot 1) = x_n a + k x_n = R(a)x_n + kx_n \to R(a)x + kx = xa + kx = L(x)(a + k \cdot 1),$$

da $R(a) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ nach Voraussetzung stetig ist. Wegen $L(x_n)(a + k \cdot 1) \to T(a + k \cdot 1)$ für $n \to \infty$, folgt $T = L(x) \in L(\mathfrak{R})$. Damit ist die Vollständigkeit von $L(\mathfrak{R})$ gezeigt.

Die Abbildung $L : \mathfrak{R} \to L(\mathfrak{R})$ ist also ein Algebrenisomorphismus von der Algebra $\mathfrak{R}$ auf die Banachalgebra $(L(\mathfrak{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}|_{L(\mathfrak{R})})$. Da die Umkehrabbildung $L^{-1} : L(\mathfrak{R}) \to \mathfrak{R}$ nach (7.1) stetig ist und $\mathfrak{R}, L(\mathfrak{R})$ Banachräume sind, folgt nach dem Satz von der inversen Abbildung auch die Stetigkeit von $L : \mathfrak{R} \to L(\mathfrak{R})$. Es gibt also Konstanten $c, C > 0$ mit

$$\forall x \in \mathfrak{R} : \quad c\|x\|_{\mathfrak{R}} \leq \|L(x)\|_E = \|x\| \leq C\|x\|_{\mathfrak{R}} .$$

Die Normen $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$ und $\|\cdot\|$ sind also äquivalente Normen auf $\mathfrak{R}$. □

7.3. Folgerung. *Zu jeder Banachalgebra $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|_{\mathfrak{R}})$ mit Einselement 1 gibt es eine zur Ausgangsnorm äquivalente submultiplikative Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathfrak{R}$ mit $\|1\| = 1$.*

Einige Autoren wie z.B. Neumark, Rudin und andere verlangen von einer Banachalgebra, daß sie (a) und (b) in Satz 7.2 erfüllt. Andere wie z.B. Zelasko nennen eine $\mathbb{K}$–Algebra schon dann eine Banachalgebra, wenn sie den Voraussetzungen zu Satz 7.2 genügt. Da man durch Übergang zu einer äquivalenten Norm stets erreichen kann, daß (a) und (b) in Satz 7.2 erfüllt sind, schließe ich mich den erstgenannten Autoren an.

7.4. Lemma. *Sei $\mathfrak{R}$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathfrak{A}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*

(a) *$\overline{\mathfrak{A}}$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{R}$.*
(b) *Ist $\mathfrak{A}$ kommutativ, so auch $\overline{\mathfrak{A}}$.*
(c) *Ist $\mathfrak{A}$ eine maximale kommutative Unteralgebra, so ist $\mathfrak{A}$ schon abgeschlossen.*

Dies rechnet man unmittelbar nach.

7.5. Lemma. *Sei $\mathfrak{R}$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathfrak{R}$. Dann sind die Kommutantenalgebra $\mathcal{S}' = \{x \in \mathfrak{R};\, \forall a \in \mathcal{S} : ax = xa\}$, die Bikommutantenalgebra $\mathcal{S}'' := (\mathcal{S}')'$ und das Zentrum $Z(\mathfrak{R}) := \mathfrak{R}'$ abgeschlossene Unteralgebren von $\mathfrak{R}$.*

Beweis. Ist $x \in \overline{\mathcal{S}'}$, so gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{S}'$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation folgt dann für alle $a \in \mathcal{S}$:

$$xa - ax = \lim_{n \to \infty} (x_n a - a x_n) = 0, \quad \text{d.h. } x \in \mathcal{S}'.$$

$\mathcal{S}'$ ist also abgeschlossen in $\mathfrak{R}$. Wegen $\mathcal{S}'' = (\mathcal{S}')'$ und $Z(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$ sind dann auch $\mathcal{S}''$ und $Z(\mathfrak{R})$ abgeschlossen in $\mathfrak{R}$. □

Falls nicht anders vermerkt sei im folgenden stets $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 und $\|1\| = 1$. $G = G(\mathfrak{R})$ sei die Menge der invertierbaren Elemente von $\mathfrak{R}$, $G_l = G_l(\mathfrak{R})$ die Menge der linksinvertierbaren Elemente und $G_r = G_r(\mathfrak{R})$ die Menge der rechtsinvertierbaren Elemente von $\mathfrak{R}$. Offensichtlich gilt $G = G_l \cap G_r$ und G ist mit der Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe.

7.6. Lemma. *Es ist $U := \{x \in \mathfrak{R};\, \|1 - x\| < 1\} \subset G$ und die Abbildung $u \mapsto u^{-1}$ von U nach $\mathfrak{R}$ ist stetig in 1.*

Beweis. Wir setzen $(1-x)^0 := 1$ und definieren für beliebiges $x \in U$:

$$y := \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n.$$

Wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(1-x)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|(1-x)\|^n = \frac{1}{1-\|1-x\|} < \infty$$

ist die Reihe absolut konvergent in $\mathfrak{R}$, d.h. es ist $y \in \mathfrak{R}$. Ferner folgt wegen der Stetigkeit der Multiplikation in $\mathfrak{R}$:

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n = 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \right) (1-x) = 1 + y(1-x) \tag{7.2}$$

und damit $yx = 1$. Ebenso zeigt man $xy = 1$. Also ist x invertierbar und $x^{-1} = y$.

Zu zeigen ist noch die Stetigkeit der Inversion in 1: Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $\delta := \min\{1/2, \varepsilon/2\}$. Dann folgt nach (7.2) für alle $x \in \mathfrak{R}$ mit $\|1-x\| < \delta$:

$$\|x^{-1} - 1\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(1-x)\|^n = \frac{\|1-x\|}{1-\|1-x\|} \leq \frac{\|1-x\|}{1/2} < \varepsilon\,.$$

□

7.7. Satz. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement* 1.

(a) *G, G_l und G_r sind offene Teilmengen von $\mathfrak{R}$.*
(b) *Die Inversion $x \mapsto x^{-1}$ ist eine stetige Abbildung von G auf sich.*

Beweis. (a) Sei $x_0 \in G_l$ beliebig. Dann gibt es ein $y \in \mathfrak{R}$ mit $yx_0 = 1$. Für alle $x \in \mathfrak{R}$ mit $\|x - x_0\| < \|y\|^{-1}$ gilt dann

$$\|yx - 1\| = \|y(x - x_0)\| \leq \|y\| \cdot \|x - x_0\| < 1.$$

Nach Lemma 7.6 ist yx also invertierbar. Mit $u := (yx)^{-1}y$ gilt also $ux = 1$. Also ist G_l offen. Analog zeigt man, daß auch G_r offen ist und somit auch $G = G_l \cap G_r$.

(b)Wir müssen zeigen, daß die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ in allen $x_0 \in G$ stetig ist. Sei also $x_0 \in G$ beliebig. Die Abbildung $f : G \to G$ mit $f(x) := x_0^{-1}x$ ist auf G stetig und es ist $f(x_0) = 1$. Die Abbildung $g : G \to G$ mit $g(y) = y^{-1}$ ist nach Lemma 7.6 in $1 = f(x_0)$ stetig. Schließlich ist noch die Abbildung $h : G \to G$ mit $h(u) := ux_0^{-1}$ auf G stetig. Wegen $x^{-1} = (x^{-1}x_0)x_0^{-1} = (x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1} = h(g(f(x)))$ ist $x \mapsto x^{-1}$ stetig in x_0. □

7.8. Lemma. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement* 1. *Die Abschließung $\overline{\mathcal{I}}$ eines echten Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitigen Ideals $\mathcal{I}$ in $\mathfrak{R}$ ist wieder ein echtes Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{R}$. Jedes maximale Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitige Ideal in $\mathfrak{R}$ ist abgeschlossen. Insbesondere ist also das Radikal rad$(\mathfrak{R})$ nach Satz 0.10 ebenfalls abgeschlossen.*

Beweis. Sei also $\mathcal{I}$ ein echtes Linksideal in $\mathfrak{R}$. Nach Lemma 0.5 gilt dann $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{R} \setminus G_l$. Da G_l nach Satz 7.7 offen ist, folgt $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathfrak{R} \setminus G_l$. Insbesondere ist $\overline{\mathcal{I}} \neq \mathfrak{R}$. Die Idealeigenschaften für $\overline{\mathcal{I}}$ rechnet man unmittelbar nach. Damit ist $\overline{\mathcal{I}}$ ein echtes Linksideal. Den Beweis für Rechtsideale bzw. zweiseitige Ideale führt man analog. Der Zusatz ist dann klar. □

Sei nun $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Für $x \in \mathfrak{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir auch $z-x$ statt $z \cdot 1 - x$. Die *Resolventenmenge* von x bezüglich $\mathfrak{R}$ ist definiert als:

$$\rho_{\mathfrak{R}}(x) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, z - x \text{ ist in } \mathfrak{R} \text{ invertierbar}\}.$$

Die Komplementärmenge $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) := \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ heißt das *Spektrum* von x bezüglich $\mathfrak{R}$. Die durch

$$R(z,x) := (z-x)^{-1} \quad \text{für alle } z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$$

definierte $\mathfrak{R}$–wertige Funktion auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ heißt die *Resolvente* von x bezüglich $\mathfrak{R}$.

7.9. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine komplexe Banachalgebra mit 1 und sei $x \in \mathfrak{R}$. Dann gilt:*

(a) *Ist $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ und $\delta := \|R(z,x)\|^{-1}$, so ist $U_\delta(z) \subset \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ und für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < \delta$ hat man*

$$R(w,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1} \tag{7.3}$$

sowie

$$\|R(w,x) - R(z,x)\| \leq |z-w| \frac{\|R(z,x)\|^2}{1 - |z-w| \cdot \|R(z,x)\|}\,. \tag{7.4}$$

Insbesondere ist $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ offen (und damit $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ abgeschlossen) und die Resolvente ist auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ stetig.

(b) *Für alle $z, w \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ gilt die erste Resolventengleichung*

$$R(z,x) - R(w,x) = (w-z)R(z,x)R(w,x)\,.$$

(c) *Ist auch $y \in \mathfrak{R}$ und $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x) \cap \rho_{\mathfrak{R}}(y)$, so gilt die zweite Resolventengleichung*

$$R(z,x) - R(z,y) = R(z,x)(x-y)R(z,y)\,.$$

(d) *Es ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq \|x\|\}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \|x\|$ ist*

$$R(z,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} x^n.$$

(e) *Die Resolvente $R(\cdot,x)$ ist auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ komplex differenzierbar und es gilt für alle $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$:*

$$\lim_{w \to z} \frac{1}{z-w}(R(z,x) - R(w,x)) = -R(z,x)^2.$$

(f) *$\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ ist kompakt und nicht leer.*

(g) *Für alle $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ hat man die Abschätzung: $\|R(z,x)\| \geq \dfrac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma_{\mathfrak{R}}(x))}$.*

Beweis. (a) Sei also $w \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < \|R(z,x)\|^{-1}$. Offensichtlich konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (7.3) wegen $|z-w|\|R(z,x)\| < 1$ absolut und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1}(w-x) &= (w-x) \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1} \\
&= [(w-z) + (z-x)] \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^{n+1} R(z,x)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^n \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Also ist $w-x$ invertierbar und es gilt (7.3). Ferner hat man die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|R(w,x)-R(z,x)\| &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^n R(z,x)^{n+1}-R(z,x)\right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|z-w|^n\|R(z,x)\|^{n+1} = \frac{|z-w|\cdot\|R(z,x)\|^2}{1-|z-w|\cdot\|R(z,x)\|}\end{aligned}$$

Also gilt (7.4).

(b) Multipliziert man die Gleichung $(w-x)-(z-x)=w-z$ von links mit $R(z,x)$ und von rechts mit $R(w,x)$, so erhält man die Behauptung.

(c) Durch Multiplikation der Gleichung $(z-y)-(z-x)=x-y$ von links mit $R(z,x)$ und von rechts mit $R(z,y)$ folgt (c).

(d) Für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|>\|x\|$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}x^n$ absolut konvergent und es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}x^n\right)(z-x)=(z-x)\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}x^{n+1}=1$$

Also ist $R(z,x)=(z-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}x^n$.

(e) Wegen (b) und der Stetigkeit der Resolventenfunktion auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ folgt

$$\lim_{w\to z}\frac{1}{z-w}(R(z,x)-R(w,x))=-\lim_{w\to z}R(z,x)R(w,x)=-R(z,x)^2.$$

Insbesondere ist dann für alle stetigen linearen Funtionale $f:\mathfrak{R}\to\mathbb{C}$ die komplexwertige Funktion $f\circ R(\cdot,x):z\mapsto f(R(z,x))$ auf der nach (a) offenen Menge $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ komplex differenzierbar und damit holomorph.

(f) Wegen (a) und (d) ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ kompakt.

Annahme: $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ ist leer. Dann ist für alle stetigen, linearen Funktionale $f:\mathfrak{R}\to\mathbb{C}$ die Funktion $f\circ R(\cdot,x):z\mapsto f(R(z,x))$ eine ganze Funktion. Für $|z|>\|x\|$ folgt nach (d):

$$|f(R(z,x))|\leq\|f\|\cdot\|R(z,x)\|\leq\|f\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|x\|^n}{|z|^{n+1}}=\frac{\|f\|}{|z|-\|x\|}\to 0\quad\text{für } |z|\to\infty\,.$$

Nach dem Satz von Liouville ist also $f\circ R(\cdot,x)\equiv 0$. Nach der Folgerung 6.7(b) aus dem Satz von Hahn–Banach (mit $E=\mathfrak{R}$ und $F=\{0\}$) ist also $R(z,x)\equiv 0$ im Widerspruch zu $(z-x)R(z,x)\equiv 1\neq 0$. Also führte die Annahme zu einem Widerspruch. $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ ist daher nicht leer.

(g) Nach (a) enthält $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ mit z auch die offene Kreisscheibe um z mit dem Radius $\|R(z,x)\|^{-1}$. Daher folgt $\operatorname{dist}(z,\sigma_{\mathfrak{R}}(x))\geq\|R(z,x)\|^{-1}$ und hieraus (g). □

7.10. Satz (von Mazur und Gelfand). *Ist $\mathfrak{R}$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement 1 und $\|1\|=1$, in der jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist, so ist $\mathfrak{R}$ schon isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $x\in\mathfrak{R}$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $z\cdot 1-x$ für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $z\cdot 1-x\neq 0$ invertierbar. Wegen $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)\neq\emptyset$ (nach Satz 7.9 (f)) gibt es ein $z_x\in\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$. Für dieses muß $z_x\cdot 1-x=0$ und damit $x=z_x\cdot 1$ gelten. z_x ist hierdurch eindeutig bestimmt. Es folgt $\mathfrak{R}=\mathbb{C}\cdot 1$ und die Abbildung $z\mapsto z\cdot 1$ ist ein isometrischer Algebrenisomorphismus von $\mathbb{C}$ auf $\mathfrak{R}$. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 7.

7.1. AUFGABE. Zeigen Sie: Der Banachraum $\ell^1(\mathbb{Z})$ ist vermöge

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} * (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}]_k := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_{k-n} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

eine kommutative Banachalgebra mit Eins.

7.2. AUFGABE. (a) Sei $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ eine Banachalgebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ist, versehen mit der Quotientennorm $\|x + \mathcal{I}\| := \inf_{y\in\mathcal{I}} \|x + y\|_{\mathcal{A}}$, eine Banachalgebra.

(b) Zeigen Sie: Die Vervollständigung einer normierten Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Banachalgebra, die $\mathcal{A}$ als Unteralgebra enthält.

7.3. AUFGABE. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$-Algebra und sei $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{A}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Genau dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ eine Algebra mit Einselement, in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist, wenn $\mathcal{I}$ sowohl maximales modulares Linksideal als auch maximales modulares Rechtsideal ist.

7.4. AUFGABE. Untersuchen Sie in den folgenden Fällen, ob die Unterräume $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ und $\mathcal{K}$ der kommutativen Banachalgebra $\mathcal{R}$ abgeschlossene, maximale oder modulare Ideale sind.

(a) $\mathcal{R} = C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, f(t) \to 0 \text{ bei } t \to \infty\}$, versehen mit der sup-Norm,

$$\mathcal{I} := \{f \in C_0(\mathbb{R}) \,|\, f(2006) = 0\},$$
$$\mathcal{J} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{supp} f \text{ ist kompakt}\},$$
$$\mathcal{K} := \{f \in C_0(\mathbb{R}) \,|\, \exists n_f \,\forall n \geq n_f : \ f(n) = 0\}.$$

(b) $\mathcal{R} = C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < \infty\}$, versehen mit der Supremumsnorm,

$$\mathcal{I} := \{f \in C_b(\mathbb{R}) \,|\, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}.$$

7.5. AUFGABE. (a) Zeigen Sie: Der Banachraum $L^1[0,1]$ ist mit der Multiplikation

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(y)g(x-y)\,dy, \qquad x \in [0,1]$$

eine kommutative Banachalgebra.

(b) Sei $0 < \alpha < 1$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{I}_\alpha := \{f \in L^1[0,1]\,;\ f|_{[0,\alpha]} \equiv 0 \text{ fast überall }\}$$

ein abgeschlossenes Ideal in $L^1[0,1]$ ist, welches aus nilpotenten Elementen besteht.

7.6. AUFGABE. Es sei X ein Banachraum. Mit $\mathcal{F}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller Operatoren aus $\mathcal{L}(X)$ deren Bild von endlicher Dimension ist. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{F}(X)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(X)$.
(b) Ist $\{0\} \neq \mathcal{I} \subset \mathcal{L}(X)$ ein zweiseitiges Ideal, so gilt $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{I}$.
(c) $\mathcal{L}(X)$ ist einfach genau dann, wenn $\dim X < \infty$.

7.7. AUFGABE. Die *Diskalgebra* ist definiert als

$$A(\mathbb{D}) := \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \ : \ f|_{\mathbb{D}} \text{ ist holomorph}\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß durch

$$\|f\|_{A(\mathbb{D})} := \sup\{|f(z)| \ : \ z \in \mathbb{T}\}$$

eine Norm auf $A(\mathbb{D})$ gegeben ist und daß $A(\mathbb{D})$ damit eine Banachalgebra wird.

(b) Sei für $\varepsilon \in [0,1]$
$$R_{\varepsilon,1}(0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \varepsilon \leq |z| \leq 1\}.$$
Zeigen Sie, daß die Abbildung
$$R_\varepsilon : A(\mathbb{D}) \to C(R_{\varepsilon,1}(0)) =: C_\varepsilon, \quad f \mapsto f|_{R_{\varepsilon,1}(0)}$$
eine isometrische Einbettung ist.

(c) Berechnen Sie $\sigma_{A(\mathbb{D})}(\mathrm{id})$ und $\sigma_{C_\varepsilon}(\mathrm{id})$.

KAPITEL 8

Der Spektralradius

Falls nicht anders vermerkt sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ in diesem Abschnitt stets eine normierte Algebra über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Für $x \in \mathfrak{R}$ heißt

$$r(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$$

der *Spektralradius* von x bezüglich $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$.

8.1. SATZ. *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt:*

(a) $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$.
(b) $r(x) \leq \|x\|$.
(c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}: \quad r(\alpha x) = |\alpha| r(x)$.
(d) $\forall k \in \mathbb{N}: \quad r(x^k) = r(x)^k$.

BEWEIS. (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\|x^k\|^{1/k} < r(x) + \varepsilon$. Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat dann eine eindeutige Darstellung der Form

$$n = p(n)k + q(n) \quad \text{mit } p(n), q(n) \in \mathbb{N}_0, q(n) < k.$$

Für $n \to \infty$ folgt

$$\frac{q(n)}{n} \to 0, \quad \frac{p(n)k}{n} \to 1 \text{ und damit } \frac{p(n)}{n} \to \frac{1}{k}\,.$$

Hiermit erhält man wegen der Submultiplikativität der Norm für $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} r(x) \leq \|x^n\|^{1/n} =& \|x^{p(n)k+q(n)}\|^{1/n} \leq \|x^{p(n)k}\|^{1/n} \cdot \|x^{q(n)}\|^{1/n} \leq \\ \leq& \|x^k\|^{p(n)/n} \cdot \|x\|^{q(n)/n} \to \|x^k\|^{1/k} < r(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $r(x) \leq \|x^n\|^{1/n} < r(x) + \varepsilon$. Damit folgt die Behauptung.

(b) ist klar nach Definition von $r(x)$.

(c) Nach (a) hat man $r(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \|(\alpha x)^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |\alpha| \cdot \|x^n\|^{1/n} = |\alpha| r(x)$.

(d) Nach (a) gilt: $r(x^k) = \lim_{n\to\infty} \|x^{kn}\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\|x^{kn}\|^{1/kn}\right)^k = r(x)^k$. □

Das folgende Lemma beschreibt, wann für eine normierte Algebra $\mathfrak{R}$ in Satz 8.1 (b) stets das Gleichheitszeichen steht.

8.2. LEMMA. *Für eine normierte Algebra $\mathfrak{R}$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\forall x \in \mathfrak{R}: \quad r(x) = \|x\|$.
(b) $\forall x \in \mathfrak{R}: \quad \|x^2\| = \|x\|^2$.

BEWEIS. Ist (a) erfüllt, so folgt nach Satz 8.1 (d) für alle $x \in \mathfrak{R}$:

$$\|x^2\| = r(x^2) = r(x)^2 = \|x\|^2.$$

Gilt (b), so folgt durch vollständige Induktion für alle $x \in \mathfrak{R}, n \in \mathbb{N}$: $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ und damit $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|$. □

Sei z.B. $\mathfrak{R} := C(K)$ die Algebra der stetigen $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum, versehen mit der sup-Norm $\|\cdot\|_K$. Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{R}$: $\|f^2\|_K = \|f\|_K^2$ und somit $r(f) = \|f\|_K$.

Bezeichnung. Mit $\mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ bezeichnen wir die Menge aller zur Ausgangsnorm $\|\cdot\|$ äquivalenten submultiplikativen Normen auf $\mathfrak{R}$. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so sei

$$\mathrm{EUN}(\mathfrak{R}) := \{p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})\,;\, p(1) = 1\}\,.$$

8.3. Lemma. $\forall p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})\, \forall x \in \mathfrak{R}: \quad r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} p(x^n)^{1/n}$. *Der Spektralradius ist also für alle zur Ausgangsnorm $\|\cdot\|$ äquivalenten Algebranormen auf $\mathfrak{R}$ derselbe.*

Beweis. Da p und $\|\cdot\|$ äquivalente Normen sind, gibt es Konstanten $c > 0, C > 0$ mit

$$\forall u \in \mathfrak{R}: \quad c\|u\| \le p(u) \le C\|u\|\,.$$

Damit folgt für alle $x \in \mathfrak{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$c^{1/n}\|x^n\|^{1/n} \le p(x^n)^{1/n} \le C^{1/n}\|x^n\|^{1/n}.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir nach Satz 8.1 (a) die Behauptung. □

8.4. Satz. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathcal{S}$ eine beschränkte Halbgruppe bezüglich der Multiplikation von $\mathfrak{R}$. Dann gibt es eine Norm $p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ mit*

$$\forall s \in \mathcal{S}: \quad p(s) \le 1\,.$$

Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so ist $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$ wählbar.

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1, so ist mit $\mathcal{S}$ auch $\mathcal{S}_1 := \{1\} \cup \mathcal{S}$ eine beschränkte multiplikative Halbgruppe in $\mathfrak{R}$. In diesem Fall setzen wir auch $\mathfrak{R}_1 := \mathfrak{R}$.

Besitzt $\mathfrak{R}$ kein Einselement, so betrachten wir $\mathfrak{R}_1 := \mathfrak{R} \oplus \mathbb{K}\cdot 1$ mit der wieder mit $\|\cdot\|$ bezeichneten, die Ausgangsnorm fortsetzenden Norm, die definiert ist durch

$$\|x + \alpha \cdot 1\| := \|x\| + |\alpha| \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{R}, \alpha \in \mathbb{K}\,,$$

wobei $\|x\|$ die Norm von x in $\mathfrak{R}$ sei. Damit wird $\mathfrak{R}_1$ zu einer Banachalgebra mit dem Einselement 1 und die kanonische Einbettung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}_1$ ist eine Isometrie. Mit $\mathcal{S}$ ist auch $\mathcal{S}_1 := \{1\} \cup \mathcal{S}$ eine beschränkte multiplikative Halbgruppe in $\mathfrak{R}_1$.

Wir können nun beide Fälle gemeinsam weiter behandeln. Da $\mathcal{S}_1$ beschränkt ist, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $\|s\| \le C$ für alle $s \in \mathcal{S}_1$. Wir definieren nun für alle $a \in \mathfrak{R}_1$:

$$q(a) := \sup_{s\in\mathcal{S}_1} \|sa\| \le C\|a\|\,.$$

Offensichtlich ist q eine Halbnorm auf $\mathfrak{R}_1$. Wegen $1 \in \mathcal{S}_1$ auch $\|a\| \le q(a)$ für alle $a \in \mathfrak{R}_1$. q ist also eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm auf $\mathfrak{R}_1$. Wir setzen nun für alle $a \in \mathfrak{R}_1$

$$p(a) := \sup\{q(ax)\,;\, x \in \mathfrak{R}_1, q(x) \le 1\}\,.$$

Nach Satz 7.2 ist p dann eine zu q äquivalente *Algebranorm* auf $\mathfrak{R}_1$ mit $p(1) = 1$. Insbesondere ist $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R}_1)$ und $p|_{\mathfrak{R}} \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$. Für alle $t \in \mathcal{S}_1, x \in \mathfrak{R}_1$ mit $q(x) \le 1$ gilt

$$q(tx) = \sup_{s\in\mathcal{S}_1} \|stx\| \le q(x) \le 1$$

und damit nach Definition von p: $p(t) \le 1$. □

8.5. Bemerkung. Die Aussagen von Satz 8.4 gelten allgemeiner für normierte Algebren. Man betrachte hierzu einfach die Vervollständigung $\widehat{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ (vergl. Aufgabe 1.9). Diese ist, wie in Aufgabe 7.2 gezeigt wird eine Banachalgebra und $\mathcal{S}$ ist natürlich auch in $\widehat{\mathfrak{R}}$ beschränkte Halbgruppe in $\widehat{\mathfrak{R}}$. Wendet man nun Satz 8.4 auf $\widehat{\mathfrak{R}}$ und $\mathcal{S}$ an, so folgt die Behauptung.

8.6. Folgerung. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra.*

(a) $r(x) = \inf\{p(x)\,;\, p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})\}$.

(b) *Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so ist* $r(x) = \inf\{p(x)\,;\, p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})\}$.

Beweis. (i) Nach Satz 8.1 (b) und Lemma 8.3 ist $r(x) \leq p(x)$ für alle $x \in \mathfrak{R}, p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$.

(ii) Sei nun $x \in \mathfrak{R}$ beliebig mit $r(x) < 1$. Dann ist $\{x^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ eine beschränkte multiplikative Unterhalbgruppe von $\mathfrak{R}$. Nach Bemerkung 8.5 gibt es eine Norm $p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ (bzw. $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$) mit $p(x^n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also $p(x) \leq 1$.

Sei nun $y \in \mathfrak{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Satz 8.1 (c) ist $r(\frac{1}{r(y)+\varepsilon}y) = \frac{r(y)}{r(y)+\varepsilon} < 1$. Wie eben gezeigt, gibt es also ein Norm $p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ (bzw. $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$) mit $p(\frac{1}{r(y)+\varepsilon}y) \leq 1$, also mit $p(y) \leq r(y) + \varepsilon$.

Aus (i) und (ii) folgen nun die Behauptungen. □

8.7. Folgerung. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra und seien $a, b \in \mathfrak{R}$ mit $ab = ba$. Dann gilt:*

(a) $r(ab) \leq r(a)r(b)$.

(b) $r(a+b) \leq r(a) + r(b)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen

$$u := \frac{1}{r(a)+\varepsilon}a \quad \text{und} \quad v := \frac{1}{r(b)+\varepsilon}b.$$

Nach Satz 8.1 (c) ist $r(u) < 1$ und $r(v) < 1$. Also sind wie oben $\{u^n; n \in \mathbb{N}\}$ und $\{v^n; n \in \mathbb{N}\}$ beschränkte multiplikative Halbgruppen in $\mathfrak{R}$. Da u und v kommutieren, ist auch

$$\{u^n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{v^n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{u^n v^m; n, m \in \mathbb{N}\}$$

eine beschränkte multiplikative Halbgruppe in $\mathfrak{R}$. Nach Bemerkung 8.5 gibt es also eine Norm $p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ (bzw. $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$) mit $p(u) \leq 1$ und $p(v) \leq 1$. Es folgt $p(a) \leq r(a)+\varepsilon$ und $p(b) \leq r(b) + \varepsilon$ sowie

$$\begin{aligned} r(ab) &\leq p(ab) \leq p(a)p(b) \leq r(a)r(b) + \varepsilon(r(a) + r(b)) + \varepsilon^2 \\ r(a+b) &\leq p(a+b) \leq p(a) + p(b) \leq r(a) + r(b) + 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgen die Behauptungen. □

Die Voraussetzung $ab = ba$ in Folgerung 8.7 kann nicht weggelassen werden. Dies zeigt das folgende einfache Beispiel:

8.8. Beispiel. Sei $\mathfrak{R} := M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ die Algebra der 2×2 Matrizen, versehen mit einer Algebranorm $\|\cdot\|$. Mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt $A^2 = B^2 = 0$ und daher $r(A) = r(B) = 0$. Ferner

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (AB)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Damit folgt

$$r(AB) = \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|^{1/n} = 1 \quad \text{aber} \quad r(A)r(B) = 0.$$

Weiter gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \forall n \in \mathbb{N} \quad (A+B)^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$r(A+B) = \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|^{1/2n} = 1$$

aber $r(A) + r(B) = 0$.

8.9. Folgerung. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement* 1. *Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{R}$:*

$$r(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - x \textit{ ist in } \mathfrak{R} \textit{ invertierbar.}$$

Beweis. Nach Folgerung 8.6 gibt es eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Algebranorm $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$ mit $p(x) < 1$. Es folgt $p(1 - (1-x)) = p(x) < 1$. Nach Satz 7.9 (angewendet auf $(\mathfrak{R}, p)$) ist also $1 - x$ invertierbar und es gilt $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. □

8.10. Folgerung. *Sei $\mathfrak{R}$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1 *und sei $x \in \mathfrak{R}$.*

(a) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r(x)$ ist $z - x$ in $\mathfrak{R}$ invertierbar und es gilt*

$$(z-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n.$$

(b) $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq r(x)\}$.

(c) *Gibt es eine gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von invertierbaren Elementen, für die $(r(x_n^{-1}))_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, und gilt $x x_n = x_n x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch x invertierbar in $\mathfrak{R}$.*

Beweis. (a) Es ist $r(\frac{1}{z}x) = \frac{1}{|z|} r(x) < 1$. Nach Folgerung 8.9 ist $1 - \frac{1}{z}x$ invertierbar in $\mathfrak{R}$ und es gilt:

$$(1 - \frac{1}{z}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x^n.$$

Es folgt

$$(z-x)\frac{1}{z}(1 - \frac{1}{z}x)^{-1} = 1 = \frac{1}{z}(1 - \frac{1}{z}x)^{-1}(z-x)\,.$$

Also ist $z - x$ in $\mathfrak{R}$ invertierbar und

$$(z-x)^{-1} = \frac{1}{z}(1 - \frac{1}{z}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n.$$

(b) folgt unmittelbar aus (a).

(c) Es ist $1 - x_n^{-1}x = x_n^{-1}(x_n - x)$ und daher wegen der Beschränktheit von $(r(x_n^{-1}))_{n=1}^{\infty}$ nach Folgerung 8.7

$$r(1 - x_n^{-1}x) \leq r(x_n^{-1}) r(x_n - x) \leq r(x_n^{-1}) \|x_n - x\| \to 0 \text{ für } n \to \infty\,.$$

Hierbei ist Folgerung 8.7 anwendbar, da x_n mit x und damit auch x_n^{-1} mit $x_n - x$ vertauscht. Für $n \geq n_0$ gilt also $r(1 - x_n^{-1}x) < 1$. Nach Folgerung 8.9 ist $x_n^{-1}x$ invertierbar und wegen $x x_n^{-1} = x_n^{-1} x$ ist $(x_n^{-1}x)^{-1} x_n^{-1} x = 1 = x_n^{-1} x (x_n^{-1}x)^{-1} = x\,(x_n^{-1}(x_n^{-1}x)^{-1})$. Also ist x in $\mathfrak{R}$ invertierbar. □

Die Begründung für die Bezeichnung Spektralradius wird durch den folgenden Satz gegeben.

8.11. Satz. *Sei* $\mathfrak{R}$ *eine komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1. *Dann gilt für alle* $x \in \mathfrak{R}$*:*

$$r(x) = \max\{|z|\,;\, z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)\}\,.$$

Beweis. Nach Folgerung 8.10 ist $r_1(x) := \max\{|z|\,;\, z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)\} \leq r(x)$.

Seien nun $r > r_1(x)$ und $f \in \mathfrak{R}'$ beliebig vorgegeben. Da $R(\cdot, x)$ nach Satz 7.9 auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ also auch auf $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| > r_1(x)\}$ komplex differenzierbar ist, ist die Funktion $z \mapsto f(R(z, x))$ auf Ω in eine Laurentreihe entwickelbar. Für $|z| > \|x\|$ gilt nach Satz 7.9

$$f(R(z, x)) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} f(x^n)\,.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten der Laurententwicklung gilt diese Darstellung auf ganz Ω mit absoluter Konvergenz der Reihe. Insbesondere ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} |f(x^n)| < \infty\,.$$

Daher ist für alle $f \in \mathfrak{R}'$ die Folge $(r^{-n-1} f(x^n))_{n=0}^{\infty}$ und somit auch $(r^{-n} f(x^n))_{n=0}^{\infty}$ beschränkt in $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Banach–Steinhaus ist mit $(i(a))(f) := f(a)$ für alle $a \in \mathfrak{R}$ also die Folge $(i(r^{-n} x^n))_{n=0}^{\infty}$ beschränkt im Bidual $\mathfrak{R}''$ beschränkt. Da $i : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$ nach Aufgabe 6.3 eine Isometrie ist, ist $(r^{-n} x^n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt in $\mathfrak{R}$. Es gibt also ein $M > 0$ mit $\|r^{-n} x^n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt also

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \|x^n\|^{1/n} \leq M^{1/n} r$$

und hieraus für $n \to \infty$: $r(x) \leq r$. Da $r > r_1(x)$ beliebig war muß $r(x) \leq r_1(x)$ gelten. $\square$

8.12. Folgerung. *Sei* $\mathfrak{R}$ *eine komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1. *Für* $x \in \mathfrak{R}$ *sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$, *d.h.* x *ist quasinilpotent.*
(b) $r(x) = 0$.
(c) $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) = \{0\}$.

Hier bei gilt die Äquivalenz von (a) und (b) nach Satz 8.1 und die von (b) und (c) nach Satz 8.11.

8.13. Folgerung. *Sei* $\mathfrak{R}$ *eine kommutative, komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1. *Dann gilt*

$$\mathrm{rad}(\mathfrak{R}) = \{x \in \mathfrak{R}\,;\, r(x) = 0\}.$$

Beweis. Ist $x \in \mathfrak{R}$ mit $r(x) = 0$, so gilt nach Folgerung 8.7 für alle $y \in \mathfrak{R}$

$$0 \leq r(xy) \leq r(x)r(y) = 0.$$

Nach Folgerung 8.9 ist $1 - xy$ also für alle $y \in \mathfrak{R}$ invertierbar. Nach Definition 0.56 und Satz 0.57 aus den Grundlagen aus der Algebrentheorie ist also $x \in \mathrm{rad}(\mathfrak{R})$.

Sei nun $x \in \mathrm{rad}(\mathfrak{R})$ und sei $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Dann existiert nach Definition des Radikals $(1 - (\frac{1}{z} \cdot 1)x)^{-1}$ in $\mathfrak{R}$. Es folgt, daß dann $z - x$ in $\mathfrak{R}$ invertierbar ist mit $(z - x)^{-1} = \frac{1}{z}(1 - (\frac{1}{z} \cdot 1)x)^{-1}$. Also gilt $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$ und somit $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \{0\}$. Nach Satz 7.9 (f) ist also $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) = \{0\}$ und somit (nach Folgerung 8.12) $r(x) = 0$. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 8.

8.1. AUFGABE. Sei $\mathcal{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 und sei $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{R}$ mit $1 \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt:

(a) $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.
(b) $\partial\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \partial\sigma_{\mathcal{R}}(x)$.
(c) Ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathbb{R}$, so ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.
(d) Ist $\mathcal{A}$ eine maximale kommutative Unteralgebra von $\mathcal{R}$, so ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.
(e) Belegen Sie durch ein Beispiel, daß der Fall $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \neq \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ auftreten kann.

8.2. AUFGABE. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement über $\mathbb{C}$ und seien $a, b \in \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie: $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$ und $r(ab) = r(ba)$.
(b) Belegen Sie durch ein Beispiel, daß der Fall $\sigma_{\mathcal{A}}(ab) \neq \sigma_{\mathcal{A}}(ba)$ auftreten kann.
(c) Sei E ein Banachraum über $\mathbb{C}$ mit $\dim E = N < \infty$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall für alle $A, B \in \mathcal{L}(E)$ gilt $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(AB) = \sigma_{\mathcal{L}(E)}(BA)$.

KAPITEL 9

Kompakte Operatoren

9.1. Definition. Seien E, F zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume. Ein linearer Operator $T : E \to F$ heißt *kompakt*, falls er jede beschränkte Teilmenge von E auf eine relativkompakte Teilmenge von F abbildet.

Die Menge der kompakten linearen Operatoren von E nach F bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(E, F)$.

9.2. Lemma. *Sei $T : E \to F$ ein linearer Operator zwischen zwei normierten $\mathbb{K}$–Vektorräumen.*

(a) *Ist T kompakt, so ist T schon stetig.*

(b) *Für T sind äquivalent:*

  (i) *T ist ein kompakter Operator.*

  (ii) *Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E besitzt die Bildfolge $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ eine in F konvergente Teilfolge.*

  (iii) *$T(B_E)$ ist relativ kompakt in F (mit $B_E := \{x \in E\,;\, \|x\| \leq 1\}$).*

Beweis. (a) Nach Voraussetzung ist $T(B_E)$ relativkompakt in F also auch normbeschränkt in F. Insbesondere ist $\sup\{\|Tx\|_F\,;\, x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < \infty$ und daher T stetig.

(b) Die Implikation (i) $\Longrightarrow$ (iii) ist unmittelbar klar.

Ist (iii) erfüllt und ist $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beschränkte Folge in E, so gibt es ein $r > 0$ mit $x_n \subset rB_E$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit $T(B_E)$ ist auch $rT(B_E) = T(rB_E)$ relativkompakt in F. Jede Folge aus $rT(B_E)$ und damit insbesondere auch die Bildfolge $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ besitzt also eine in F konvergente Teilfolge.

Sei nun (ii) erfüllt und sei $B \subset E$ eine beliebige beschränkte Teilmenge von E. Ist $(Tx_n))_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge aus $T(B)$ (mit $x_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$), so besitzt diese nach Voraussetzung eine beschränkte Teilfolge. $T(B)$ ist also relativ kompakt in F. $\square$

9.3. Bemerkungen. (a) Jeder stetige lineare Operator mit endlich dimensionalem Bild ist kompakt.

(b) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist die Identität $1_E : E \to E$ genau dann kompakt, wenn E endlich dimensional ist.

(c)Ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ und ist $T \in \mathcal{L}(E)$ ein kompakter linearer Operator auf dem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$, so ist $\dim \ker(\lambda - T) < \infty$.

Beweis. (a) Ist $T : E \to F$ ein stetiger linearer Operator zwischen zwei normierten Räumen, so ist das Bild $T(B_E)$ der Einheitskugel B_E von E beschränkt in $(F, \|\cdot\|_F)$ und damit auch in $(\operatorname{ran} T, \|\cdot\|_E|_{\operatorname{ran} T})$. Ist also $\dim \operatorname{ran} T < \infty$, so ist $T(B_E)$ als beschränkte Teilmenge eines endlich dimensionalen Raumes relativkompakt in $(\operatorname{ran} T, \|\cdot\|_E|_{\operatorname{ran} T})$ und damit auch in $(F, \|\cdot\|_F)$.

(b) Nach Lemma 9.2 (b) ist 1_E genau dann ein kompakter Operator, wenn $1_E(B_E) = B_E$ kompakt in E ist. Nach Folgerung 1.19 ist dies äquivalent zu $\dim E < \infty$.

(c) Da T ein kompakter Operator ist, und wegen $T|_{\ker(\lambda - T)} = \lambda \mathrm{id}_{\ker(\lambda - T)}$ gilt für die abgeschlossene Einheitskugel B von $\ker(\lambda - T)$: $B = \frac{1}{\lambda} T(\lambda B)$ ist relativkompakt. Nach Folgerung 1.16 ist $\ker(\lambda - T)$ von endlicher Dimension. $\square$

Ist $T : E \to E$ eine lineare Abbildung von einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E in sich, so heißt ein Punkt $\mu \in \mathbb{K}$ bekanntlich *Eigenwert* von T, falls es ein $0 \neq x \in E$ gibt mit $Tx = \mu x$. Der Vektor x heißt dann *Eigenvektor* zum Eigenwert μ und $\ker(\mu - T)$ der zu μ gehörige *Eigenraum*. Teit (c) der vorstehenden Bemerkungen besagt also, daß die Eigenräume zu von 0 verschiedenen Eigenwerten kompakter Operatoren von endlicher Dimension sind.

Eine Teilmenge K eines metrischen Raums (X, d) heißt *präkompakt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$ gibt mit $K \subseteq U_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup U_\varepsilon(x_n)$. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ heißt dann ein endliches ε–Netz für K. Relativkompakte Teilmengen von X sind präkompakt in (X, d). Ist (X, d) vollständig, so ist auch jede präkompakte Teilmenge von X schon relativkompakt (siehe z.B. [**14**], p. 61 f.).

9.4. Lemma. *E, F, G, H seien normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume.*

(a) *Ist $K \in \mathcal{K}(E, F)$, so sind für alle $S \in \mathcal{L}(H, E), T \in \mathcal{L}(F, G)$ auch die Operatoren $TK : E \to G$ und $KS : H \to F$ kompakt.*
(b) *$\mathcal{K}(E, F)$ ist Untervektorraum von $\mathcal{L}(E, F)$.*
(c) *$\mathcal{K}(E)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(E)$.*
(d) *Ist F vollständig, so ist $\mathcal{K}(E, F)$ ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossener Untervektorraum des Banachraums $\mathcal{L}(E, F)$.*

Beweis. (a) Seien $(h_n)_{n=1}^\infty$ bzw. $(e_n)_{n=1}^\infty$ beliebige beschränkte Folgen aus H bzw. E. Dann ist wegen der Stetigkeit von S auch die Folge $(Sh_n)_{n=1}^\infty$ in E beschränkt. Da K ein kompakter Operator ist, gibt es nach Lemma 9.2 in F konvergente Teilfolgen $(KSh_{n_k})_{k=1}^\infty$ von $(KSh_n)_{n=1}^\infty$ bzw. $(Ke_{n_k})_{k=1}^\infty$ von $(Ke_n)_{n=1}^\infty$. Wegen der Stetigkeit von T ist dann auch $(TKe_{n_k})_{k=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge von $(TKe_n)_{n=1}^\infty$. Nach Lemma 9.2 sind also TK und KS kompakte Operatoren.

(b) Daß $\mathcal{K}(E, F)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}(E, F)$ ist rechnet man mit Hilfe von Lemma 9.2 und den Linearitätseigenschaften der Grenzwertbildung direkt nach.

(c) folgt unmittelbar aus (a) und (b).

(d) Sei nun $(K_n)_{n=1}^\infty$ eine bezüglich der Operatornorm gegen einen stetigen linearen Operator $T : E \to F$ konvergente Folge aus $\mathcal{K}(E, F)$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T - K_n\| < \varepsilon/3$. Da K_n ein kompakter Operator ist, ist $K_n(B_E)$ relativkompakt also auch präkompakt. Es gibt also endlich viele $x_1, \ldots, x_m \in B_E$ mit

$$\min_{1 \le k \le m} \|K_n x - K_n x_k\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in B_E\,.$$

Es folgt dann für alle $x \in B_E$:

$$\begin{aligned}\min_{1 \le k \le m} \|Tx - Tx_k\| &\le \min_{1 \le k \le m} \big(\|(T - K_n)x\| + \|K_n x - K_n x_k\| + \|(K_n - T)x_k\|\big)\\ &< \min_{1 \le k \le m} \big(\frac{\varepsilon}{3} + \|K_n x - K_n x_k\| + \frac{\varepsilon}{3}\big) < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Also ist $T(B_E)$ präkompakt in F und damit wegen der Vollständigkeit von F relativkompakt. □

Für einen kompakten topologischen Hausdorffraum K wollen wir die relativkompakten Teilmengen des Banachraums $C(K)$ aller stetigen Funktionen auf K mit Werten in $\mathbb{K}$ charakterisieren. Wir machen zunächst einige Vorbereitungen, die auch in anderer Hinsicht später benötigt werden.

9.5. Satz. *Sei $U_1, \ldots, U_n$ eine endliche offene Überdeckung eines kompakten topologischen Hausdorffraums K. Dann gibt es eine zugehörige Zerlegung der 1, d.h. reellwertige Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(K)$ mit supp$(\varphi_j) \subseteq U_j$, $0 \le \varphi_j \le 1$ auf K, $j = 1, \ldots, n$, und mit $\sum_{j=1}^n \varphi_j \equiv 1$ auf K.*

Beweis. Zu $U_1, \dots, U_n$ findet man kompakte Mengen $V_j \subseteq U_j$, $j = 1, \dots, n$, mit $K = \bigcup_{j=1}^n V_j$. Nach dem Lemma von Urysohn (siehe z.B. Satz 6.7 in Verbindung mit Beispiel 6.5 in dem Skriptum [**2**] zur Topologie) gibt es Funktionen $\psi_j \in C(K, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}\psi_j \subseteq U_j$ und $\psi_j \equiv 1$ auf V_j, $j = 1, \dots, n$. Dann sind die durch

$$\varphi_j(x) := \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^n \psi_k(x)}, \qquad x \in K,$$

definierten Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ stetig mit Werten in $[0,1]$ und erfüllen $\mathrm{supp}\varphi_j \subseteq U_j$, $j = 1, \dots, n$ und $\sum_{j=1}^n \varphi_j \equiv 1$ auf K. □

Ist $\mathcal{F}(X)$ ein Raum von $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf einer nicht leeren Menge X und E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum, so sei für $f \in \mathcal{F}(X)$ und $e \in E$ die Funktion $f \otimes e : X \to E$ definiert durch

$$(f \otimes e)(x) := f(x)e \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Wir definieren $\mathcal{F}(X) \otimes E := \mathrm{LH}\{f \otimes e\,;\ f \in \mathcal{F}(X), e \in E\}$.

9.6. Satz. *Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum und E ein Banachraum. Dann liegt $C(K) \otimes E$ dicht in $C(K, E)$.*

Beweis. Sei $f \in C(K, E)$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $f(K)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt ist, gibt es zu der offenen Überdeckung $\{U_\varepsilon(e)\ \ e \in f(K)\}$ von $f(K)$ eine endliche Teilüberdeckung $U_\varepsilon(e_1), \dots, U_\varepsilon(e_n)$. Dann bilden die Mengen $U_j := f^{-1}(U_\varepsilon(e_j))$, $j = 1, \dots, n$ eine offene Überdeckung von K, zu der es nach Satz 9.5 eine Zerlegung $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ der Eins gibt. Es folgt für alle $x \in K$:

$$\Big\| f(x) - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) e_j \Big\| = \Big\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)(f(x) - e_j) \Big\| \leq \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \|f(x) - e_j\| < \varepsilon.$$

Hierbei haben wir verwendet, daß $\sum_{j=1}^n \varphi_j \equiv 1$ und $0 \leq \varphi \leq 1$ auf K gilt, und die Tatsache, daß $\|f(x) - e_j\| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathrm{supp}\varphi_j \subset U_j$, $j = 1, \dots, n$. □

9.7. Satz. *Eine Teilmenge H eines Banachraums $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann präkompakt, wenn gilt*

$$(h)_{h \in H} \in \overline{\ell^\infty(H) \otimes E}^{\|\cdot\|_\infty}. \tag{9.1}$$

Beweis. Ist $H \subset E$ präkompakt, so gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele $h_1, \dots, h_n \in H$ mit

$$H \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\varepsilon/2}(h_j).$$

Zu jedem $h \in H$ gibt es also ein $j(h) \in \{1, \dots, n\}$ mit $h \in U_{\varepsilon/2}(h_{j(h)})$. Für alle $h \in H$ definieren wir: $f(h) := h_{j(h)}$. Dann folgt

$$f = \sum_{k=1}^n f_k \otimes h_k \in \ell^\infty(H) \otimes E \qquad \text{mit } f_k(h) := \begin{cases} 0 & \text{für } j(h) \neq k \\ 1 & \text{für } j(h) = k. \end{cases}$$

Ferner gilt für alle $h \in H$: $\|h - f(h)\| = \|h - h_{j(h)}\| < \varepsilon/2$. Also folgt

$$\|(h)_{h \in H} - f\|_\infty = \sup_{h \in H} \|h - f(h)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

und somit (9.1).

Ist umgekehrt (9.1) erfüllt, so gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $f_1, \dots, f_n \in \ell^\infty(H)$, $e_1, \dots, e_n \in E$ mit

$$\Big\|(h)_{h\in H} - \sum_{j=1}^n f_j \otimes e_j\Big\|_\infty = \sup_{h\in H}\Big\|h - \sum_{j=1}^n f_j(h)e_j\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.2}$$

Die Menge

$$B := \Big\{\sum_{j=1}^n f_j(h)e_j\,;\, h \in H\Big\}$$

ist als beschränkte Teilmenge des endlich dimensionalen Untervektorraums $\mathrm{LH}\{e_1, \dots, e_n\}$ präkompakt. Es gibt also endlich viele $v_1, \dots, v_n \in E$ mit $B \subseteq U_{\varepsilon/2}(v_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon/2}(v_n)$. Insbesondere gibt es zu jedem $h \in H$ ein $k(h) \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\Big\|\sum_{j=1}^n f_j(h)e_j - v_{k(h)}\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Zusammen mit (9.2) folgt für alle $h \in H$:

$$\|h - v_{k(h)}\| = \Big\|h - \sum_{j=1}^n f_j(h)e_j\Big\| + \Big\|\sum_{j=1}^n f_j(h)e_j - v_{k(h)}\Big\| < \varepsilon.$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ ist also ein endliches ε–Netz für H. □

9.8. Satz (Ascoli 1883 und Arzela 1885). *Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum. Für $H \subseteq C(K)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *H ist relativkompakt in $C(K)$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$.*
(b) *H ist punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, d.h. es gilt*
  (i) *Für alle $x \in K$ ist $\sup_{h\in H}|h(x)| < \infty$ und*
  (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in H\ \forall s, t \in K$*:* $d(s, t) < \delta \Longrightarrow |h(s) - h(t)| < \varepsilon$.

Beweis. Ist H eine relativkompakte Teilmenge von $C(K)$, so ist H insbesondere beschränkt und erfüllt $\sup_{h\in H}|h(x)| \le \sup_{h\in H}\|h\|_K < \infty$ und damit (i). Da H präkompakt ist, gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele $h_1, \dots, h_n \in H$ mit $H \subseteq U_{\varepsilon/3}(h_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon/3}(h_n)$. Da die Funktionen $h_1, \dots, h_n$ gleichmäßig stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$ und $j = 1, \dots, j$ gilt: $|h_j(x) - h_j(y)| < \varepsilon/3$. Ist nun $h \in H$ beliebig, so ist $h \in U_{\varepsilon/3}(h_j)$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und es folgt für alle $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$:

$$|h(x) - h(y)| \le |h(x) - h_j(x)| + |h_j(x) - h_j(y)| + |h_j(y) - h(y)| < \varepsilon.$$

H ist also gleichgradig stetig.

Seien nun die Bedingungen (i) und (ii) für H erfüllt. Wegen (i) ist $F : x \mapsto (h(x))_{h\in H}$ eine Abbildung von K nach $\ell^\infty(H)$, die wegen (ii) stetig, also ein Element von $C(K, \ell^\infty(H))$ ist. Also folgt nach Satz 9.6: Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(K)$, $u_1 = (u_{1,h})_{h\in H}, \dots, u_n = (u_{n,h})_{h\in H} \in \ell^\infty(H)$ mit

$$\begin{aligned}\varepsilon > \Big\|F - \sum_{j=1}^n \varphi_j \otimes u_j\Big\|_K &= \sup_{x\in K}\sup_{h\in H}\Big|h(x) - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)u_{j,h}\Big| \\ &= \sup_{h\in H}\sup_{x\in K}\Big|h(x) - \sum_{j=1}^n u_{j,h}\varphi_j(x)u_{j,h}\Big| = \Big\|(h)_{h\in H} - \sum_{j=1}^n u_j \otimes \varphi_j\Big\|_\infty.\end{aligned}$$

Also folgt $(h)_{h\in H} \in \overline{\ell^\infty(H) \otimes C(K)}^{\|\cdot\|_\infty}$ und damit nach Satz 9.7 die Aussage (a) (mit $E := C(K)$). □

Beispiel. Seien $K_1 \subset \mathbb{R}^N$, $K_2 \subset \mathbb{R}^M$ kompakte Mengen und sei $k \in C(K_1 \times K_2)$. Dann ist der durch

$$(K_k f)(x) := \int_{K_2} k(x,y) f(y) d\lambda_M(y) \qquad (f \in C(K_2), x \in K_1)$$

definierte Integraloperator $K_k : C(K_2) \to C(K_1)$ ein kompakter Operator, wenn wir $C(K_1)$ und $C(K_2)$ jeweils mit den sup–Normen $\|\cdot\|_{K_1}$ bzw. $\|\cdot\|_{K_2}$ auf K_1 bzw. auf K_2 versehen.

Beweis. Für alle $f \in C(K_2)$ ist $\|K_k f\|_{K_1} \le \|k\|_{K_1 \times K_2} \|f\|_{K_2} \lambda_N(K_1)$. Die Menge $H := \{K_k f \,;\, f \in C(K_2), \|f\|_{K_2} \le 1\}$ ist also eine Menge von auf K_1 gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen. Da k auf der kompakten Menge $K_1 \times K_2$ stetig, also auch gleichmäßig stetig ist, gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $(x,y),(u,v)$ mit $|(x,y)-(u,v)| < \delta$ gilt: $|k(x,y) - k(u,v)| < \varepsilon/(\lambda_M(K_2)+1)$. Für alle $f \in C(K_2)$ mit $\|f\|_{K_2} \le 1$ und alle $x_1, x_2 \in K_1$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt dann

$$|(K_k f)(x_1) - (K_k f)(x_2)| \le \int_{K_2} |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \cdot |f(y)| d\lambda_M(y) \le \frac{\varepsilon \lambda_M(K_2)}{\lambda_M(K_2)+1} < \varepsilon\,.$$

Nach dem Satz von Arzela–Ascoli ist H also relativkompakt und damit K_k ein kompakter Operator. □

9.9. Satz. *Eine Teilmenge H von $\ell^p(\mathbb{N})$ $(1 \le p < \infty)$ ist genau dann relativkompakt in $\ell^p(\mathbb{N})$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists c_k \ge 0\ \forall x = (x_n)_{n=1}^\infty \in H$: $|x_k| \le c_k$.

(b) *Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ ist auf H gleichmäßig konvergent, d.h. es gilt*

$$\sup\Big\{ \Big(\sum_{k=n}^\infty |x_k|^p\Big)^{1/p} ;\, x = (x_j)_{j=1}^\infty \in H \Big\} \to 0 \qquad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $e_j := (\delta_{j,n})_{n=1}^\infty$ der j–te Einheitsvektor in $\ell^p(\mathbb{N})$. Sind für $H \subset \ell^p(\mathbb{N})$ die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, so gilt wegen (a) für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\Big(\sum_{j=1}^k h_j e_j\Big)_{h \in H} = \sum_{j=1}^k (h_j)_{h\in H} \otimes e_j \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \otimes \ell^p(\mathbb{N})$$

und wegen (b) folgt

$$\Big\|(h)_{h\in H} - \sum_{j=1}^k (h_j)_{h\in H} \otimes e_j\Big\|_\infty = \sup_{h\in H} \Big(\sum_{j=k+1}^\infty |h_j|^p\Big)^{1/p} \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Nach Satz 9.7 ist H also präkompakt.

Ist umgekehrt $H \subset \ell^p(\mathbb{N})$ präkompakt, so ist H insbesondere beschränkt und es folgt (a), denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sup_{h\in H} |h_k| \le \sup_{h \in H} \|h\|_p < \infty$. Da H präkompakt ist, gibt es zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein endliches $\varepsilon/3$–Netz $h_1 = (h_{1,j})_{j=1}^\infty, \ldots, h_m = (h_{m,j})_{j=1}^\infty \in \ell^p(\mathbb{N})$. Insbesondere gilt $\sum_{j=n}^\infty |h_{k,j}|^p \to 0$ für $n \to \infty$ für $k = 1, \ldots, m$. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \ge n_0$ gilt: $\sum_{j=n}^\infty |h_{k,j}|^p < (\varepsilon/3)^p$, $k = 1, \ldots, m$. Seien nun $n \ge n_0$ und $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in H$ beliebig. Dann gibt es ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ mit $x \in U_{\varepsilon/3}(h_k)$ und es folgt

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=n}^\infty |x_j|^p\Big)^{1/p} &\le \|x - h_k\|_p + \Big(\sum_{j=n}^\infty |h_{k,j}|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{j=1}^{n-1} |h_{k,j} - x_j|^p\Big)^{1/p} \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|x - h_k\|_p < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Also ist auch (b) erfüllt. □

9.10. Bemerkung. Für beschränkte Mengen $H \subset \ell^p(\mathbb{N})$ ist die Bedingung (a) im vorstehenden Satz automatisch erfüllt.

9.11. Beispiel. Sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $k = (k_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}} \in \ell^{p'}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ wird durch

$$K_k(x) := \Big(\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} x_m \Big)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{für } x = (x_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{N})$$

ein kompakter Operator $K_k : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^{p'}$ definiert.

Beweis. Für alle $x = (x_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{N})$ schätzt man mit der Hölderschen Ungleichung ab:

$$\|K_k x\|_{p'} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} x_m \Big|^{p'} \Big)^{\frac{1}{p'}} \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}|^{p'} \|x\|_p^{p'} \Big)^{\frac{1}{p'}} = \|k\|_{p'} \|x\|_p$$

Insbesondere ist K_k stetig und daher $H := K_k(B)$ beschränkt in $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ mit $B := \{x \in \ell^p(\mathbb{N}); \|x\|_p \le 1\}$. Nach der vorstehenden Bemerkung ist also (a) in Satz 9.9 erfüllt (für p' statt p). Ferner hat man mit den Bezeichnungen aus 9.9 für alle $x = (x_m)_{m=1}^{\infty} \in B$ und alle $N \in \mathbb{N}$ (wieder mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung):

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} x_m \Big|^{p'} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}|^{p'} \|x\|_p^{p'} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}|^{p'} \to 0$$

für $N \to \infty$ wegen der Summierbarkeit von $(|k_{n,m}|^{p'})_{n,m \in \mathbb{N}}$. Hiermit folgt, daß auch Bedingung (b) aus Satz 9.9 erfüllt ist. Nach Satz 9.9 ist also $H = K_k(B)$ relativkompakt in $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ und daher der Operator K_k kompakt. □

9.12. Satz. *Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{H} \ne \{0\}$. Ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein kompakter, hermitescher Operator, so gibt es einen Eigenwert $\mu_0 \in \mathbb{R}$ von T mit $|\mu_0| = \|T\|$.*

Beweis. Für $T = 0$ ist die Behauptung trivial, denn dann ist (wegen $\mathcal{H} \ne \{0\}$) $\mu_0 := 0$ ein Eigenwert von T. Sei nun also $T \ne 0$ vorausgesetzt. Nach Lemma 2.45 gilt

$$\|T\| = \sup\{ |\langle Tx, x \rangle| \, ; \, x \in \mathcal{H}, \|x\| \le 1 \} \, .$$

Daher gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $B_{\mathcal{H}}$ mit $|\langle Tx_n, x_n \rangle| \to \|T\|$ für $n \to \infty$. Da T nach Voraussetzung ein kompakter Operator ist, können wir o.B.d.A. (durch Übergang zu einer Teilfolge) voraussetzen, daß die Folge $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen ein $y_0 \in \mathcal{H}$ konvergiert. Nun ist die Folge $(\langle Tx_n, x_n \rangle)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, besitzt also eine gegen ein $\mu_0 \in \mathbb{R}$ konvergente Teilfolge $(\langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$ und es ist $|\mu_0| = \|T\| > 0$. Mit $x_0 := \frac{1}{\mu_0} y_0$ folgt $Tx_{n_k} \to \mu_0 x_0$ und $\|x_0\| \le 1$. Ferner gilt (da T hermitesch ist):

$$\begin{aligned} 0 \le & \|Tx_{n_k} - \mu_0 x_{n_k}\|^2 = \|Tx_{n_k}\|^2 - 2\mu_0 \langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle + \mu_0^2 \|x_{n_k}\|^2 \\ \le & \|T\|^2 - 2\mu_0 \langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle + \mu_0^2 = 2\mu_0(\mu_0 - \langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle) \to 0 \end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Es folgt $\lim_{k\to\infty} \mu_0 x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = \mu_0 x_0$. Also ist $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ und damit auch wegen der Stetigkeit von T: $\mu_0 x_0 = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = Tx_0$. Wegen

$$0 \ne |\mu_0| = \lim_{k\to\infty} |\langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle| = |\langle Tx_0, x_0 \rangle| = |\mu_0| \langle x_0, x_0 \rangle$$

ist $\|x_0\| = 1$ und damit insbesondere $x_0 \ne 0$. □

9.13. Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß für kompakte, hermitesche Operatoren die Funktion q_T mit $q_T(x) := |\langle Tx, x\rangle|$ für alle $x \in B_{\mathcal{H}}$ ihr Maximum $\|T\|$ auf der Einheitssphäre $S_{\mathcal{H}} := \{x \in \mathcal{H}; \|x\| = 1\}$ von $\mathcal{H}$ annimmt.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß man die Voraussetzungen in Satz 9.12 auch tatsächlich benötigt.

9.14. Beispiele. Sei $\mathcal{H}$ der Prä-Hilbertraum $(C([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem durch $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ für $f, g \in C([0,1])$ gegebenem Skalarprodukt.

(a) Der Operator T mit $(Tf)(t) := tf(t)$ für alle $f \in C([0,1]), t \in [0,1]$ ist hermitesch, besitzt aber keine Eigenwerte.
(b) Der Operator V mit $(Vf)(t) := \int_0^t f(s)ds$ für alle $f \in C([0,1]), t \in [0,1]$ ist kompakt und hat ebenfalls keine Eigenwerte.

Beweis als Übung.

Wir können nun einen für die Anwendungen sehr wichtigen Entwicklungssatz für kompakte hermitesche Operatoren beweisen.

9.15. Spektralsatz für kompakte hermitesche Operatoren. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein undendlich dimensionaler Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein kompakter, hermitescher Operator. Zu dem Eigenwertproblem*

$$Tx = \mu x$$

gibt es abzählbar unendlich viele Paare $(\mu_j, x_j) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$, $j \in \mathbb{N}_0$, so daß gilt:

(a) *Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ ist μ_j ein Eigenwert von T und x_j ein zugehöriger Eigenvektor mit $\|x_j\| = 1$. Die Folge $(x_j)_{j=0}^\infty$ bildet ein Orthonormalsystem.*
(b) $\|T\| = |\mu_0| \geq |\mu_1| \geq \cdots \geq |\mu_n| \geq |\mu_{n+1}| \geq \ldots$ *und es gilt $|\mu_n| \to 0$ für $n \to \infty$.*
(c) *Mit $\mathcal{H}_n := \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}^\perp$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*
$$|\mu_n| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \,;\, x \in \mathcal{H}_n, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| \,;\, x \in \mathcal{H}_n, \|x\| \leq 1\}\,.$$
(d) *Jedes Element aus dem Bildraum von T wird durch seine Entwicklung nach dem Orthonormalsystem $(x_j)_{j=0}^\infty$ dargestellt und es gilt für alle $x \in \mathcal{H}$:*
$$Tx = \sum_{n=0}^\infty \langle Tx, x_n\rangle x_n = \sum_{n=0}^\infty \langle x, Tx_n\rangle x_n = \sum_{n=0}^\infty \mu_n \langle x, x_n\rangle x_n\,.$$
(e) *Für jeden von 0 verschiedenen Eigenwert μ von T gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\mu_n = \mu$. Der zugehörige Eigenraum $E_\mu := \{x \in \mathcal{H}\,;\, Tx = \mu x\} = \ker(\mu 1_{\mathcal{H}} - T)$ ist endlich dimensional und hat $\{x_k \,;\, \mu_k = \mu\}$ als Basis.*

Beweis. Wir konstruieren die Paar (μ_n, x_n) induktiv. Das Paar (μ_0, x_0) wählen wir gemäß Satz 9.12. Seien nun schon für ein $n \in \mathbb{N}_0$ die Eigenwerte $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ mit den zugehörigen Eigenvektoren so gefunden, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\|T\| = |\mu_0| \geq |\mu_1| \geq \cdots \geq |\mu_n|$.
(ii) $\langle x_j, x_k\rangle = \delta_{j,k}$ für alle $j, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
(iii) Mit $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}$ gilt für $j = 0, 1, \ldots, n$:
$$|\mu_j| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \,;\, x \in \mathcal{H}_j, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| \,;\, x \in \mathcal{H}_j, \|x\| \leq 1\}\,.$$

Wir konstruieren nun einen Eigenwert μ_{n+1} und einen zugehörigen Eigenvektor, so daß die Forderungen (i)-(iii) auch für $n+1$ erfüllt sind.

$\mathcal{H}_{n+1} := \{x_0, \ldots, x_n\}^\perp$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum, der versehen mit dem (auf $\mathcal{H}_{n+1} \times \mathcal{H}_{n+1}$ eingeschränkten) Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wieder ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ ist. Wegen $\langle Tx, x_j\rangle = \langle x, Tx_j\rangle = \mu_j\langle x, x_j\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}_{n+1}$ und $j = 0, \ldots, n$ ist

$T(\mathcal{H}_{n+1}) \subseteq \mathcal{H}_{n+1}$. $\mathcal{H}_{n+1}$ ist also unter T invariant und $T|_{\mathcal{H}_{n+1}} : \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_{n+1}$ ist natürlich ebenfalls kompakt und hermitesch. Da $\mathcal{H}$ unendlich dimensional ist, ist $\mathcal{H}_{n+1} \neq \{0\}$. Wir können also Satz 9.12 auf $T|_{\mathcal{H}_{n+1}} : \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_{n+1}$ anwenden und finden einen Eigenvektor μ_{n+1} von $T|_{\mathcal{H}_{n+1}}$ und damit auch von T sowie einen zugehörigen Eigenvektor $x_{n+1} \in \mathcal{H}_{n+1}$ mit $\|x_{n+1}\| = 1$ und mit

$$\begin{aligned} |\mu_{n+1}| &= \|T|_{\mathcal{H}_{n+1}}\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \,;\, x \in \mathcal{H}_{n+1}, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| \,;\, x \in \mathcal{H}_{n+1}, \|x\| \leq 1\}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt wegen $\mathcal{H}_{n+1} \subset \mathcal{H}_n$

$$|\mu_{n+1}| = \|T|_{\mathcal{H}_{n+1}}\| \leq \|T|_{\mathcal{H}_n}\| = |\mu_n|\,.$$

Die Forderungen (i)-(iii) sind nun auch für $n+1$ erfüllt. Damit ist (μ_{n+1}, x_{n+1}) wie gewünscht gefunden und es folgen die Behauptungen (a) und (c) sowie der erste Teil von (b).

Den zweiten Teil der Behauptung in (b) beweisen wir indirekt:

Annahme: Die Folge $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert nicht gegen 0. Dann ist die Folge $(\frac{1}{\mu_n})_{n=0}^\infty$ in $\mathbb{R}$ und damit auch die Folge $(\frac{1}{\mu_n}x_n)_{n=0}^\infty$ in $\mathcal{H}$ beschränkt. Da T ein kompakter Operator ist besitzt die Folge $(T(\frac{1}{\mu_n}x_n))_{n=0}^\infty$ eine in $\mathcal{H}$ konvergente Teilfolge $(T(\frac{1}{\mu_{n_k}}x_{n_k}))_{k=0}^\infty$. Dies ist aber wegen

$$\|T(\frac{1}{\mu_n}x_n) - T(\frac{1}{\mu_j}x_j)\| = \|x_n - x_j\| = 2 \quad \text{für alle } j, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq j$$

nicht möglich. Also war die Annahme falsch und (b) ist bewiesen.

Zu (d): Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $P_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $P_n x := \sum_{j=0}^n \langle x, x_j\rangle x_j$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Dann folgt für $0 \leq k < n$:

$$\langle x - P_n x, x_k\rangle = \langle x, x_k\rangle - \sum_{j=0}^n \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x_k\rangle = 0\,.$$

Also ist $x - P_n x \in \mathcal{H}_n$ für alle $x \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}$. Nach der Besselschen Ungleichung ist $\|P_n x\| \leq \|x\|$. Es folgt für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$\|T(x - P_n x)\| = \|T|_{\mathcal{H}_n}(x - P_n x)\| \leq \|T|_{\mathcal{H}_n}\| \cdot \|x - P_n x\| \leq 2|\mu_n| \cdot \|x\| \to 0 \text{ für } n \to \infty\,.$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} Tx = \lim_{n\to\infty} TP_n x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n \langle x, x_j\rangle Tx_j &= \sum_{j=0}^\infty \langle x, x_j\rangle Tx_j = \sum_{j=0}^\infty \langle x, x_j\rangle \mu_j x_j \\ &= \sum_{j=0}^\infty \langle x, \mu_j x_j\rangle x_j = \sum_{j=0}^\infty \langle x, Tx_j\rangle x_j = \sum_{j=0}^\infty \langle Tx, x_j\rangle x_j \end{aligned}$$

und (d) ist bewiesen.

Zu (e): Sei $\mu \neq 0$ ein Eigenwert von T und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mu\langle x, x_n\rangle = \langle Tx, x_n\rangle = \langle x, Tx_n\rangle = \mu_n\langle x, x_n\rangle\,.$$

Ist also $\mu \neq \mu_n$, so folgt $\langle x, x_n\rangle = 0$. Demnach kann μ nicht von allen $\mu_n, n \in \mathbb{N}_0$ verschieden sein, da sonst die unmögliche Aussage

$$0 \neq \mu x = Tx = \sum_{j=0}^\infty \langle x, x_j\rangle \mu_j x_j = 0$$

folgen würde. Nach Bemerkung 9.3 (c) ist $\dim E_\mu < \infty$. □

9.16. Folgerung. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unendlich dimensionaler Hilbertraum über $\mathbb{K}$. Gibt es auf $\mathcal{H}$ einen injektiven, kompakten, hermiteschen Operator, so ist $\mathcal{H}$ separabel und das in dem Beweis des Spektralsatzes konstruierte Orthonormalsystem von Eigenvektoren von T ist eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.*

Beweis. Sei also ein injektiver, kompakter, hermitescher Operator T auf $\mathcal{H}$ gegeben. Dann ist $(\operatorname{ran} T)^\perp = \ker T^* = \ker T = \{0\}$ (vergl. Lemma 2.46). Nach Satz 2.21 liegt $\operatorname{ran} T$ also dicht in $\mathcal{H}$. Nach Teil (d) des Spektralsatzes liegt also die lineare Hülle des in 9.15 konstruierten Orthonormalsystems dicht in $\mathcal{H}$ und ist somit ein vollständiges Orthonormalsystem, also auch eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Da diese abzählbar unendlich ist, ist $\mathcal{H}$ nach Satz 2.33 separabel. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 9. In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt *Hölder–stetig mit Exponent* $\alpha \in (0, 1]$, falls gilt

$$q_\alpha(f) := \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty\,. \tag{9.3}$$

Die mit dem Exponenten $\alpha = 1$ Hölder–Stetigen Funktionen stimmen also mit den Lipschitz–stetigen Funktionen überein.

Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$ sei $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ der Raum der auf Ω m mal stetig differenzierbaren Funktionen, die mit allen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar sind und die mit allen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ Hölder–stetig auf Ω vom Exponenten α sind.

9.1. Aufgabe. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\|f\|_{m,\alpha} := \max_{|\gamma|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \Big|\frac{\partial^\gamma f}{\partial x^\gamma}(x)\Big| + \max_{|\gamma|=m} q_\alpha\Big(\frac{\partial^\gamma f}{\partial x^\gamma}\Big) \qquad \text{für } f \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$$

wird eine Norm auf $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ erklärt, bezüglich der $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ ein Banachraum ist.

(b) Für $0 < \alpha < 1$ gilt $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^m(\overline{\Omega})$ mit kompakten Einbettungen. Hierbei sei $C^m(\overline{\Omega})$ der Banachraum der auf Ω m mal stetig differenzierbaren Funktionen, die mit allen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar sind, versehen mit der Norm

$$\|f\|_m := \max_{|\gamma|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \Big|\frac{\partial^\gamma f}{\partial x^\gamma}(x)\Big| \qquad f \in C^m(\overline{\Omega}).$$

9.2. Aufgabe. Sei $C_b(\mathbb{R})$ der Banachraum der auf $\mathbb{R}$ beschränkten stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$f(x) := \begin{cases} x^2(1 - x^2) & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases} \qquad \text{und } f_k(x) := f(x + k)\,.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(f_k)_{k=0}^\infty$

(a) ist punktweise beschränkt.
(b) ist gleichgradig stetig.
(c) ist punktweise konvergent.
(d) besitzt keine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

9.3. Aufgabe. (a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Wir definieren zu $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest eine Abbildung T auf $\mathcal{H}$ folgendermaßen:

$$T\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\Big) := \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle \alpha_n e_{n+k} \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$

Zeigen Sie, daß T nach $\mathcal{H}$ abbildet und stetig ist. Geben Sie $\|T\|$ an.

(b) Zeigen Sie, daß der in (a) definierte Operator genau dann kompakt ist, wenn $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

9.4. Aufgabe. Sei T ein stetiger Operator auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Man nennt T einen *Hilbert-Schmidt-Operator*, wenn es eine Orthonormalbasis $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}$ gibt, so daß gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|Te_i\|^2 < \infty. \tag{9.4}$$

(a) Zeigen Sie, daß Bedingung 9.4 für jede Orthonormalbasis erfüllt ist, wenn sie schon für eine Orthonormalbasis gilt und alle Summen der Form 9.4 denselben Wert haben (dessen Wurzel wir mit $\|T\|_{HS}$ bezeichnen). Außerdem ist T Hilbert-Schmidt-Operator genau dann, wenn T^* ein solcher ist.
(b) Es gilt $\|T\| \le \|T\|_{HS}$.
(c) Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie für zwei Orthonormalbasen $\{e_i\}, \{f_j\}$ von $\mathcal{H}$, daß $\sum_{i=1}^\infty \|Te_i\|^2 = \sum_{j=1}^\infty \|T^*f_j\|^2$ gilt.

9.5. Aufgabe. (a) Welche der Operatoren aus Aufgabe 9.3 sind Hilbert-Schmidt-Operatoren?
(b) Zeigen Sie: T ist Hilbert-Schmidt-Operator $\Leftrightarrow$ T^*T ist kompakt und die Familie der Eigenwerte von T^*T ist summierbar.

9.6. Aufgabe. Führen Sie die Beweise zu den Beispielen in 9.14 aus.

9.7. Aufgabe. Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(H)$ positiv und selbstadjungiert. Zeigen Sie, daß genau ein positiver selbstadjungierter Operator $S \in \mathcal{K}(H)$ existiert mit $S^2 = T$. Man schreibt $S = T^{1/2}$.

9.8. Aufgabe. Sei $T : H_1 \to H_2$ ein kompakter Operator zwischen zwei Hilberträumen.

(a) Zeigen Sie, daß T^*T kompakt, selbstadjungiert und positiv ist. Der nach Aufgabe 9.7 daher eindeutig bestimmte Operator $(T^*T)^{1/2}$ wird mit $|T|$ bezeichnet.
(b) Es gilt $\||T|h\| = \|Th\|$ für alle $h \in H_1$.
(c) Es existieren Operatoren $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ und $P \in \mathcal{L}(H_1)$ mit $T = UP$, so daß P kompakt und positiv ist und $U|_{(\ker U)^\perp}$ eine Isometrie. U ist durch die Forderung $\ker U = \ker T$ eindeutig bestimmt.

9.9. Aufgabe. Seien H_1, H_2 Hilberträume.

(a) Für $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ existieren Orthonormalsysteme $\{e_1, e_2, ...\}$ von H_1 und $\{f_1, f_2, ...\}$ von H_2 sowie eine monoton fallende Folge nicht negativer Zahlen s_k mit $s_k \to 0$, so daß

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} s_k\langle x, e_k\rangle_{H_1} f_k \qquad \text{für alle } x \in H_1.$$

Welche Bedeutung haben die Zahlen s_k^2?

(b) Zeigen Sie, daß die linearen Operatoren von H_1 nach H_2 mit endlichdimensionalem Bild dicht liegen in $\mathcal{K}(H_1, H_2)$.

KAPITEL 10

Grundlagen aus der Fredholmtheorie

Im folgenden seien $(E;\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ und $(G,\|\cdot\|_G)$ Banachräume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen. Die Identität auf diesen Räumen bezeichnen wir mit 1.

10.1. Lemma. *Ist $E = E_1 \oplus E_2$ die algebraisch direkte Summe zweier Untervektorräume E_1 und E_2, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *E_1 und E_2 sind abgeschlossen.*
(b) *Es gibt $P \in \mathcal{L}(E)$ mit $P^2 = P$, $\operatorname{ran}(P) = E_1$ und $\ker(P) = E_2$, d.h. die Unterräume E_1 und E_2 sind insbesondere stetig projiziert.*
(c) *Der algebraische Isomorphismus $S : E_1 \times E_2 \to E$ mit $S(x_1, x_2) := x_1 + x_2$ für alle $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ ist ein topologischer Isomorphismus. Hierbei sei $E_1 \times E_2$ versehen mit der Produktnorm.*

Beweis. “(a)$\Longrightarrow$(c)”: Ist (a) erfüllt, so ist insbesondere $E_1 \times E_2$ ein Banachraum und der algebraische Isomorphismus S ist offensichtlich stetig, also nach dem Satz von der inversen Abbildung ein topologischer Isomorphismus.

“(c)$\Longrightarrow$(b)”: Ist (c) erfüllt, so ist $Q : E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2$ mit $Q(x_1, x_2) := (x_1, 0)$ für alle $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ eine stetige lineare Projektion. Also ist auch $P := SQS^{-1}$ eine stetige lineare Projektion. Diese erfüllt $\operatorname{ran}(P) = E_1$ und $\ker(P) = E_2$.

“(b)$\Longrightarrow$(a)”: Ist (b) erfüllt und P wie in (b), so sind $E_2 = \ker(P)$ und $E_1 = \ker(1-P)$ wegen der Stetigkeit von P und $1 - P$ abgeschlossen. □

10.2. Lemma. *Sei E_1 ein endlich dimensionaler Unterverktorraum von E. Dann gibt es eine Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{ran}(P) = E_1$.*

Beweis. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von E_1 und $f_1, \dots, f_n$ eine duale Basis im algebraischen Dualraum von E_1 (mit also $f_j(e_k) = \delta_{j,k}$, $j, k = 1, \dots, n$). Wegen $\dim E_1 = n < \infty$ sind die Funktionale $f_1, \dots, f_n$ auf E_1 stetig, besitzen also nach dem Satz von Hahn–Banach stetige Fortsetzungen $\tilde{f}_1 \dots, \tilde{f}_n$ auf ganz E. Die durch

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(x) e_j \qquad (x \in E)$$

definierte stetige lineare Abbildung erfüllt offensichtlich $P^2 = P$ und $\operatorname{ran}(P) = E_1$. □

10.3. Lemma (Kato 1958). *Ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein stetiger linearer Operator mit*

$$\operatorname{codim} \operatorname{ran}(T) := \dim F / \operatorname{ran}(T) = n < \infty\,,$$

so ist $\operatorname{ran}(T)$ abgeschlossen und es gibt eine Projektion $P \in \mathcal{L}(F)$ mit $\dim \operatorname{ran}(1-P) = n$ und $\operatorname{ran}(P) = \operatorname{ran}(T)$.

Beweis. Sei $\pi : E \to E/\ker(T)$ der kanonische Epimorphismus und $\hat{T} : E/\ker(T) \to F$ der von T induzierte Monomorphismus. Wegen der Stetigkeit von T ist $\ker(T)$ abgeschlossen und auch $\hat{T}$ stetig mit $\operatorname{ran}(\hat{T}) = \operatorname{ran}(T)$. Wegen $\dim F/\operatorname{ran}(T) = n < \infty$ gibt es Elemente $y_1, \dots, y_n \in F$ mit

$$F = \operatorname{ran}(T) + \operatorname{LH}\{y_1, \dots, y_n\} \quad \text{und} \quad \operatorname{ran}(T) \cap \operatorname{LH}\{y_1, \dots, y_n\} = \{0\}\,.$$

$X := E/\ker(T) \times \mathbb{C}^n$ wird zu einem Banachraum durch

$$\|([x], z)\|_X := \|[x]\|_{E/\ker(T)} + \sum_{j=1}^{n} |z_j| \qquad ([x] \in E/\ker(T), z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$$

Der Operator $S : X \to F$ mit $S([x], z) := \hat{T}([x]) + \sum_{j=1}^{n} z_j y_j$ ist offensichtlich stetig und bijektiv. Nach dem Satz 5.7 von der inversen Abbildung ist dann auch $S^{-1} : F \to X$ stetig und $\operatorname{ran} T = (S^{-1})^{-1}(E/\ker(T) \times \{0\})$ ist als Urbild des abgeschlossenen Unterraums $E/\ker(T) \times \{0\}$ unter der stetigen Abbildung S^{-1} abgeschlossen.

Sei $Q : X \to X$ die stetige Projektion $([x], z) \mapsto ([x], 0)$. Dann ist $P := SQS^{-1}$ stetig und erfüllt $P^2 = P$, $\operatorname{ran}(P) = \operatorname{ran}(SQ) = \operatorname{ran}(T)$ und $\operatorname{ran}(1 - T) = \operatorname{ran}(S(1 - Q) = \operatorname{LH}\{y_1, \ldots, y_n\}$. □

10.4. Lemma. *Sei E_1 ein endlich dimensionaler Untervektorraum von E und sei E_2 ein abgeschlossener Untervektorraum von E. Dann ist auch der Untervektorraum $E_1 + E_2$ abgeschlossen in E.*

Beweis. Sei $\pi : E \to E/E_2$ der kanonische Epimorphismus. Da mit E_1 auch $\pi(E_1)$ endlichdimensional und somit abgeschlossen in E/E_2 ist, ist wegen der Stetigkeit von π auch der Raum $E_1 + E_2 = \pi^{-1}(\pi(E_1))$ abgeschlossen in E. □

10.5. Definition. $T \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt *Fredholmoperator*, falls $\dim \ker(T) < \infty$ und $\operatorname{codim} \operatorname{ran} T = \dim F/\operatorname{ran}(T) < \infty$. Dann ist

$$\operatorname{ind}(T) := \dim \ker(T) - \dim F/\operatorname{ran}(T)$$

eine ganze Zahl. $\operatorname{ind}(T)$ heißt der *Index* von T.

Mit $\Phi(E, F)$ bezeichnen wir die Menge aller Fredholmoperatoren von E nach F. Ferner sei für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Menge der Fredholmoperatoren vom Index n mit

$$\Phi_n(E, F) := \{T \in \Phi(E, F)\,;\, \operatorname{ind}(T) = n\}$$

bezeichnet. Statt $\Phi(E, E)$ bzw. $\Phi_n(E, E)$ schreiben wir auch $\Phi(E)$ bzw. $\Phi_n(E)$.

10.6. Beispiel. Sei $E := \ell^p(\mathbb{N}_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $S_n, T_n \in \mathcal{L}(E)$ durch $x = (x_k)_{k=0}^\infty \mapsto T_n(x) := (x_{k+n})_{k=0}^\infty$ und $x = (x_k)_{k=0}^\infty \mapsto S_n(x) := (y_k)_{k=0}^\infty$ mit $y_k := 0$ für $0 \le k < n$ und $y_k := x_{k-n}$ für $k \ge n$. Dann sind die Operatoren T_n, S_n stetig mit $\|T_n\| = \|S_n\| = 1$. Man hat $T_n, S_n \in \Phi(E)$ mit $\operatorname{ind}(T_n) = n$ und $\operatorname{ind}(S_n) = -n$. Alle ganzen Zahlen können also als Index auftreten.

Eine wichtige Klasse von Beispielen wird durch den folgenden Satz gegeben:

10.7. Satz. *Für jeden kompakten Operator $K \in \mathcal{K}(E)$ ist $1 - K \in \Phi(E)$.*

Beweis. (a) $\dim \ker(1 - K) < \infty$: Dies ist unmittelbar klar nach Bemerkung 9.3 (c).

(b) $\operatorname{ran}(1-K)$ ist abgeschlossen: Wegen $\dim \ker(1-K) < \infty$ existiert nach Lemma 10.2 eine Projektion $Q \in \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{ran}(Q) = \ker(1 - K)$. Wegen der Stetigkeit von Q ist dann $E_1 := \ker(Q) = \operatorname{ran}(1 - Q)$ abgeschlossen in E und es gilt $\operatorname{ran}(1 - K) = (1 - K)(E_1)$. Sei nun $y \in \overline{\operatorname{ran}(1 - K)} = \overline{(1 - K)(E_1)}$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E_1 mit $(1 - K)x_n \to y$ in E für $n \to \infty$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist unbeschränkt. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir dann annehmen, daß $\|x_n\|_E \to \infty$ für $n \to \infty$. Mit $u_n := \|x_n\|_E^{-1} x_n$ folgt $\|u_n\|_E = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\|(1 - K)u_n\|_E = \frac{1}{\|x_n\|_E} \|(1 - K)x_n\|_E \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty. \tag{10.1}$$

Da der Operator K kompakt ist, hat die Folge $(Ku_n)_{n=1}^\infty$ eine gegen ein Element $v \in E$ konvergente Teilfolge $(Ku_{n_k})_{k=1}^\infty$. Wegen (10.1) folgt hieraus $u_{n_k} \to v$ für $k \to \infty$ und wegen der Stetigkeit von $1-K$ und (10.1) somit $(1-K)v=0$. Da E_1 abgeschlossen ist, liegt v in E_1 und es folgt $v \in E_1 \cap \ker(1-K) = \{0\}$, d.h. $v=0$ im Widerspruch zu $\|v\|_E = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_E = 1$. Dieser Fall kann also nicht eintreten und es bleibt nur:

2. Fall: Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist beschränkt. Dann hat die Folge $(Kx_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge $(Kx_{n_k})_{k=1}^\infty$. Also ist $x_{n_k} = (1-K)x_{n_k} + Kx_{n_k}$ gegen ein Element $x_0 \in E_1$ konvergent. Wegen der Stetigkeit von $1-K$ folgt

$$y = \lim_{k\to\infty}(1-K)x_{n_k} = (1-K)x_0$$

und somit $y \in \operatorname{ran}(1-K)$. Also hat $1-K$ ein abgeschlossenes Bild.

(c) Zu zeigen bleibt: $\dim(E/\operatorname{ran}(1-K)) < \infty$. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß $\dim(E/\operatorname{ran}(1-K)) = \infty$ gilt. Wir führen eine induktive Konstruktion durch:

Wir setzen $Y_0 := \operatorname{ran}(1-K)$. Insbesondere ist Y_0 nach (b) abgeschlossen. Wegen $\dim(E/\operatorname{ran}(1-K)) = \infty$ gibt es nach dem Lemma von Riesz 1.15 ein $y_1 \in E \setminus Y_0$ mit $\operatorname{dist}(y_1, Y_0) \geq 1/2$ und $\|y_1\| = 1$ und hierzu nach der Folgerung 6.7 aus dem Satz von Hahn–Banach ein $x_1' \in E'$ mit $x_1'|_{Y_0} \equiv 0$, $\|x_1\|_{E'} = 1$ und $x_1'(y_1) = \operatorname{dist}(y_1, Y_0) \geq 1/2$. Dann ist $Y_1 := Y_0 + \operatorname{LH}\{y_0\}$ nach Lemma 10.4 und unserer Annahme wieder ein echter abgeschlossener Unterraum von E.

Seien nun schon $y_j \in E, x_j' \in E'$ für $1 \leq j \leq n$ konstruiert derart, daß mit $Y_j := Y_0 + \operatorname{LH}\{y_1, \ldots, y_j\}$ gilt: $\|y_j\|_E = 1 = \|x_j'\|_{E'}$, $y_j \in Y_j \setminus Y_{j-1}$, $x_j'|_{Y_{j-1}} \equiv 0$ und $x_j'(y_j) = \operatorname{dist}(y_j, Y_{j-1}) \geq 1/2$ für $j = 1, \ldots, n$.

Nach unserer Annahme und Lemma 10.4 ist Y_n ein echter, abgeschlossener Untervektorraum von E. Wieder nach dem Lemma von Riesz 1.15 gibt es also ein $y_1 \in E \setminus Y_0$ mit $\operatorname{dist}(y_{n+1}, Y_n) \geq 1/2$ und $\|y_{n+1}\| = 1$ und hierzu nach der Folgerung 6.7 aus dem Satz von Hahn–Banach ein $x_{n+1}' \in E'$ mit $x_{n+1}'|_{Y_0} \equiv 0$, $\|x_{n+1}\|_{E'} = 1$ und $x_{n+1}'(y_{n+1}) = \operatorname{dist}(y_{n+1}, Y_n) \geq 1/2$.

Da K ein kompakter Operator auf E ist, ist $H := \overline{K(B_E)}$ kompakt. Die Folge der oben induktiv konstruierten stetigen linearen Funktionale x_n', $n \in \mathbb{N}$ ist auf der kompakten Menge H punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, besitzt also nach dem Satz von Arzela–Ascoli eine auf H gleichmäßig konvergente Teilfolge $(x_{n_k}')_{k=1}^\infty$. Daher ist die Folge $(x_{n_k}' \circ K)_{k=1}^\infty$ in $(E', \|\cdot\|_{E'})$ konvergent gegen ein stetiges lineares Funktional y' auf E. Wegen $x_{n_k}'|_{\operatorname{ran}(1-K)} \equiv 0$ folgt dann auch

$$x_{n_k}' = x_{n_k}' \circ (1-K) + x_{n_k}' \circ K \to y' \qquad \text{für } k \to \infty$$

im Widerspruch dazu, daß $(x_{n_k}')_{k=1}^\infty$ wegen

$$\|x_{n_{k+1}}' - x_{n_k}'\|_{E'} \geq |x_{n_{k+1}}'(y_{n_k}) - x_{n_k}'(y_{n_k})| = |x_{n_k}'(y_{n_k})| \geq \frac{1}{2}$$

keine Cauchyfolge in $(E', \|\cdot\|_{E'})$ sein kann. Also war die Annahme falsch, d.h. es gilt $\operatorname{codim}(\operatorname{ran}(1-K)) < \infty$. $\square$

10.8. Satz (Atkinson). *Für alle $T \in \Phi(E,F)$. $S \in \Phi(F,G)$ gilt $ST \in \Phi(E,F)$ und*

$$\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T).$$

Beweis. Wir betrachten die folgenden algebraisch direkten Zerlegungen:

$$\ker(S) = (\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S)) \oplus F_2$$

und

$$E = \ker(T) \oplus E_1 \xrightarrow{T} F = \overbrace{F_1 \oplus (\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S))}^{\operatorname{ran}(T)} \oplus F_2 \oplus F_3 \xrightarrow{S} \overbrace{\underbrace{S(F_1)}_{\operatorname{ran}(ST)} \oplus S(F_3)}^{\operatorname{ran}(S)} \oplus G_1\,.$$

Wegen $\dim\ker(S) < \infty$ ist

$$\dim(\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S)) = \dim\ker(S) - \dim F_2 < \infty \tag{10.2}$$

und aus der Injektivität von $S|_{F_3}$ und wegen $\operatorname{codim}\operatorname{ran}(T) < \infty$ folgt

$$\dim S(F_3) = \dim F_3 < \infty$$

und daher

$$\dim S(F_3) = \dim F_2 \oplus F_3 - \dim F_2 = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T) - \dim F_2\,.$$

Nun ist $T|_{E_1}$ injektiv und

$$\ker(ST) = \ker(T) \oplus \{x \in E_1\,;\, Tx \in \ker(S)\}$$

und somit

$$\dim\ker(ST) = \dim\ker(T) + \dim(\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S)) < \infty.$$

Ferner gilt

$$\operatorname{codim}\operatorname{ran}(ST) = \dim S(F_3) + \dim G_1 = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T) - \dim F_2 + \operatorname{codim}\operatorname{ran}(S)\,.$$

Es folgt unter Verwendung von (10.2)

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(ST) &= \dim\ker(ST) - \operatorname{codim}\operatorname{ran}(ST)\\ &= \dim\ker(T) + \dim(\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S)) - \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T) + \dim F_2 - \operatorname{codim}\operatorname{ran}(S)\\ &= \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind}(S)\,.\end{aligned}$$

□

10.9. Lemma. *Für alle $A \in \mathcal{F}(E)$ ist* $\operatorname{ind}(1 + A) = 0$.

Beweis. Wir zerlegen $\ker(A)$ und E algebraisch direkt in der Form $\ker(A) = E_1 \oplus (\operatorname{ran}(A) \cap \ker(A))$ und

$$E = E_1 \oplus \overbrace{\underbrace{(\operatorname{ran}(A) \cap \ker(A)) \oplus E_2}_{\operatorname{ran}(A)} \oplus E_3}^{E_4}\,.$$

Es folgt

$$(1 + A)(E_4) \subseteq E_4 + A(E_4) \subseteq E_4 + \operatorname{ran}(A) \subseteq E_4\,.$$

Für alle $x \in E_1$ hat man wegen $E_1 \subseteq \ker(A)$: $(1 + A)x = x + Ax = x \in E_1$ und daher $(1+A)|_{E_1} = 1_{E_1}$. Insbesondere sind E_1 und E_4 invariant unter $1+A$. Wegen der Injektivität von $A|_{E_2 \oplus E_3}$ und wegen $\dim\operatorname{ran}(A) < \infty$ gilt $\dim(E_2 \oplus E_3) = \dim\operatorname{ran}(A) < \infty$. Da E_4 von endlicher Dimension und invariant unter $1 + A$ ist, folgt

$$\dim\ker((1 + A)|_{E_4}) = \dim(E_4/(1 + A)(E_4)) = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(1 + A)$$

und daher

$$\dim\ker(1 + A) = \dim\ker((1 + A)|_{E_1} + \dim\ker((1 + A)|_{E_4}) = 0 + \operatorname{codim}\operatorname{ran}(1 + A),$$

also $\operatorname{ind}(1 + A) = 0$. □

Im folgenden Satz zeigen wir, daß die Fredholmoperatoren gerade die stetigen linearen Operatoren sind, die modulo der Operatoren von endlich dimensionalem Rang invertierbar sind.

10.10. Satz. *Für $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist Fredholmoperator.*

(b) *Es gibt $L, R \in \Phi(F, E)$ und $A_1 \in \mathcal{F}(E)$, $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit*

$$LT = 1_E - A_1\,, \qquad TR = 1_F - A_2\,. \tag{10.3}$$

(c) *Es gibt* $L, R \in \mathcal{L}(F, E)$ *und* $A_1 \in \mathcal{F}(E)$, $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ *mit* (10.3).

BEWEIS. "(a)$\Longrightarrow$(b)": Sei also $T \in \Phi(E, F)$. Nach dem Kato–Lemma 10.3 gibt es eine Projektion $P = P^2 \in \mathcal{L}(F)$ mit $\operatorname{ran}(P) = \operatorname{ran}(T)$ und $\dim \operatorname{ran}(1 - P) = \operatorname{codim} \operatorname{ran}(T)$. Wegen $\dim \ker(T) < \infty$ gibt es nach Lemma 10.2 auch eine Projektion $Q = Q^2 \in \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{ran}(Q) = \ker(T)$. $E_1 := \ker(Q) = \operatorname{ran}(1_E - Q)$ ist abgeschlossener Untervektorraum von E und es ist $E = \ker(T) \oplus E_1$. $T|_{E_1}$ ist also injektiv und $T(E_1) = \operatorname{ran}(T)$ ist abgeschlossen. Nach dem Satz von der inversen Abbildung existiert also $S \in \mathcal{L}(\operatorname{ran}(T), E_1)$ mit $ST|_{E_1} = 1_{E_1}$ und $TS = 1_{\operatorname{ran}(T)}$. Mit $R := L := SP : F \to E$ folgt

$$\operatorname{ran}(L) = \operatorname{ran}(R) = E_1, \quad \operatorname{codim} \operatorname{ran}(L) = \operatorname{codim} \operatorname{ran}(R) = \dim E/E_1 = \dim \ker(T) < \infty$$

sowie

$$\begin{aligned} \ker(R) = \ker(L) &= \operatorname{ran}(1_F - P), \\ \dim \ker(R) = \dim \ker(L) &= \dim \operatorname{ran}(1_F - P) = \operatorname{codim} \operatorname{ran}(T) < \infty. \end{aligned}$$

Also gilt $R = L \in \Phi(F, E)$ und $\operatorname{ind}(R) = \operatorname{ind}(L) = -\operatorname{ind}(T)$. Ferner hat man

$$\begin{aligned} LT &= SPT = ST(1_E - Q) + STQ = 1_E - Q, \\ TR &= TSP = P = 1_F - (1_F - P) \end{aligned}$$

mit $Q \in \mathcal{F}(E)$, $1_F - P \in \mathcal{F}(F)$.

"(b)$\Longrightarrow$(c)" ist offensichtlich.

"(c)$\Longrightarrow$(a)": Aus der Voraussetzung in (c) folgt für $x \in E$:

$$LTx = 0 \quad \Longleftrightarrow \; x = A_1 x$$

und damit

$$\ker(T) \subseteq \ker(LT) \subseteq \operatorname{ran}(A_1) \quad \text{also } \dim \ker(T) \leq \dim \operatorname{ran}(A_1) < \infty.$$

Wegen $TR = 1_F - A_2$ ist

$$F = \operatorname{ran}(1_F) \subseteq \operatorname{ran}(TR) + \operatorname{ran}(A_2) \subseteq F$$

und daher $\operatorname{codim} \operatorname{ran}(T) \leq \operatorname{codim} \operatorname{ran}(TR) \leq \dim \operatorname{ran}(A_2) < \infty$. Also ist T ein Fredholmoperator. □

Aus Satz 10.8 und Lemma 10.9 erhalten wir unmittelbar:

10.11. FOLGERUNG. *Ist* $T \in \Phi(E, F)$ *und sind* L, R, A_1, A_2 *wie in Satz 10.10 (b), so gilt* $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(R) = -\operatorname{ind}(T)$.

10.12. SATZ (Satz von der Stabilität des Indexes). *Seien* E, F *unendlich dimensionale Banachräume. Für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *ist die Menge* $\Phi_n(E, F)$ *offen in* $\mathcal{L}(E, F)$. *Insbesondere ist also auch* $\Phi(E, F)$ *offen und die Abbildung* $\operatorname{ind} : \Phi(E, F) \to \mathbb{Z}$ *ist stetig.*

BEWEIS. Sei $T \in \Phi_n(E, F)$ beliebig. Nach Satz 10.10 und der anschließenden Folgerung gibt es dann $L, R \in \Phi_{-n}(E, F)$ und $A_1 \in \mathcal{F}(E)$, $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit $LT = 1_E - A_1$ und $TR = 1_F - A_2$. Insbesondere ist

$$d := \min\{\|L\|^{-1}, \|R\|^{-1}\} > 0.$$

Sei nun $S \in \mathcal{L}(E, F)$ beliebig mit $\|S\| < d$. Dann ist $\|LS\| < 1$ und $\|RS\| < 1$. Nach Lemma 7.6 sind die Operatoren $1_E + LS$ in $\mathcal{L}(E)$ und $1_F + SR$ in $\mathcal{L}(F)$ invertierbar, also bijektiv und insbesondere Fredholmsch vom Index 0. Ferner gilt

$$L(T + S) = 1_E - A_1 + LS\,, \quad (T + S)R = 1_F - A_2 + SR\,.$$

Multiplikation von links mit $(1_E + LS)^{-1}$ bzw. von rechts mit $(1_F + SR)^{-1}$ ergibt

$$\underbrace{(1_E + LS)^{-1}L}_{=:\tilde{L} \in \mathcal{L}(F,E)}(T + S) = 1_E - \underbrace{(1_E + LS)^{-1}A_1}_{=:\tilde{A}_1 \in \mathcal{F}(E)}.$$

bzw.

$$(T+S)\underbrace{R(1_F+SR)^{-1}}_{=:\tilde{R}\in\mathcal{L}(F,E)} = 1_F - \underbrace{A_2R(1_F+SR)^{-1}}_{=:\tilde{A}_2\in\mathcal{F}(F)}.$$

Nach Satz 10.10 ist $T+S$ also ein Fredholmoperator und mit Satz 10.8 und Lemma 10.9 folgt aus der letzten Gleichung

$$0 = \operatorname{ind}\big((T+S)R(1+SR)^{-1}\big) = \operatorname{ind}(T+S)+\operatorname{ind}(R)+\operatorname{ind}((1+SR)^{-1}) = \operatorname{ind}(T+S)-n+0$$

und daher $\operatorname{ind}(T+S) = n$, d.h. $T+S \in \Phi_n(E,F)$. ☐

10.13. Folgerung. *Sei X ein zusammenhängender topologischer Hausdorffraum und sei $T(\cdot) : X \to \Phi(E,f)$ stetig. Dann ist $t \mapsto \operatorname{ind}(T(t))$ konstant auf X.*

Beweis. Nach dem Stabilitätssatz 10.12 ist die Abbildung $t \mapsto \operatorname{ind}(T(t))$ als Hintereinanderausführung von stetigen Abbildungen eine stetige Abbildung von X nach $\mathbb{Z}$. Da X zusammenhängend ist, ist auch $\{\operatorname{ind}(T(t))\,;\, t\in X\}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{Z}$, also nur aus einem Punkt bestehend. ☐

10.14. Folgerung. *Für alle $K \in \mathcal{L}(E)$ ist* $\operatorname{ind}(1_E + K) = 0$.

Beweis. Mit K ist für $0 \le t \le 1$ auch der Operator $-tK$ kompakt. Nach Satz 10.7 ist also für alle $t \in [0,1]$ der Operator $T(t) := 1_E + tK$ ein Fredholmoperator. Da die Abbildung $T(\cdot) : [0,1] \to \mathcal{L}(E)$ stetig ist und $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt nach Folgerung 10.13: $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T(1)) = \operatorname{ind}(T(0)) = \operatorname{ind}(1_E) = 0$. ☐

10.15. Satz. *Sei $K \in \mathcal{K}(E)$ und $T := 1_E - K$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \ge n_0$ gilt:*

$$\ker(T^n) = \ker(T^{n_0}), \qquad \operatorname{ran}(T^n) = \operatorname{ran}(T^{n_0}).$$

Beweis. Offensichtlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\ker(T^n) \subseteq \ker(T^{n+1}), \qquad \operatorname{ran}(T^n) \supseteq \operatorname{ran}(T^{n+1}).$$

Annahme: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$. Da $\ker(T^n)$ abgeschlossen ist, gibt es nach dem Lemma von Riesz 1.15 zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \ker(T^{n+1})$ mit $\|x_n\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(x_n, \ker(T^n)) = \inf\{\|x_n - x\|\,;\, x \in \ker(T^n)\} \ge \frac{1}{2}.$$

Wegen $Tx_m + x_n - Tx_n \in \ker(T^m)$ für alle $m > n$ folgt

$$\|Kx_m - Kx_n\| = \|x_m - (Tx_m + x_n - Tx_n)\| \ge \inf\{\|x_n - x\|\,;\, x \in \ker(T^m)\} \ge \frac{1}{2}$$

im Widerspruch dazu, daß die Folge $(Kx_n)_{n=1}^\infty$ wegen der Kompaktheit von K und der Beschränktheit der Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge besitzen muß. Die Annahme war also falsch. Es gibt daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\ker(T^{n_0}) = \ker(T^{n_0+1})$. Für $x \in \ker(T^{n_0+2})$ ist $Tx \in \ker(T^{n_0+1}) = \ker(T^{n_0})$ und somit $x \in \ker(T^{n_0+1}) = \ker(T^{n_0})$. Durch vollständige Induktion folgt $\ker(T^n) = \ker(T^{n_0})$ für alle $n \ge n_0$. Insbesondere gilt also für alle $n \ge n_0$: $\dim\ker(T^n) = \dim\ker(T^{n_0})$. Mit Folgerung 10.14 und Satz 10.8 erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 = n\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T^n) = \dim\ker(T^n) - \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T^n)$$

und daher für alle $n \ge n_0$:

$$\operatorname{codim}\operatorname{ran}(T^n) = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T^{n_0}) < \infty.$$

Hieraus folgt $\operatorname{ran}(T^n) = \operatorname{ran}(T^{n_0})$ für alle $n \ge n_0$. ☐

10.16. Lemma. *Sei X ein $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $T : X \to X$ eine lineare Abbildung, so daß für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq n_0$ gilt*

$$\ker(T^n) = \ker(T^{n_0}), \qquad \operatorname{ran}(T^n) = \operatorname{ran}(T^{n_0}). \tag{10.4}$$

Dann gilt

(a) $X = \ker(T^{n_0}) \oplus \operatorname{ran}(T^{n_0})$.
(b) $T(\ker(T^{n_0})) \subseteq \ker(T^{n_0})$ *und* $T(\operatorname{ran}(T^{n_0})) \subseteq \operatorname{ran}(T^{n_0})$.
(c) $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ *ist ein Isomorphismus von* $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ *auf sich.*

Beweis. (a) Ist $x \in \ker(T^{n_0}) \cap \operatorname{ran}(T^{n_0})$, so gibt es ein $y \in X$ mit $T^{n_0}y = x$. Wegen $0 = T^{n_0}x = T^{2n_0}y$ folgt $y \in \ker(T^{2n_0}) = \ker(T^{n_0})$ und daher $x = T^{n_0}y = 0$. Also ist $\ker(T^{n_0}) \cap \operatorname{ran}(T^{n_0}) = \{0\}$.

Zu zeigen ist noch $X = \ker(T^{n_0}) + \operatorname{ran}(T^{n_0})$. Sei also $x \in X$ beliebig. Wegen $\operatorname{ran}(T^{n_0}) = \operatorname{ran}(T^{2n_0})$ gibt es zu $y := T^{n_0}x$ ein $u \in X$ mit $y = T^{2n_0}u$. Wegen

$$T^{n_0}(x - T^{n_0}u) = T^{n_0}x - T^{2n_0}u = y - y = 0$$

folgt $x = (x - T^{n_0}u) + T^{n_0}u \in \ker(T^{n_0}) + \operatorname{ran}(T^{n_0})$.

(b) ist offensichtlich.

(c) Ist $x \in \ker(T) \cap \operatorname{ran}(T^{n_0})$, so gibt es ein $y \in X$ mit $T^{n_0}y = x$ und es folgt $0 = Tx = T^{n_0+1}y$, d.h. $y \in \ker(T^{n_0+1}) = \ker(T^{n_0})$ und somit $x = T^{n_0}y = 0$. Die lineare Abbildung $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ ist also injektiv.

Wegen $T(\operatorname{ran}(T^{n_0})) = \operatorname{ran}(T^{n_0+1}) = \operatorname{ran}(T^{n_0})$ ist $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ auch surjektiv. □

10.17. Lemma. *Ist $T \in \Phi(E)$ mit* (10.4)*, so ist die Zerlegung $E = \ker(T^{n_0}) \oplus \operatorname{ran}(T^{n_0})$ auch topologisch direkt. Die kanonische Projektion P von E auf $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ mit $\ker(P) = \ker(T^{n_0})$ ist also stetig. $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ ist dann ein topologischer Isomorphismus von $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ auf sich.*

Beweis. Nach dem Satz von der inversen Abbildung ist $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ als stetiger Isomorphismus von $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ auf sich auch ein topologischer Isomorphismus. Die Abbildung $P := (T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})})^{-1} \circ T^{n_0}$ ist also stetig von E auf $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ und erfüllt $P^2 = P$ und $\ker(P) = \ker(T^{n_0})$. □

10.18. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und sei $K \in \mathcal{K}(E)$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $T_\lambda := \lambda 1_E - K$. Dann gilt:*

(a) *Für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ist T_λ ein Fredholmoperator vom Index* 0*. Insbesondere ist T_λ genau dann injektiv, wenn T_l surjektiv ist.*
(b) *Zu jedem $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$\ker(T_\lambda^n) = \ker(T_\lambda^{n_0}) \quad \text{und } \operatorname{ran}(T_\lambda^n) = \operatorname{ran}(T_\lambda^{n_0}) \quad \text{für alle } n \geq n_0. \tag{10.5}$$

(c) $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(K) \setminus \{0\}$ *ist höchstens abzählbar mit höchstens* 0 *als Häufungspunkt und besteht nur aus Eigenwerten von K.*

Beweis. Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ist $T_\lambda = \lambda\big(1_E - \frac{1}{\lambda}K\big)$ und $\ker(T_\lambda^n) = \ker\big(\big(1_E - \frac{1}{\lambda}K\big)^n\big)$ sowie $\operatorname{ran}(T_\lambda^n) = \operatorname{ran}\big(\big(1_E - \frac{1}{\lambda}K\big)^n\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit K ist auch $\pm\frac{1}{\lambda}K$ ein kompakter Operator. (a) folgt also aus Folgerung 10.14 und (b) aus Satz 10.15.

Zu (c): Wegen (a) besteht $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(K) \setminus \{0\}$ nur aus Eigenwerten von K. Ist $0 \neq \lambda \in \sigma_{\mathcal{L}(E)}(K)$, so gibt es nach (b) ein n_0 mit (10.5). Nach Lemma 10.16 und Lemma 10.17 ist $E = \ker(T_\lambda^{n_0}) \oplus \operatorname{ran}(T_\lambda^{n_0})$, wobei die Zerlegung topologisch direkt ist und $T_\lambda|_{\operatorname{ran}(T_\lambda^{n_0})}$ ein topologischer Isomorphismus von $E_2 := \operatorname{ran}(T_\lambda^{n_0})$ auf sich ist. Insbesondere ist E_2 invariant unter T_λ also auch unter K und $\lambda \notin \sigma_{E_2}(K|_{E_2})$. Da $\sigma_{E_2}(K|_{E_2})$ kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(\lambda) \cap \sigma_{E_2}(K|_{E_2}) = \emptyset$. Da T_λ ein Fredholmoperator ist, ist $E_1 := \ker(T_\lambda^{n_0})$ ein endlich dimensionaler Unterraum von E, der nach Lemma 10.16 invariant ist unter T_λ also auch unter K. Da E_1 endlich dimensional ist, besteht $\sigma_{E_1}(K|_{E_1})$ nur aus endlich vielen Punkten. Insbesondere gibt es ein $\eta > 0$ mit $U_\eta(\lambda) \cap \sigma_{E_1}(K|_{E_1}) = \{\lambda\}$. Mit $\varepsilon := \min\{\delta, \eta\}$ folgt nach Aufgabe 10.1: $U_\varepsilon(\lambda) \cap \sigma_{\mathcal{L}(E)}(K) = \{\lambda\}$. Jeder Punkt $\lambda \in \sigma_{\mathcal{L}(E)}(K) \setminus \{0\}$ ist also ein isolierter Punkt des Spektrums. $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(K)$ kann daher höchstens 0 als Häufungspunkt haben. □

10.19. Satz. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume.*

(a) *Ist $T \in \Phi(E, F)$ und $K \in \mathcal{K}(E, F)$, so ist $T + K \in \Phi(E, F)$ und* $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$.

(b) *Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn es kompakte Operatoren $K_1 \in \mathcal{K}(E)$, $K_2 \in \mathcal{K}(F)$ und stetige lineare Operatoren $L, R \in \mathcal{L}(F, E)$ gibt mit*

$$LT = 1_E - K_1 , \qquad TR = 1_F - K_2 .$$

Beweis. (a) Nach Satz 10.10 und der daran anschließenden Folgerung gibt es $L_1, R_1 \in \Phi(F, E)$ und $A_1 \in \mathcal{F}(E)$, $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(R) = -\operatorname{ind}(T)$, $L_1T = 1_E - A_1$ und $TR_1 = 1_F - A_2$. Es folgt

$$L_1(T + K) = 1_F - A_2 + L_1K , \qquad (T + K)R_1 = 1_F - A_2 + KR_1 .$$

Da die Operatoren $K_1 := -A_1 + L_1K$ und $K_2 := -A_2 + KR_1$ kompakt sind, folgt $L_1(T + K) \in \Phi(E)$ und $(T + K)R_1 \in \Phi(F)$ sowie $\operatorname{ind}(L_1(T + K)) = \operatorname{ind}((T + K)R_1) = 0$ (nach Folgerung 10.14). Also gibt es (wiederum nach Satz 10.10) Operatoren $L_2 \in \Phi(E)$, $B_1 \in \mathcal{F}(E)$, $R_2 \in \Phi(F)$, $B_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit $\operatorname{ind}(L_2) = \operatorname{ind}(R_2) = 0$ und

$$L_2L_1(T + K) = 1_E - B_1 , \qquad (T + K)R_1R_2 = 1_F - B_2 .$$

Nach Satz 10.10 ist also $T+K \in \Phi(E, F)$ und mit Satz 10.8 in Verbindung mit Lemma 10.9 folgt

$$0 = \operatorname{ind}(L_2L_1(T + K) = \operatorname{ind}(L_2) + \operatorname{ind}(L_1) + \operatorname{ind}(T + K) = 0 - \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind}(T + K),$$

also $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$.

(b) "$\Longrightarrow$" folgt aus Satz 10.10 (da stetige lineare Operatoren von endlichem Rang insbesondere kompakte Operatoren sind).

"$\Longleftarrow$": Sind L, R, K_1, K_2 wie in (b), so ist $LT = 1_E - K_1 \in \Phi(E)$, $TR = 1_F - K_2 \in \Phi(F)$ nach Folgerung 10.14. Nach Satz 10.10 gibt es daher Operatoren $L_1 \in \mathcal{L}(E)$, $R_1 \in \mathcal{L}(F)$, $A_1 \in \mathcal{F}(E)$ und $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit

$$L_1LT = 1_E - A_1 , \qquad TRR_1 = 1_F - A_2 .$$

Nach Satz 10.10 folgt $T \in \Phi(E, F)$. □

10.20. Folgerung. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Genau dann ist ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ ein Fredholmoperator, wenn seine Restklasse $T+\mathcal{K}(E)$ in der Quotientenalgebra $\mathcal{Q}(E) := \mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ von $\mathcal{L}(E)$ nach dem abgeschlossenen zweiseitigen Ideal $\mathcal{K}(E)$ der kompakten Operatoren invertierbar ist.*

$\mathcal{Q}(E)$ nennt man auch die *Calkin–Algebra* von E. Versehen mit ihrer Quotientennorm ist $\mathcal{Q}(E)$ wieder eine Banachalgebra. Ist also E ein unendlichdimensionaler komplexer Banachraum (und daher $\mathcal{Q}(E) \neq \{0\}$), so ist für alle $T \in \mathcal{L}(E)$ das Spektrum

$$\sigma_e(T) := \sigma_{\mathcal{Q}(E)}(T + \mathcal{K}(E))$$

der Restklasse von T in $\mathcal{Q}(E)$ eine kompakte nicht leere Menge, welche offensichtlich in $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(T)$ enthalten ist. Man nennt $\sigma_e(T)$ das *wesentliche Spektrum* von T.

10.21. FOLGERUNG. *Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein unendlichdimensionaler komplexer Banachraum und* $T \in \mathcal{L}(E)$*. Dann ist* $\operatorname{ind}(\lambda - T)$ *auf jeder Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$ *konstant. Bezeichnet* Ω_0 *die unbeswchränkte Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$*, so sind alle Punkte aus* $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(T)G \cap \Omega_0$ *Eigenwerte von* T*.*

Übungsaufgaben zu Kapitel 10.

10.1. AUFGABE. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein komplexer Banachraum und $E = E_1 \oplus E_2$ mit abgeschlossenen Unterräumen E_1 und E_2 von E. Zeigen Sie: Ist $T \in \mathcal{L}(E)$ mit $T(E_j) \subseteq E_j$ für $j = 1, 2$, so ist $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(T) = \sigma_{\mathcal{L}(E_1)}(T|_{E_1}) \cup \sigma_{\mathcal{L}(E_2)}(T|_{E_2})$.

10.2. AUFGABE. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in \mathcal{F}(E, F)$ so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1', \ldots, x_n' \in E'$, $y_1, \ldots, y_n \in F$ mit

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j'(x) y_j \quad \text{für alle } x \in E.$$

(b) Ist $A \in \mathcal{F}(E, F)$, so ist $A' \in \mathcal{F}(F', E')$.

(c) Ist $T \in \Phi(E, F)$, so ist $T' \in \Phi(F', E')$ und $\operatorname{ind}(T') = -\operatorname{ind}(T)$.

10.3. AUFGABE. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C([0,1])$ und sei $h \in C([0,1] \times [0,1])$. Zeigen Sie: Der durch

$$(Tf)(t) := f^{(n+1)}(t) + \sum_{j=0}^{n} a_j(t) f^{(j)}(t) + \int_0^1 h(s,t) f^{(n+1)}(s)ds \quad (f \in C^{(n+1)}([0,1]),\, t \in [0,1])$$

definierte Operator $T : C^{(n+1)}([0,1]) \to C([0,1])$ ist ein Fredholmoperator. Berechnen Sie $\operatorname{ind}(T)$.

10.4. AUFGABE. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $T \in \mathcal{L}(E)$. Zeigen Sie: Ist $T^n \in \mathcal{K}(E)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lambda 1_E - T$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Fredholmoperator vom Index 0.

10.5. AUFGABE. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt *Riesz–Operator* falls die Restklasse $T + \mathcal{K}(E)$ von T in $\mathcal{Q}(E) = \mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ quasinilpotent ist.

(a) Zeigen Sie: $T \in \mathcal{L}(E)$ ist genau dann ein Riesz–Operator, wenn für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ der Operator $T_\lambda := \lambda 1_E - T$ ein Fredholmoperator vom Index 0 ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Riesz–Operators $T \in \mathcal{L}(E)$ an, der kein kompakter Operator ist.

KAPITEL 11

Lokalkonvexe Vektorräume

In einer Reihe von Situationen reicht der bisher verwendete Begriff des normierten Raums nicht aus. So läßt sich etwa der Begriff der punktweisen Konvergenz einer Folge von Funktionen auf einer nicht endlichen Menge nicht auf eine Konvergenz im Sinne einer Norm zurückführen. Insbesondere benötigen wir eine geeignete Topologie auf dem topologischen Dualraum eines normierten Raumes, für die der Konvergenzbegriff gerade der Begriff der punktweisen Konvergenz ist.

11.1. Definition. Eine Topologie τ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E (mit wie stets in dieser Vorlesung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), für die die Addition $+ : E \times E \to E$ und die Multiplikation mit Skalaren $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ (bezüglich der Produkttopologien auf $E \times E$ bzw. $\mathbb{K} \times E$) stetig sind heißt eine *Vektorraumtopologie* auf E. Ist E mit einer Vektorraumtopologie τ versehen, so nennen wir (E, τ) einen *topologischen Vektorraum.*

Eine bijektive lineare Homöomorphie $T : E_1 \to E_2$ zwischen zwei topologischen Vektorräumen $(E_1, \tau_1), (E_2, \tau_2)$ nennt man wieder einen *topologischen Isomorphismus*. Die Räume $(E_1, \tau_1), (E_2, \tau_2)$ heißen dann zu einander *topologisch isomorph.* Zueinander topologisch isomorphe topologische Vektorräume werden im Rahmen der Theorie der topologischen Vektorräume als nicht wesentlich verschieden angesehen.

Genau dann ist eine Topologie τ auf E eine Vektorraumtopologie, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(U1) Zu je zwei Punkten $x, y \in E$ und jeder Umgebung U von $x+y$ gibt es Umgebungen V von x und W von y mit $V + W \subseteq U$. (Dies ist äquivalent zur Stetigkeit der Addition).

(U2) Zu jedem $x \in E$, jedem $\lambda \in \mathbb{K}$ und jeder Umgebung U von λx gibt es eine Umgebung V von x und ein $\varepsilon > 0$ mit $\{\mu y\,;\, |\mu - \lambda| < \varepsilon, y \in V\} \subseteq U$. (Dies ist äquivalent zur Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren in allen Punkten $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$).

11.2. Bemerkungen. Sei (E, τ) ein topologischer Vektorraum.

(a) Für alle $y \in E$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ sind (wegen der Stetigkeit der Addition) die Translation

$$T_y : E \to E\,, \qquad x \mapsto x + y$$

und (wegen der Stetigkeit der Multiplikation) die Streckung

$$M_\lambda : E \to E\,, \qquad x \mapsto \lambda x$$

Homöomorphien. Insbesondere ist also M_λ ein topologischer Isomorphismus von (E, τ) auf sich.

(b) Zu jeder Nullumgebung U in E gibt es eine Nullumgebung V in E mit $V + V \subseteq U$.

Beweis. Zu (b): Wegen der Stetigkeit der Multiplikation in $(0, 0)$ gibt es nach (U1) zu U Nullumgebungen W_1, W_2 mit $W_1 + W_2 \subseteq U$. Mit W_1, W_2 ist auch $V := W_1 \cap W_2$ als endlicher Durchschnitt von Nullumgebungen wieder eine Nullumgebung. Diese erfüllt $V + V \subseteq W_1 + W_2 \subseteq U$. □

11.3. Definition. Eine Teilmenge M eines $\mathbb{K}$–Vektorraums E heißt

- *konvex*, falls gilt: $\forall x, y \in M\ \forall \alpha \in [0,1]$: $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$.
- *absolutkonvex*, falls gilt: $\forall x, y \in E\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $|\alpha| + |\beta| \le 1 \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in M$.
- *kreisförmig*, falls gilt: $\forall x \in M\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $|\alpha| \le 1 \Longrightarrow \alpha x \in M$.
- *absorbant*, falls $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nM$.

11.4. Lemma. *Sei K eine nicht leere Teilmenge eines $\mathbb{K}$–Vektorraums E.*

(a) *K ist genau dann absolutkonvex, wenn K konvex und kreisförmig ist.*

(b) *Ist K absolutkonvex und absorbant, so ist durch*

$$p_K(x) := \inf\{r > 0\,;\, x \in rK\}\,, \qquad (x \in E)$$

eine Halbnorm $p_K : E \to [0,\infty)$ gegeben. p_K heißt das Minkowski–Funktional zu K

(c) *Ist $p : E \to [0,\infty)$ eine Halbnorm auf E, so sind die Mengen*

$$B_p := \{x \in E\,;\, p(x) \le 1\} \qquad \textit{und} \qquad D_p := \{x \in E\,;\, p(x) < 1\}$$

absorbant und absolutkonvex und es gilt $p_{D_p} = p_{B_p} = p$.

(d) *Ist K wie in (a), so gilt $D_{p_K} \subseteq K \subseteq B_{p_K}$.*

Beweis. (a) rechnet man unmittelbar nach.

(b) Da K absorbant ist, gibt es zu jedem $x \in E$ ein $r > 0$ mit $x \in rK$. Also ist $p(x) \in [0,\infty)$. Da K absolutkonvex ist, ist $0 \in rK$ für alle $r > 0$ und somit $p(0) = 0$ sowie $p(0x) = p(0) = 0 = 0p(x)$.

Für alle $0 \ne \lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ gilt (da K nach (a) kreisförmig ist):

$$\begin{aligned} p_K(\lambda x) =& \inf\{r > 0\,;\, \lambda x \in rK\} = |\lambda| \inf\{s > 0\,;\, \lambda x \in |\lambda| sK\} \\ =& |\lambda| \inf\{s > 0\,;\, x \in s\frac{|\lambda|}{\lambda}K\} = |\lambda| \inf\{s > 0\,;\, x \in sK\} = |\lambda| p_K(x). \end{aligned}$$

Für alle $x, y \in E$ gilt wegen der Absolutkonvexität von K:

$$\begin{aligned} p_K(x+y) =& \inf\{r > 0\,;\, x + y \in rK\} \\ =& \inf\{s + t\,;\, s > 0, t > 0, x + y \in (s+t)K = sK + tK\} \\ \le& \inf\{s + t\,;\, s > 0, t > 0, x \in sK, y \in tK\} \\ =& \inf\{s\,;\, s > 0, t > 0, x \in sK\} + \inf\{t\,;\, t > 0, y \in tK\} = p_K(x) + p_K(y). \end{aligned}$$

p_K erfüllt also auch die Dreiecksungleichung.

(c) rechnet man unmittelbar nach und (d) ist offensichtlich. □

11.5. Bemerkung. Sei (E,τ) ein topologischer Vektorraum. Dann gilt:

(a) Jede Nullumgebung U in (E,τ) enthält eine kreisförmige Nullumgebung.

(b) Jede Nullumgebung U in (E,τ) ist absorbant.

(c) Ist $\mathfrak{U}(0)$ eine Nullumgebungsbasis von (E,τ), so ist $\mathfrak{U} := \{x + U\,;\, U \in \mathfrak{U}(0)\}$ eine Umgebungsbasis für τ.

Beweis. (a) Wegen der Stetigkeit der Multiplikation gibt es zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$W := \{\lambda x\,;\, |\lambda| \le \varepsilon\} \subseteq U.$$

W ist offensichtlich kreisförmig. Da mit V nach Bemerkung 11.2 auch $\varepsilon V \subseteq W$ eine Nullumgebung ist, ist W eine Nullumgebung in (E,τ).

(b) Sei U eine beliebige Nullumgebung in (E,τ) und sei $x \in E$ beliebig. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation in $(0,x)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\frac{1}{r}x \in U$ (und somit $x \in rU$) für alle $r > \frac{1}{\varepsilon}$.

(c) Dies gilt, da nach Bemerkung 11.2 für alle $x \in E$ die Translation $u \mapsto x + u$ eine Homöomorphie von (E,τ) auf sich ist. □

11.6. Definition. Ein topologischer Vektorraum (E, τ) heißt *lokalkonvex*, falls jeder Punkt $x \in E$ eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt. Die Topologie τ heißt dann eine *lokalkonvexe Topologie* auf E.

11.7. Lemma. *Für einen topologischen Vektorraum (E, τ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *(E, τ) ist ein lokalkonvexer Raum.*
(b) *(E, τ) hat eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen.*
(c) *(E, τ) hat eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen.*

Beweis. Die Implikationen (a)$\Longrightarrow$(b) und (c)$\Longrightarrow$(b) sind unmittelbar klar und wegen Bemerkung11.5 folgt (a) aus (b).

Hat (E, τ) eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen und ist U eine beliebige τ–Nullumgebung in E, so gibt es eine konvexe Nullumgebung $V \subseteq U$. Diese enthält nach Bemerkung11.5 eine kreisförmige Nullumgebung W. Die konvexe Hülle U_0 von W ist dann eine absolutkonvexe Nullumgebung mit $U_0 \subseteq V \subseteq U$. Also gilt (c). □

11.8. Lemma. *Seien (E, τ) und (F, σ) zwei topologische Vektorräume.*

(a) *Eine lineare Abbildung $S : E \to F$ ist genau dann auf (E, τ) stetig, wenn sie in 0 stetig ist.*
(b) *Eine Halbnorm $p : E \to [0, \infty)$ ist genau dann auf (E, τ) stetig, wenn sie in 0 stetig ist.*

Beweis. Ist S bzw. p auf ganz E bezüglich τ stetig, so natürlich auch in 0.

Ist S stetig in 0 und $x_0 \in E$ beliebig, so folgt wegen der Stetigkeit der Translationen $T_{-x_0} : u \mapsto u - x_0$ in (E, τ) und T_{Sx_0} in (F, σ) wegen der Linearität von S für alle $x \in E$:

$$Sx = S(x - x_0) + Sx_0 = (T_{Sx_0} \circ S \circ T_{-x_0})(x)$$

auch die Stetigkeit von $S = T_{Sx_0} \circ S \circ T_{-x_0}$ in x_0.

Ist p in 0 stetig und $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es eine Nullumgebung U in (E, τ) mit $p(u) < \varepsilon$ für alle $u \in U$. Ist $x_0 \in E$ beliebig, so gilt für alle x aus der τ–Umgebung $x_0 + U$ von x_0 mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) < \varepsilon$$

und damit die Stetigkeit von p in x_0. □

11.9. Lemma. *Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Raum und sei U eine absolutkonvexe τ–Nullumgebung in E. Dann gilt:*

(a) *Das Minkowski–Funktional p_U von U ist eine stetige Halbnorm auf E.*
(b) $\operatorname{int} U = D_{p_U} := \{x \in E\,;\, p_U(x) < 1\} \subseteq U \subseteq B_{p_U} := \{x \in E\,;\, p_U(x) \leq 1\}$.
(c) $\frac{1}{2}\overline{U} \subseteq \operatorname{int} U$.

Beweis. Nach Lemma 11.4 ist p_U eine Halbnorm auf E und es gelten die Inklusionen in (b).

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Multiplikation mit $\frac{\varepsilon}{2}$ nach Bemerkung 11.2 eine Homöomorphie von (E, τ) auf sich ist, ist $\frac{\varepsilon}{2}U$ eine τ–Nullumgebung. Für alle $x \in \frac{\varepsilon}{2}U$ folgt wegen $\frac{2}{\varepsilon}x \in U \subseteq B_{p_U}$:

$$p_U(x) = \frac{\varepsilon}{2} p_U\big(\frac{2}{\varepsilon}x\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Also ist p_U in 0 und damit auf (E, τ) stetig.

(b) Wegen der Stetigkeit von p_U ist D_{p_U} offen und B_{p_U} abgeschlossen. Somit folgt

$$D_{p_U} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B_{p_U}\,.$$

Ist $x \in \operatorname{int} U$, so gibt es wegen der Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren in $(1,x)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $(1+\varepsilon)x \in U$. Es folgt $p_U(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$ und daher $x \in D_{p_U U}$.

Ist $x \in B_{p_U}$ und V eine beliebige τ–Umgebung von x, so gibt es wegen der Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren in $(1,x)$ ein $\varepsilon \in (0,1)$, so daß für alle $r \in (1-\varepsilon, 1)$ gilt $rx \in V$. Wegen $p_U(x) \leq 1$ gibt es ein $s \in \left(1, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$ mit $x \in sU$. Es folgt $\frac{1}{s}x \in U \cap V$. Also gilt $x \in \overline{U}$.

(c) folgt in nahe liegender Weise aus (b) □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

11.10. Folgerung. *Jeder lokalkonvexe Raum besitzt eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen, absolutkonvexen Mengen und auch eine Umgebungsbasis aus offenen, absolutkonvexen Mengen.*

11.11. Definition. (a) Eine Familie $\mathfrak{V}$ von Nullumgebungen in einem topologischen Vektorraum (E,τ) heißt ein *Fundamentalsystem von Nullumgebungen* für τ, falls es zu jeder Nullumgebung U in (E,τ) ein $V \in \mathfrak{V}$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $\varepsilon V \subseteq U$. Insbesondere ist dann $\{\varepsilon V\,;\, V \in \mathfrak{V}, \varepsilon > 0\}$ eine Nullumgebungsbasis für τ.

(b) Eine Familie $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Halbnormen auf einem lokalkonvexen Raum (E,τ) heißt ein *Fundamentalsystem von Halbnormen* für τ, falls die Mengen $(D_{p_\alpha})_{\alpha \in A}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen für τ bilden.

Jede Nullumgebungsbasis in einem topologischen Vektorraum ist auch ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen.

In einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist $\{B_E\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen (aber keine Nullumgebungsbasis) und $\{\|\cdot\|\}$ ein Fundamentalsystem für die Normtopologie auf E.

11.12. Satz. *Sei (E,τ) ein lokalkonvexer Raum.*

(a) *(E,τ) besitzt ein Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen. Jedes Fundamentalsystem $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Halbnormen zu τ hat die folgende Eigenschaft:*

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad \exists \gamma \in A,\, C > 0 \quad \forall x \in E: \qquad \max\{p_\alpha(x), p_\beta(x)\} \leq C p_\gamma(x). \tag{11.1}$$

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *(E,τ) ist separiert.*

(ii) *(E,τ) hat eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{B}(0)$ mit*

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{B}(0)} U = \{0\}. \tag{11.2}$$

(iii) *Für jede Nullumgebungsbasis $\mathfrak{B}(0)$ in (E,τ) gilt* (11.2).

(iv) *(E,τ) besitzt ein Fundamentalsystem $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Halbnormen mit*

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \exists \alpha \in A: \qquad p_\alpha(x) > 0. \tag{11.3}$$

(v) *Für jedes Fundamentalsystem $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Halbnormen in (E,τ) gilt* (11.3).

Beweis. (a) Nach Folgerung 11.10 hat (E,τ) eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{B}(0)$ von absolutkonvexen Nullumgebungen. Die Familie $(p_U)_{U \in \mathfrak{B}(0)}$ ist dann ein Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen auf (E,τ).

Sei nun $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen für τ und seien $\alpha, \beta \in A$ beliebig. Dann gibt es ein $\gamma \in A$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon D_{p_\gamma} \subseteq D_{p_\alpha} \cap D_{p_\beta}$. Hieraus folgt

$$\forall x \in E: \max\{p_\alpha(x), p_\beta(x)\} \leq \frac{1}{\varepsilon} p_\gamma(x).$$

(b) Ist (E,τ) separiert, so ist $\bigcap_{U\in\mathfrak{U}} U = \{0\}$. Ist nun $\mathfrak{B}(0)$ eine beliebige Nullumgebungsbasis für τ, so gibt es zu jeder Nullumgebung U ein $V_U \in \mathfrak{B}(0)$ mit $V_U \subseteq U$. Es folgt

$$\{0\} \subseteq \bigcap_{V\in\mathfrak{B}(0)} V \subseteq \bigcap_{U\in\mathfrak{U}(0)} V_U \subseteq \bigcap_{U\in\mathfrak{U}(0)} U = \{0\}.$$

Also ist (11.2) erfüllt und es gilt (iii).

Offensichtlich folgt (ii) aus (iii).

Sei nun (ii) erfüllt und seien $x,y \in E$ beliebig mit $x \neq y$. Nach Voraussetzung gibt es ein $U \in \mathfrak{B}(0)$ mit $x - y \notin U$. Nach Bemerkung 11.2 gibt es eine Nullumgebung V mit $V + V \subseteq U$. Mit V ist auch $-V$ eine Nullumgebung. Es folgt (wegen $x - y \notin U$): $x - V \cap y + V = \emptyset$. τ ist also separiert.

Ist $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen für τ, so ist

$$\{\varepsilon D_{p_\alpha}\,;\, \varepsilon > 0, \alpha \in A\}$$

eine Nullumgebungsbasis für τ. Die Äquivalenz von (iv) und (v) zu (i) folgt nun leicht mit Hilfe der Äquivalenz der ersten drei Aussagen. □

Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß die Äquivalenz der ersten drei Aussagen in (b) in allgemeinen topologischen Vektorräumen gilt.

11.13. Definition. Ein Halbnormensystem $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$ auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E heißt *separierend*, falls zu jedem $x \neq 0$ aus E ein $\alpha \in A$ gibt mit $p_\alpha(x) > 0$. Dies ist offensichtlich äquivalent zu

$$\bigcap_{\alpha\in A} N_{p_\alpha} = \{0\} \qquad (\text{mit}\quad N_{p_\alpha} := \{u \in E\,;\, p_\alpha(x) = 0\}).$$

11.14. Lemma. *Sei $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein System von Halbnormen auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E. Dann sind*

$$\mathfrak{V}_D := \Big\{\rho \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}}\,;\, \rho > 0, k \in \mathbb{N}, \alpha_1,\ldots,\alpha_k \in A\Big\}$$

und

$$\mathfrak{V}_B := \Big\{\rho \bigcap_{j=1}^{k} B_{p_{\alpha_j}}\,;\, \rho > 0, k \in \mathbb{N}, \alpha_1,\ldots,\alpha_k \in A\Big\}$$

Nullumgebungsbasen einer lokalkonvexen Topologie $\tau_{\mathcal{P}}$ auf E, für die alle p_α, $\alpha \in A$, stetig sind. $\tau_{\mathcal{P}}$ ist die gröbste Topologie auf E mit dieser Eigenschaft.

Ist $\mathcal{P}$ ein separierendes Halbnormensystem, so ist $\tau_{\mathcal{P}}$ eine separierte Topologie.

Beweis. Sei $\tau_{\mathcal{P}}$ die Menge aller Teilmengen G von E, für die gilt:

$$\forall x \in G \quad \exists V \in \mathfrak{V}_D \quad (\text{ bzw. } \exists V \in \mathfrak{V}_B): \qquad x + V \subseteq G.$$

Man rechnet nach, daß $\tau_{\mathcal{P}}$ eine Topologie auf E definiert, für die sowohl

$$\{x + V\,;\, x \in E, V \in \mathfrak{V}_D\} \quad \text{als auch} \quad \{x + V\,;\, x \in E, V \in \mathfrak{V}_B\}$$

eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen ist. Wir zeigen, daß $\tau_{\mathcal{P}}$ eine Vektorraumtopologie ist.

Zu (U1): Seien $x,y \in E$ beliebig und sei U eine beliebige $\tau_{\mathcal{P}}$–Umgebung von $x + y$. Dann gibt es ein $\rho > 0$ und endlich viele $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in A$ mit

$$x + y + \rho \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq V.$$

Wegen

$$\Big(x + \frac{\rho}{2}\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}}\Big) + \Big(y + \frac{\rho}{2}\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}}\Big) \subseteq x + y + \rho\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq V$$

ist also (U1) erfüllt.

Zu (U2): Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in E$ beliebig und sei U eine beliebige $\tau_{\mathcal{P}}$–Umgebung von λx. Dann gibt es ein $\rho > 0$ und endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ mit

$$\lambda x + \rho\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq V.$$

Dann gilt für alle $\mu \in \mathbb{K}$ mit

$$|\lambda - \mu| < \varepsilon := \frac{\rho}{2\max_{1\le j\le k} p_{\alpha_j}(x) + \rho}$$

und alle

$$y \in x + \frac{\rho}{2(|\lambda|+1)}\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}}$$

es ist $\mu y = \lambda x + (\mu - \lambda)y + \lambda(y - x)$ enthalten in

$$\lambda x + \varepsilon\big(\max_{1\le j\le k} p_{\alpha_j}(x) + \rho/2\big)\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} + \frac{|\lambda|\rho}{2(|\lambda|+1)}\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq \lambda x + \rho\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq V.$$

Also ist auch (U2) erfüllt und $\tau_{\mathcal{P}}$ ist eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie. Der Zusatz ist klar nach Satz 11.12. □

11.15. Definition. Eine teilweise geordnete Menge $(A, \le)$ heißt (nach rechts) *gerichtet* oder (rechts) *filtrierend*, falls jede endliche Teilmenge von A eine obere Schranke in A besitzt, d.h. wenn zu je endlich vielen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ ein $\beta \in A$ existiert mit $\alpha_j \le \beta$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Eine Teilmenge B einer gerichteten Menge $(A, \le)$ heißt

- *residual*, falls ein $\alpha_0 \in A$ existiert mit $\{\alpha \in A\,;\, \alpha_0 \le \alpha\} \subseteq B$.
- *konfinal*, falls es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\beta \in B$ gibt mit $\alpha \le \beta$.

Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, A eine gerichtete Indexmenge, in einem topologischen Raum (X, τ) heißt ein *Netz* oder eine *verallgemeinerte Folge* oder *Moore–Smith–Folge*.

Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in einem topologischen Raum (X, τ) *konvergiert gegen ein Element* $y \in X$, falls für jede Umgebung U von y die Menge $A_U := \{\alpha \in A\,;\, x_\alpha \in U\}$ residual in A ist, d.h. falls es zu jeder Umgebung U von y ein $\alpha_0 \in A$ gibt mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \ge \alpha_0$ aus A. Ist die Topologie τ separiert (d.h. je zwei verschiedene Punkte besitzen disjunkte Umgebungen), so ist der Grenzwert y hierdurch eindeutig bestimmt und wir schreiben $y = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$ oder $x_\alpha \to y$.

Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in einem topologischen Vektorraum (E, τ) heißt ein *Cauchy-Netz*, falls es zu jeder Nullumgebung U in (E, τ) ein $\alpha_0 \in A$ gibt mit $x_\alpha - x_\beta \in U$ für alle $\alpha, \beta \ge \alpha_0$.

Ein topologischer Vektorraum (E, τ) heißt

- *vollständig*, falls in (E, τ) jedes Cauchy–Netz konvergent ist.
- *folgenvollständig*, falls in (E, τ) jede Cauchyfolge konvergent ist.
- *metrisierbar*, falls es eine Metrik d auf E gibt, so daß die durch d gegebene Topologie τ_d mit τ übereinstimmt.

Übungsaufgaben zu Kapitel 11.

11.1. Aufgabe. Zeigen Sie, daß ein metrisierbarer topologischer Vektorraum genau dann vollständig ist, wenn er folgenvollständig ist.

11.2. Aufgabe. Zeigen Sie, daß für einen lokalkonvexen Hausdorffraum (E, τ) die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) (E, τ) ist metrisierbar.
(b) (E, τ) besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis.
(c) (E, τ) besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen.
(d) (E, τ) besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus absolutkonvexen Mengen mit $U_{n+1} \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(e) τ wird durch ein abzählbares separierendes Halbnormensystem $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}: \qquad q_n(x) \leq q_{n+1}(x).$$

(f) τ wird durch ein abzählbares separierendes Halbnormensystem gegeben.

KAPITEL 12

Schwache Topologien

12.1. Definition. Seien E, F zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

(a) Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times F \to \mathbb{K}$ heißt *Bilinearform*, falls für alle $x \in E$ und alle $y \in F$ die Abbildungen

$$\begin{array}{llll} f_x : F \to \mathbb{K} & \text{mit} \quad f_x(v) := \langle x, v\rangle \text{ für} & v \in F & \text{und} \\ g_y : E \to \mathbb{K} & \text{mit} \quad g_y(u) := \langle u, y\rangle \text{ für} & u \in E & \end{array}$$

linear sind.

(b) Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Bilinearform auf $E \times F$. Das Tripel $(E, F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt *Dualsystem* und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine *Dualität zwischen E und F*, falls gilt:
(S1) $\forall\ 0 \neq x \in E\ \exists\ y \in F : \langle x, y\rangle \neq 0$.
(S2) $\forall\ 0 \neq y \in F\ \exists\ x \in E : \langle x, y\rangle \neq 0$.
Statt $(E, F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ schreiben wir auch kürzer $\langle E, F\rangle$.

12.2. Beispiele. (a) Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $E^{\#}$ der Raum aller $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$. Dann ist $\langle E, E^{\#}\rangle$ mit $\langle x, f\rangle := f(x)$ für $x \in E,\ f \in E^{\#}$ ein Dualsystem.

(b) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und E' der Raum aller bzgl. der gegebenen Norm $\|\cdot\|$ auf E stetigen $\mathbb{K}$–linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$. (E' ist ein Untervektorraum von $E^{\#}$). Dann ist $\langle E, E'\rangle$ mit $\langle x, f\rangle := f(x)$ für $x \in E$ und $f \in E'$ ein Dualsystem.

(c) Sei $E := C([0,1], \mathbb{K})$. Dann ist $\langle E, E\rangle$ mit $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ für $f, g \in C([0,1], \mathbb{K})$ ein Dualsystem.

Der Beweis von (a) ist klar, ebenso die Bilinearität in (b) und (c). In der Situation (b) ist (S2) trivialerweise erfüllt. Die Gültigkeit von (S1) folgt aus dem Satz von Hahn–Banach. Der Nachweis, daß in (c) die Bedingungen (S1) und (S2) erfüllt sind, wird in den Übungen bewiesen.

12.3. Bemerkung. Ist $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem, so auch $[F, E]$ mit $[f, e] := \langle e, f\rangle$ für alle $e \in E, f \in F$.

12.4. Definition. Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem. Die *schwache Topologie* $\sigma(E, F)$ (bzw. $\sigma(F, E)$) ist die gröbste Topologie auf E (bzw. auf F), für die alle Linearformen $g_y = \langle\cdot, y\rangle,\ y \in F$, (bzw. $f_x = \langle x, \cdot\rangle, x \in E$) stetig sind. D.h. also: $\sigma(E, F)$ ist die Initialtopologie auf E bzgl. $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|}, g_y)\,(y \in F)$ und $\sigma(F, E)$ ist die Initialtopologie auf F bzgl. $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|}, f_x)\,(x \in E)$, wobei $\tau_{|\cdot|}$ die durch den Absolutbetrag auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gegebene Topologie sei.

12.5. Bemerkungen. Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem.

(a) Man überlegt sich leicht (etwa mit Satz 3.7 aus [**2**], daß eine Menge $\Omega \subseteq E$ genau dann bezüglich $\sigma(E, F)$ offen ist, wenn es zu jedem $x \in \Omega$ endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in F$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$U(x; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) := \{y \in E\,;\, |\langle x, f_j\rangle - \langle y, f_j\rangle| < \varepsilon\} = \{y \in E\,;\, |\langle x - y, f_j\rangle| < \varepsilon\} \subseteq \Omega\,.$$

Eine Menge $U \subseteq E$ ist genau dann eine $\sigma(E,F)$–Umgebung eines Punktes $x_0 \in E$, wenn es endlich viele $f_1, \dots, f_n \in F$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$U(x; f_1, \dots, f_n, \varepsilon) \subseteq U.$$

(b) Die Topologien $\sigma(E,F)$ und $\sigma(F,E)$ sind separiert.

(c) Ist F_0 ein Untervektorraum von F, so daß auch $(E, F_0, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ noch ein Dualsystem ist, so ist $\sigma(E, F_0) \subseteq \sigma(E,F)$.

Beweis. Zu (b): Sind $x_1, x_2 \in E$ mit $x_1 \neq x_2$, so gibt es nach (S1) ein $f \in F$ mit $d := |\langle x_1 - x_2, f\rangle| > 0$. Dann sind $U(x_1; f, d/3)$ und $U(x_2; f, d/3)$ zueinander disjunkte $\sigma(E,F)$–Umgebungen von x_1 bzw. x_2.

(c) folgt unmittelbar aus der Definition der Initialtopologie. □

12.6. Definition. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sei $\langle E, E'\rangle$ das Dualsystem aus Beispiel 12.2. Dann nennt man $\sigma(E,E')$ die *schwache Topologie* auf E und $\sigma(E',E)$ die *schwach***–Topologie* auf E'.

12.7. Bemerkungen. Auf E' hat man also neben der Normtopologie noch die schwache Topologie $\sigma(E', E'')$ und die schwach*–Topologie $\sigma(E',E)$ zur Verfügung.

(a) Für alle $x \in E$ ist durch

$$J_E(x) : E' \to \mathbb{K}\,, \quad x' \mapsto x'(x) = [x, x']$$

ein lineares Funktional definiert. Nach einer Folgerung aus dem Satz von Hahn–Banach ist hierdurch eine isometrische lineare Einbettung $J_E : E \to E''$ gegeben. Wegen $\langle x', J_E(x)\rangle = J_E(x)(x') = x'(x) = [x, x']$ für alle $x \in E, x' \in E'$ stimmen also die Topologien $\sigma(E', J_E(E))$ und die schwach*–Topologie $\sigma(E',E)$ überein. Mit Bemerkung 12.5 (c) und aus der Definition der schwachen Topologie folgt also $\sigma(E',E) \subseteq \sigma(E',E'') \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$, wobei $\tau_{\|\cdot\|}$ die Normtopologie auf E' bezeichnet.

(b) Ist E reflexiv, d.h. gilt $J_E(E) = E''$, so ist $J_E : E \to E''$ nicht nur eine bijektive Isometrie sondern auch eine Homöomorphie von $(E, \sigma(E',E))$ auf $(E'', \sigma(E',E''))$.

12.8. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein unendlich dimensionaler normierter Raum. Dann gilt:*

(a) *Die schwache Topologie $\sigma(E,E')$ ist echt gröber auf E als die durch die Norm $\|\cdot\|_E$ gegebene Topologie $\tau(E)$.*

(b) *$\dim E' = \infty$ und die schwach*–Topologie $\sigma(E',E)$ auf E' ist echt gröber als die durch die Norm $\|\cdot\|_{E'}$ auf E' gegebene Topologie $\tau(E')$.*

Beweis. (a) Nach Definition der schwachen Topologie ist $\sigma(E,E')$ ist gröber als $\tau(E)$, d.h. es ist $\sigma(E,E') \subseteq \tau(E)$.

Annahme: $\tau(E) \subseteq \sigma(E,E')$. Da die offene Einheitskugel $U := \{x \in E\,;\, \|x\|_E < 1\}$ eine $\tau(E)$–Nullumgebung, also nach Annahme auch eine $\sigma(E,E')$–Nullumgebung ist, gibt es nach Bemerkung 12.5 endlich viele $x'_1, \dots, x'_n \in E'$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U(0; x'_1, \dots, x'_n, \varepsilon) := \{x \in E\,;\, |x'_j(x)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \dots, n\} \subseteq U.$$

Insbesondere folgt

$$Y := \bigcap_{j=1}^{n} \ker x'_j \subseteq U(0; x'_1, \dots, x'_n, \varepsilon) \subseteq U.$$

Y ist ein Untervektorraum der Kodimension $\leq n$ und daher wegen $\dim E = \infty$ unendlich dimensional. Sei nun $y \in Y$ beliebig. Dann folgt $ry \in Y \subseteq U$ und damit $\|ry\|_E < 1$ für alle $r > 0$. Dies ist nur möglich, wenn $y = 0$ ist. Es folgt $Y = \{0\}$ im Widerspruch zu $\dim Y = \infty$. Also muß $\sigma(E,E') \subsetneq \tau(E)$ gelten.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da E unendlich dimensional ist, gibt es linear unabhängige Vektoren $e_1, \dots, e_n \in E$. Für $j = 1, \dots, n$ sei $F_j := \mathrm{LH}\,\{e_k\,;\, j \neq k \in \{1, \dots, n\}\}$. Als endlich dimensionaler Untervektorraum ist F_j abgeschlossen und es gilt $e_j \notin F_j$. Nach der Folgerung 6.7 aus dem Satz von Hahn–Banach gibt es also $e'_j \in E'$ mit $e'_j(e_j) = 1$ und $e'_j(e_k) = 0$ für $j \neq k \in \{1, \ldots, n\}$, $j = 1, \ldots, n$. Die so erhaltenen $e'_1, \ldots, e'_n$ sind linear unabhängig, denn aus $\sum_{j=1}^n \alpha_j e'_j = 0$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ folgt $0 = \Big(\sum_{j=1}^n \alpha_j e'_j\Big)(e_k) = \alpha_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Also ist $\dim E' \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Bemerkung 12.7 (a) ist $\sigma(E', E) \subseteq \tau(E')$. Wie im Beweis zu (a) zeigt man nun, daß diese Inklusion echt ist. □

12.9. Definition. Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem. Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt ein *Cauchy–Netz*, falls es zu jeder $\sigma(E, F)$–Nullumgebung U in E ein $\alpha_0 \in A$ gibt, so daß für alle $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ gilt: $x_\alpha - x_\beta \in U$. Da jede $\sigma(E, F)$–Nullumgebung U in E eine Nullumgebung der Form

$$U(0; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{x \in E\,;\, |\langle x, f_j \rangle| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

mit endlich vielen $f_1, \ldots, f_n \in F$ und einem $\varepsilon > 0$ enthält, ist dies äquivalent zu

$$\forall f \in F, \varepsilon > 0\, \exists \alpha_0 \in A\, \forall \alpha, \beta \geq \alpha_0 : \quad |\langle x_\alpha - x_\beta, f \rangle| < \varepsilon\,.$$

Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in E heißt $\sigma(E, F)$*–konvergent* gegen ein $x_0 \in E$, falls für jede $\sigma(E, F)$–Nullumgebung U in E ein $\alpha_0 \in A$ existiert, so daß $x_\alpha - x_0 \in U$ für alle $\alpha \geq \alpha_0$ aus A gilt. Wie oben sieht man, daß dies äquivalent ist zu

$$\forall f \in F, \varepsilon > 0\, \exists \alpha_0 \in A\, \forall \alpha \geq \alpha_0 : \quad |\langle x_\alpha - x_0, f \rangle| < \varepsilon\,.$$

Wir schreiben dann $x_\alpha \to x_0$ bezüglich $\sigma(E, F)$ oder $x_0 = \sigma(E, F)\text{-}\lim_\alpha x_a$. Der $\sigma(E, F)$–Grenzwert ist hierdurch eindeutig bestimmt. Gilt nämlich $x_\alpha \to x_0$ und $x_\alpha \to x_1$ bezüglich $\sigma(E, F)$ und ist $f \in F$ beliebig, so gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ zwei Elemente $\alpha_0, \alpha_1 \in A$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_j$ gilt $|\langle x_\alpha - x_j, f \rangle| < \varepsilon/2$, $j = 0, 1$. Da die Indexmenge A des Netzes $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ gerichtet ist, gibt es zu α_0 und α_1 ein $\alpha_2 \in A$ mit $\alpha_0 \leq \alpha_2$ und $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Es folgt

$$|\langle x_1 - x_0, f \rangle| \leq |\langle x_1 - x_{\alpha_2}, f \rangle - \langle x_0 - x_{\alpha_2}, f \rangle| \leq |\langle x_1 - x_{\alpha_2}, f \rangle| + |\langle x_0 - x_{\alpha_2}, f \rangle| < \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ hierbei beliebig ist, muß $\langle x_1 - x_0, f \rangle = 0$ für alle $f \in F$ gelten. Wegen (S1) folgt hieraus $x_0 = x_1$.

12.10. Satz von Banach–Alaoglu. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. Dann ist die Einheitskugel $B_{E'}$ des topologischen Dualraums E' schwach***–kompakt.*

Beweis. Wir versehen $\mathbb{K}^E$ mit der Produkttopologie τ (vergl. Grundlagen aus der mengentheoretischen Topologie). Dies ist die gröbste Topologie auf $\mathbb{K}^E$, so daß für alle $x \in E$ die Projektionen auf die x–Komponenten

$$\pi_x : \mathbb{K}^E \to \mathbb{K}\,, \quad \lambda = (\lambda_u)_{u \in E} \mapsto \pi_x(\lambda) := \lambda_x$$

stetig sind. Man überlegt sich, daß eine Menge $V \subseteq \mathbb{K}^E$ genau dann eine τ–Umgebung eines Punktes $\lambda = (\lambda_x)_{x \in E} \in \mathbb{K}^E$ ist, wenn es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in E$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$V(\lambda; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) := \{\mu = (\mu_x)_{x \in E} \in \mathbb{K}^E\,;\, |\lambda_{x_j} - \mu_{x_j}| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq V\,.$$

Wir definieren $\phi : E' \to \mathbb{K}^E$ durch $\phi(x') := (x'(x))_{x \in E}$ für alle $x' \in E'$. Für alle $x' \in E$, je endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\phi(U(x'; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)) =& \phi(\{y' \in E'\,;\, |x'(x_j) - y'(x_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}) \\ =& \phi(E') \cap V(\phi(x'); x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß ϕ eine Homöomorphie von $(E', \sigma(E', E))$ auf $\phi(E')$ versehen mit der von τ induzierten Relativtopologie τ_0 ist.

Da alle Projektionen π_u, $u \in E$, stetig sind, ist

$$\begin{aligned} F :=& \{\lambda \in \mathbb{K}^E\,;\,\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}\,\forall x,y \in E: \quad \alpha\pi_x(\lambda) + \beta\pi_y(\lambda) - \pi_{\alpha x+\beta y}(\lambda) = 0\} \\ =& \{(f(x))_{x\in E}\,;\, f \in E^{\#}\} \end{aligned}$$

als Durchschnitt der Urbilder der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter den stetigen Abbildungen $\alpha\pi_x + \beta\pi_y - \pi_{\alpha x+\beta y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}\,, x, y \in E$, τ–abgeschlossen. Offensichtlich gilt $\phi(E') \subseteq F$.

Für alle $x \in E$ ist $K_x := \{\alpha \in \mathbb{K}\,;\, |\alpha| \leq \|x\|_E\}$ kompakt in $\mathbb{K}$. Nach dem Satz von Tychonoff (siehe z.B. Satz 4.13 in [**2**] ist also $K := \prod_{x\in E} K_x$ versehen mit der Produkttopologie kompakt. Die Produkttopologie auf K stimmt mit der von τ auf K induzierten Relativtopologie überein. Daher ist K auch τ–kompakt. Da F bzgl. τ abgeschlossen ist, folgt auch die τ–Kompaktheit von $K_0 := K \cap F$. Offensichtlich ist

$$K_0 = \{(f(x))_{x\in E}\,;\, f \in E^{\#},\, |f(x)| \leq \|x\|_E \text{ für alle } x \in E\} = \phi(B_{E'})\,.$$

Da $\phi : (E', \sigma(E')) \to (\phi(E'), \tau_0)$ eine Homöomorphie ist, ist $B_{E'} = \phi^{-1}(K_0)$ $\sigma(E', E)$–kompakt. □

12.11. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein separabler normierter Raum. Dann gibt es eine Metrik d auf der Einheitskugel $B_{E'}$ des topologischen Dualraums E', so daß die durch d gegebene Topologie auf $B_{E'}$ mit der durch die schwach*–Topologie induzierten Relativtopologie übereinstimmt. $(B_{E'}, d)$ ist also ein kompakter metrischer Raum. Insbesondere ist $B_{E'}$ schwach*–folgenkompakt, d.h. jede Folge aus $B_{E'}$ besitzt eine schwach*–konvergente Teilfolge.*

Beweis. Da $(E, \|\cdot\|_E)$ ein separabler normierter Raum ist, gibt es eine abzählbare normdichte Teilmenge $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ in E. Wir definieren eine Abbildung $d' : E' \times E' \to [0, \infty)$ durch

$$d'(x', y') := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{1 + |x'(x_n) - y'(x_n)|} \quad \text{für alle } x', y' \in E'.$$

Offensichtlich gilt $d'(x', y') = d'(y', x')$ für alle $x', y' \in E'$. Die Dreiecksungleichung rechnet man in der üblichen Weise nach. Sind $x', y' \in E'$ mit $d'(x', y') = 0$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|x'(x_n) - y'(x_n)| = 0$. Da $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in E ist und das lineare Funktional $x' - y'$ stetig ist, folgt $x' - y' = 0$, d.h. $x' = y'$. Damit ist gezeigt, daß $d' : E' \times E' \to [0, \infty)$ eine Metrik auf E' ist. Wir zeigen die Stetigkeit der Identität auf E' als Abbildung von $(E', \sigma(E', E))$ nach (E', d'). Sei dazu $x' \in E'$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Für alle $y' \in U(x'; x_1, \ldots, x_m, \varepsilon/2)$ folgt

$$\begin{aligned} d'(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{1 + |x'(x_n) - y'(x_n)|} &\leq \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{1 + |x'(x_n) - y'(x_n)|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} < \\ &< \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Also ist $U(x'; x_1, \ldots, x_m, \varepsilon/2) \subseteq U_\varepsilon^{d'}(x')$ und die Stetigkeit von id:$(E', \sigma(E', E)) \to (E', d')$ ist gezeigt. Die auf $B_{E'}$ von der schwach*–Topologie induzierte Topologie ist also feiner als die durch die Metrik $d := d'|_{B_{E'} \times B_{E'}}$ definierte Topologie. Da $B_{E'}$ nach dem Satz von Banach–Alaoglu schwach*–kompakt ist, müssen (nach Folgerung 4.10 aus [**2**]) die beiden Topologien übereinstimmen und es folgt die Behauptung. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 12.

12.1. Aufgabe. Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt mit $\emptyset \neq K = \overline{\operatorname{int}(K)}$ und sei $E := C(K, \mathbb{K})$. Zeigen Sie: Durch

$$\langle f, g \rangle := \int_K f(x)g(x)d\lambda_N(x) \qquad (f, g \in E)$$

wird $\langle E, E \rangle$ zu einem Dualsystem. Hierbei sei λ_N das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^N$. Kann man hierbei die Voraussetzung $\emptyset \neq K = \overline{\operatorname{int}(K)}$ ersetzen durch die Forderung $\lambda_N(K) \neq 0$?

12.2. Aufgabe. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue–meßbar mit $\lambda_N(\Omega) \neq 0$. $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ sei die Menge aller auf Ω Lebesgue–meßbaren $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen f, für die eine Lebesge–Nullmenge $E \subset \Omega$ existiert mit $\sup_{x \in \Omega \setminus E} |f(x)| < \infty$. Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ definieren wir das *wesentliche Supremum von f auf* Ω durch

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf \big\{ \alpha > 0\,;\, \lambda_N(\{x \in \Omega\,;\, |f(x)| > \alpha\}) = 0 \big\}$$

Sei weiter $\mathcal{N}(\Omega)$ die Menge aller Lebesgue–Nullfunktionen, d.h. die Menge aller Lebesgue–meßbaren Funktionen f, für die $f \equiv 0$ auf $\Omega \setminus E$ für eine Lebesge–Nullmenge $E \subset \Omega$ gilt. Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|$ ist eine submultiplikative Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit

$$\mathcal{N}(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\,;\, \|f\|_\infty = 0\}.$$

(b) $L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$ wird zu einer Banachalgebra mit der durch

$$\|f + \mathcal{N}(\Omega)\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \qquad (f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega))$$

definierten Norm.

(c) $\langle L^1(\Omega), L^\infty(\Omega) \rangle$ wird zu einem Dualsystem durch

$$\langle f + \mathcal{N}(\Omega), g + \mathcal{N}(\Omega) \rangle := \int_\Omega f(x)g(x)d\lambda_n(x) \qquad \big(f \in \mathcal{L}^1(\Omega),\, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\big).$$

12.3. Aufgabe. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, sei $\mathcal{N} := \mathcal{N}(G)$ und sei

$$H^\infty(G) := \mathcal{O}(G) \cap L^\infty(G)$$

die Menge der beschränkten holomorphen Funktionen auf G. Zeigen Sie

(a) Durch $h \mapsto h + \mathcal{N}$ ist eine Einbettung von $H^\infty(G)$ in $L^\infty(G)$ gegeben mit

$$\|h + \mathcal{N}\|_\infty = \sup_{z \in G} |h(z)|.$$

Wir identifizieren $H^\infty(G)$ mit dem Bild dieser Einbettung.

(b) Mit der Identifikation aus (a) ist $H^\infty(G)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(G)$.

(c) Für alle $z \in G$ ist

$$\delta_z : H^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_z(h) := h(z)$$

ein $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$-stetiges Funktional auf $H^\infty(G)$.

(d) $H^\infty(G)$ ist $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$-abgeschlossen in $L^\infty(G)$.

KAPITEL 13

Gelfandtheorie in kommutativen Banachalgebren

In diesem Abschnitt sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ stets eine Banachalgebra über $\mathbb{C}$. Besitzt sie ein Einselement 1, so sei $\|1\| = 1$, was wie wir wissen, immer durch den Übergang zu einer äquivalenten Algebranorm erreicht werden kann.

13.1. Definition. Ein *multiplikatives lineares Funktional* φ auf $\mathfrak{R}$ ist ein nicht trivialer Algebrenhomomorphismus $\varphi : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$, d.h. eine nicht identisch verschwindendes lineares Funktional φ mit $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in \mathfrak{R}$. Wir schreiben $\Delta(\mathfrak{R})$ für die Menge aller multiplikativen linearen Funktionale auf $\mathfrak{R}$ und setzen $\Delta_\infty(\mathfrak{R}) := \Delta(\mathfrak{R}) \cup \{\varphi_\infty\}$ mit $\varphi_\infty \equiv 0$ auf $\mathfrak{R}$.

13.2. Beispiele. (a) Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum. Dann ist für alle $t \in K$ das *Dirac–Funktional* $\delta_t : C(K) \to \mathbb{C}$ mit $\delta_t(f) := f(t)$ ein stetiges multiplikatives lineares Funktional auf $C(K)$. Es gilt also $\{\delta_t\,;\, t \in K\} \subseteq \Delta(C(K))$.

(b) Sei W die Menge aller derjenigen Funktionen f auf $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$, die eine Fourierreihendarstellung haben

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad \|f\|_W := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty\,.$$

Offensichtlich ist $(W, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, der isometrisch isomorph ist zu $\ell^1(\mathbb{Z})$. Da die Fourierreihen aller Funktionen aus W gleichmäßig konvergieren, ist $W \subset C(\mathbb{T})$. Sind $f, g \in W$ gegeben mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\,,\; g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

mit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, so ist

$$(fg)(z) := f(z)g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad \text{mit } c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\|fg\|_W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n} \Big| \le \\ &\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \cdot |b_{k-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_{k-n}| = \|f\|_W \|g\|_W < \infty\end{aligned}$$

ist $(W, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit dem Einselement $1 \equiv z^0$. Da W eine Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$ ist, sind die Punktevaluationen $\delta_z, z \in \mathbb{T}$, wieder multiplikative lineare Funktionale auf W. Man nennt W die *Wiener–Algebra*.

Multiplikative lineare Funktionale sind automatisch stetig. Es gilt:

13.3. Satz. $\Delta(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}'$ *und* $\|\varphi\| \le 1$ *für alle* $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$. *Besitzt* $\mathfrak{R}$ *ein Einselement* 1, *so gilt für alle* $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$, *es ist* $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$.

Beweis. Sei $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ beliebig. Annahme: φ ist unstetig oder es ist $\|\varphi\| > 1$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{R}$ mit $\|x\| < 1$ und $\varphi(x) = 1$. Der Grenzwert $y := \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ existiert dann in $\mathfrak{R}$, da die Reihe wegen $\|x\| < 1$ absolut konvergiert, und es gilt $x + xy = y$. Wenden wir hierauf φ an, so folgt: $\varphi(x) + \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)$, was wegen $\varphi(x) = 1$ zu dem Widerspruch $1 + \varphi(y) = \varphi(y)$ führt. Also muß doch $\varphi \in \mathfrak{R}'$ und $\|\varphi\| \leq 1$ gelten. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so folgt für alle $x \in \mathfrak{R}$: Es ist $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi(x)\varphi(1)$. Da φ nicht identisch verschwindet, folgt $\varphi(1) = 1$ und damit wegen $\|1\| = 1$ auch $\|\varphi\| = 1$. □

13.4. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement 1 über $\mathbb{C}$.*

(a) *Für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ ist $\ker\varphi$ ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$ und $\operatorname{codim}\ker\varphi = 1$. Ferner $\mathfrak{R} = \ker\varphi \oplus \mathbb{C} \cdot 1$.*

(b) *Ist M ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$, so gibt es genau ein $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ mit $\ker\varphi = M$.*

Die Zuordnung $\varphi \mapsto \ker\varphi$ definiert also eine Bijektion von $\Delta(\mathfrak{R})$ auf die Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ aller maximale Ideale in $\mathfrak{R}$.

Beweis. (a) Sei $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ beliebig. Nach Lemma 0.13 ist $\ker\varphi$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$. Dieses muß wegen der Stetigkeit von φ (vergl. Satz 13.3) abgeschlossen sein. Da φ nicht identisch verschwindet ist $\ker\varphi \neq \mathfrak{R}$ und $\operatorname{ran}\varphi = \mathbb{C}$. Also folgt $\operatorname{codim}\ker\varphi = \dim \mathfrak{R}/\ker\varphi = \dim\operatorname{ran}\varphi = 1$. Insbesondere muß $\ker\varphi$ ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$ sein, da für jedes $\ker\varphi$ echt enthaltende Ideal J in $\mathfrak{R}$ folgt $0 \leq \dim\mathfrak{R}/J < 1$ und somit $J = \mathfrak{R}$.

Es ist $\mathfrak{R} = \ker\varphi \oplus \mathbb{C} \cdot 1$, denn für alle $x \in \mathfrak{R}$ ist $x - \varphi(x) \cdot 1 \in \ker\varphi$.

(b) Sei $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ beliebig. Nach Lemma 0.17 ist $\mathfrak{R}/M$ ein Körper. Wie in Aufgabe 7.2 gezeigt wurde, ist $\mathfrak{R}/M$ versehen mit der Quotientennorm auch eine Banachalgebra. Durch Übergang zu einer äquivalenten Algebranorm kann man zudem erreichen, daß $\|1 + M\|_{\mathfrak{R}/M} = 1$ ist. Nach dem Satz 7.10 von Mazur und Gelfand ist also $\mathfrak{R}/M$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$. Sei $\Phi : \mathfrak{R}/M \to \mathbb{C}$ der hierdurch gegebene Isomorphismus und bezeichne $\pi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/M$ den kanonischen Epimorphismus. Dann ist $\Phi \circ \pi \in \Delta(\mathfrak{R})$ mit $\ker \Phi \circ \pi = \ker\pi = M$.

Zur Eindeutigkeitsaussage: Sind $\varphi, \psi \in \Delta(\mathfrak{R})$ mit $\ker\varphi = \ker\psi = M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{R})$, so folgt nach (a): $\mathfrak{R} = M \oplus \mathbb{C} \cdot 1$ und hieraus $\varphi = \psi$, den nach Satz 13.3 ist $\varphi(1) = 1 = \psi(1)$. □

13.5. Folgerung. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement 1 über $\mathbb{C}$ und sei $x \in \mathfrak{R}$.*

(a) $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) = \{\varphi(x)\,;\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R})\}$.

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (i) *x liegt im Radikal $\operatorname{rad}\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{R}$.*
   (ii) *$\varphi(x) = 0$ für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$.*
   (iii) $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) = \{0\}$.
   (iv) $r(x) = 0$.
   (v) *x ist quasinilpotent.*

(c) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   (i) *$\mathfrak{R}$ ist halbeinfach.*
   (ii) *$\Delta(\mathfrak{R})$ trennt die Punkte von $\mathfrak{R}$.*
   (iii) *Der Spektralradius ist eine Norm auf $\mathfrak{R}$.*

Beweis. (a) Sei $z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ beliebig. Dann ist $z - x$ nicht invertierbar und liegt daher in einem maximalen Ideal M von $\mathfrak{R}$. Wegen $M = \ker\varphi$ für ein $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ (nach Satz 13.4) gilt $0 = \varphi(z - x) = z - \varphi(x)$ und damit $z \in \{\psi(x)\,;\, \psi \in \Delta(\mathfrak{R})\}$.

Ist umgekehrt $z = \varphi(x)$ für ein $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$, so ist $z - x \in \ker\varphi$. Da $\ker\varphi$ ein echtes Ideal ist, ist $z - x$ nicht in $\mathfrak{R}$ invertierbar, d.h. es gilt $z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$.

(b) folgt unmittelbar aus (a), Satz 13.4 und Folgerung 8.13.

(c) Nach Satz 8.1 (c) und Folgerung 8.7 ist der Spektralradius r eine submultiplikative Halbnorm auf $\mathfrak{R}$. Diese ist wegen der Äquivalenz von (i) und (iv) in (b) genau dann eine Norm, wenn $\mathrm{rad}\mathfrak{R} = \{0\}$ gilt, d.h. wenn $\mathfrak{R}$ halbeinfach ist. Dies zeigt die Äquivalenz von (i) und (iii).

$\Delta(\mathfrak{R})$ trennt genau dann die Punkte von $\mathfrak{R}$, wenn gilt

$$\forall 0 \neq x \in \mathfrak{R}\, \exists \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}) : \quad \varphi(x) \neq 0\,.$$

Nach (b) ist dies äquivalent zu $\mathrm{rad}\mathfrak{R} = \{0\}$. □

13.6. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement* 1 *über* $\mathbb{C}$. *Dann ist die Menge $\Delta(\mathfrak{R})$ der multiplikativen linearen Funktionale $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$–kompakt. Im folgenden sei $\Delta(\mathfrak{R})$ stets durch die von der schwach*–Topologie induzierten Relativtopologie versehen. Die Abbildung $x \mapsto \hat{x}$ mit $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathfrak{R}, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ definiert einen stetigen Algebrenhomomorphismus $\Gamma : \mathfrak{R} \to C(\Delta(\mathfrak{R}))$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\Gamma(1) = 1$ *und* $\ker\Gamma = \mathrm{rad}\,\mathfrak{R}$.

(b) $\|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = r(x)$ *für alle* $x \in \mathfrak{R}$. *Hierbei sei* $\|\cdot\|_{\Delta(\mathfrak{R})}$ *die Supremumsnorm auf* $C(\Delta(\mathfrak{R}))$.

(c) *Für alle* $x \in \mathfrak{R}$ *gilt* $\hat{x}(\varphi) = 0$ *genau dann, wenn* $x \in \ker\varphi$ *gilt.*

(d) *Die Funktionen* $\{\hat{x}\,;\, x \in \mathfrak{R}\}$ *trennen die Punkte von* $\Delta(\mathfrak{R})$.

$\Gamma : \mathfrak{R} \to C(\Delta(\mathfrak{R}))$ heißt der *Gelfand–Homomorphismus* von $\mathfrak{R}$ nach $C(\Delta(\mathfrak{R}))$.

Beweis. Für alle $x, y \in \mathfrak{R}$ definieren wir:

$$M(x, y) := \{\varphi \in \mathfrak{R}'\,;\, \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = 0\}\,.$$

Offensichtlich sind diese Mengen schwach*–abgeschlossen in $\mathfrak{R}'$. Auch

$$A := \{\varphi \in \mathfrak{R}'\,;\, \varphi(1) = 1\}$$

ist schwach*–abgeschlossen und die Einheitskugel $B_{\mathfrak{R}'}$ des Dualraums von $\mathfrak{R}$ ist nach dem Satz von Banach–Alaoglu (Satz 12.10) sogar schwach*–kompakt. Also ist auch

$$\Delta(\mathfrak{R}) = B_{\mathfrak{R}'} \cap A \cap \bigcap_{x,y\in\mathfrak{R}} M(x, y)$$

schwach*–kompakt.

Nach Definition der schwach*–Topologie $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ sind die Funktionen $\hat{x}$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ bezüglich der durch $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ auf $\Delta(\mathfrak{R})$ induzierten Relativtopologie stetig. Die Homomorphieeigenschaften von Γ rechnet man unmittelbar nach.

(a) folgt aus Satz 13.3 und Folgerung 13.5.

(b) Es ist für alle $x \in \mathfrak{R}$:

$$\|x\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = \sup_{\varphi\in\Delta(\mathfrak{R})} |\varphi(x)| = \sup_{z\in\sigma_{\mathfrak{R}}(x)} |z| = r(x) \leq \|x\|\,,$$

wobei das mittlere Gleichheitszeichen nach Folgerung 13.5, das nächste nach Satz 8.11 und das $\leq$–Zeichen nach Satz 8.1 gilt.

(c) ist offensichtlich.

(d) Gilt $\hat{x}(\varphi) = \hat{x}(\psi)$ für alle $x \in \mathfrak{R}$, so ist $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ und daher $\varphi = \psi$. □

Um auch Gelfandtheorie in kommutativen Banachalgebren ohne Einselement betreiben zu können zeigen wir:

13.7. Lemma. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative Banachalgebra über $\mathbb{C}$ ohne Einselement und sei $\mathfrak{R}_1 := \mathfrak{R}\oplus\mathbb{C}\cdot 1$ die durch Adjunktion der Eins entstandene kommutative Banachalgebra mit Einselement (versehen mit der durch $\|x + z1\| := \|x\| + |z|$ für alle $x \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathbb{C}$ definierten unitalen Algebranorm). Dann gilt*

(a) $\Delta(\mathfrak{R}_1)$ *versehen mit der von* $\sigma(\mathfrak{R}_1', \mathfrak{R}_1)$ *induzierten Relativtopologie ist homöomorph zu* $\Delta_\infty(\mathfrak{R})$ *versehen mit der durch* $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ *induzierten Relativtopologie. Insbesondere ist* $\Delta_\infty(\mathfrak{R})$ *schwach***–kompakte Teilmenge von* $\mathfrak{R}'$.

(b) *Für alle* $x \in \mathfrak{R}$ *gilt:*

(i) $\sigma_{\mathfrak{R}_1}(x) = \{0\} \cup \{\varphi(x)\,;\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R})\}$.

(ii) $r(x) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \Delta(\mathfrak{R}) = \emptyset \\ \sup_{\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})} |\varphi(x)| & \textit{sonst.} \end{cases}$

Beweis. (a) Für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$ und alle $x + z \cdot 1 \in \mathfrak{R}_1$, $x \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathbb{C}$, ist $\varphi(x + z \cdot 1) = \varphi(x) + z$ und $\varphi|_{\mathfrak{R}} \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})$. Wir definieren daher $\Phi : \Delta(\mathfrak{R}_1) \to \Delta_\infty(\mathfrak{R})$ durch $\Phi(\varphi) := \varphi|_{\mathfrak{R}}$ für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$. Wegen der schwach*–Kompaktheit von $\Delta(\mathfrak{R}_1)$ und der Separiertheit von $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ genügt es, zu zeigen, daß Φ eine stetige, bijektive Abbildung ist (vergl. Satz 3.8 aus den Grundlagen aus der mengentheoretischen Topologie.

Zur Injektivität: Sind $\varphi, \psi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$ mit $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi)$, so folgt für alle $x + z \cdot 1 \in \mathfrak{R}_1$: Es ist $\varphi(x + z \cdot 1) = \varphi(x) + z = \psi(x) + z = \psi(x + z \cdot 1)$ und daher $\varphi = \psi$.

Zur Surjektivität: Ist $\varphi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})$ beliebig, so definiere $\tilde{\varphi} : \mathfrak{R}_1 \to \mathbb{C}$ durch $\tilde{\varphi}(x + z \cdot 1) := \varphi(x) + z$ für alle $x + z \cdot 1 \in \mathfrak{R}_1$, $x \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Man rechnet nach, daß $\tilde{\varphi}$ ein multiplikatives Funktional ist, für das offensichtlich $\Phi(\tilde{\varphi}) = \varphi$ gilt.

Zur Stetigkeit: Sei $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$ beliebig und sei U eine beliebige Umgebung in $\Delta(\mathfrak{R})_\infty$ von $\Phi(\varphi)$ bezüglich der durch die von $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ induzierten Relativtopologie. Dann gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$V(\Phi(\varphi); x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) := \{\psi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})\,;\, |\psi(x_j) - (\Phi(\varphi))(x)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq U\,.$$

Wegen der bereits gezeigten Bijektivität von Φ folgt

$$\begin{aligned} V(\varphi; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) =& \{\psi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})\,;\, |(\Phi^{-1}(\psi))(x_j) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \\ =& \Phi\left(\{\chi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)\,;\, |\chi(x_j) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}\right)\,. \end{aligned}$$

Also ist $\Phi^{-1}(U)$ eine Umgebung von φ in $\Delta(\mathfrak{R}_1)$ bezüglich der von $\sigma(\mathfrak{R}_1', \mathfrak{R}_1)$ induzierten Relativtopologie. Damit ist die Stetigkeit von Φ gezeigt.

(b) Zu (i): Nach Folgerung 13.5 und (a) ist

$$\sigma_{\mathfrak{R}_1}(x) = \{\varphi(x);\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)\} = \{(\Phi(\varphi))(x);\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)\} = \{\psi(x);\, \psi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})\}\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Zu (ii): Es ist nach Folgerung 13.5 und (a)

$$r(x) = \sup_{z \in \sigma_{\mathfrak{R}_1}(x)} |z| = \sup_{\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)} |\varphi(x)| = \sup_{\psi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})} |\psi(x)|.$$

Hieraus folgt (ii). □

Ist Ω ein lokalkompakter topologischer Hausdorffraum, so bezeichnen wir mit $C_\infty(\Omega)$ die Algebra der im Unendlichen verschwindenden, stetigen Funktionen, d.h. $C_\infty(\Omega)$ ist die Menge aller derjenigen stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_{f,\varepsilon}$ von Ω existiert mit $|f(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in \Omega \setminus K_{f,\varepsilon}$. Versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\Omega$ ist $C_\infty(\Omega)$ eine Banachalgebra. Dies rechnet man leicht nach.

13.8. Satz. *Sei* $\mathfrak{R}$ *eine kommutative Banachalgebra über* $\mathbb{C}$ *ohne Einselement mit* $\Delta(\mathfrak{R}) \neq \emptyset$.

(a) $\Delta(\mathfrak{R})$ *ist in der von* $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ *induzierten Topologie lokalkompakt.*

(b) *Der Gelfandhomomorphismus* $x \mapsto \hat{x}$ *mit* $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$ *für alle* $x \in \mathfrak{R}, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ *nimmt seine Werte schon in* $C_\infty(\Delta(\mathfrak{R}))$ *an und es gilt:*

$$\forall x \in \mathfrak{R} : \quad \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = r(x) \leq \|x\|\,.$$

Beweis. (a) ist klar, da $\Delta_\infty(\mathfrak{R})$ nach Lemma 13.7 schwach*–kompakt ist.

(b) Die Homomorphieeigenschaften des Gelfandhomomorphismus sind offensichtlich. Seien nun $x \in \mathfrak{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Die Menge

$$K := \{\varphi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})\,;\, |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}$$

ist eine $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$–abgeschlossene Menge der nach Lemma 13.7 schwach*–kompakten Menge $\Delta_\infty(\mathfrak{R})$ und somit ebenfalls schwach*–kompakt. Wegen $\varphi_\infty \notin K$ ist $K \subseteq \Delta(\mathfrak{R})$ und für alle $\psi \in \Delta(\mathfrak{R}) \setminus K$ ist $|\hat{x}(\psi)| = |\psi(x)| < \varepsilon$. Der Rest folgt nun mit Hilfe von Lemma 13.7 (b). □

Um in einer Reihe von Beispielen $\Delta(\mathfrak{R})$ bestimmen zu können, zeigen wir:

13.9. Lemma. *Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum und sei $\mathfrak{R}$ eine Unteralgebra der $\mathbb{C}$–Algebra $C(K) := C(K, \mathbb{C})$ welche die konstante Funktion 1 enthält. Auf $\mathfrak{R}$ sei eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben, so daß $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra ist. Ferner gelte*

(a) *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ ist auch die Funktion $\overline{x}$ (mit $\overline{x}(t) = \overline{x(t)}$ für alle $t \in K$) ein Element von $\mathfrak{R}$.*
(b) *Ist $x(t) \neq 0$ für alle $t \in K$, so ist auch die Funktion $x^{-1} : t \mapsto \frac{1}{x(t)}$ ein Element von $\mathfrak{R}$.*
(c) *$\mathfrak{R}$ trennt die Punkte von K.*

Dann ist $\Delta(\mathfrak{R}) = \{\delta_t\,;\, t \in K\}$ und die Abbildung $t \mapsto \delta_t$ ist eine Homöomorphie von K auf $\Delta(\mathfrak{R})$.

Beweis. Die Inklusion $\{\delta_t\,;\, t \in K\} \subseteq \Delta(\mathfrak{R})$ ist offensichtlich und da $\mathfrak{R}$ die Punkte von K trennt, ist die Abbildung $\delta : t \mapsto \delta_t$ von K nach $\Delta(\mathfrak{R})$ injektiv. Wir zeigen, daß δ auch surjektiv ist. Sei also $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ beliebig vorgegeben.

Annahme: $\forall t \in K : \quad \ker\varphi \not\subseteq \ker\delta_t$. Dann gibt es zu jedem $t \in K$ ein $x_t \in \ker\varphi$ mit $x_t(t) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von x_t gibt es noch eine offene Umgebung U_t von t mit $x_t(s) \neq 0$ für alle $s \in U_t$. $(U_t)_{t\in K}$ ist dann eine offene Überdeckung von K, aus der wir wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung auswählen können $U_{t_1}, \ldots, U_{t_k}$ auswählen können. Die Funktion $f : s \mapsto \sum_{j=1}^k x_{t_j}(t)\overline{x_{t_j}}(t)$ ist dann nullstellenfrei und liegt wegen (a) und $x_{t_j} \in \ker\varphi$ ebenfalls in $\ker\varphi$ und damit nicht in $\mathfrak{R}$ invertierbar. Da f nullstellenfrei ist, steht dies im Widerspruch zu (b). Also war die Annahme falsch und es folgt: Es gibt ein $t_0 \in K$ mit $\ker\varphi \subseteq \ker\delta_{t_0}$. Da $\ker\varphi$ und $\ker\delta_{t_0}$ maximale Ideale sind, ist dies nur möglich,wenn $\ker\varphi = \ker\delta_{t_0}$ ist. Wegen Satz 13.4 folgt hieraus $\varphi = \delta_{t_0}$. Damit ist die Surjektivität von φ bewiesen.

Wir zeigen nun die Stetigkeit von $\delta : K \to \Delta(\mathfrak{R})$. Sei $t \in K$ beliebig und sei U eine beliebige Umgebung von δ_t in $\Delta(\mathfrak{R})$ in der von der schwach*–Topologie induzierten Topologie. Dann gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$V := V(\delta_t; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) := \{\delta_s\,;\, s \in K,\, |\delta_t(x_j) - \delta_s(x_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq U\,.$$

Dann ist

$$\delta^{-1}(V) = \{s \in K\,;\, |x_j(t) - x_j(s)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

wegen der Stetigkeit von $x_1, \ldots, x_n$ offen in K und somit eine Umgebung von t. Damit ist die Stetigkeit von $\delta : K \to \Delta(\mathfrak{R})$ bewiesen. Da δ auch bijektiv und K kompakt ist, muß δ eine Homöomorphie sein. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

13.10. Folgerung. (a) *Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum. Dann ist die Menge $\Delta(C(K))$ der multiplikativen linearen Funktionale homöomorph zu K vermöge der Abbildung $t \mapsto \delta_t$.*

(b) *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall ($a < b$). Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $t \mapsto \delta_t$ eine Homöomorphie von $[a,b]$ auf $\Delta(C^n([a,b]))$ gegeben.*

13.11. Satz. *Sei $W \subset C(\mathbb{T})$ die Wieneralgebra der Funktionen mit absolutkonvergenter Fourierreihenentwicklung (vergl. Beispiel 13.2 (b)). Dann ist $\Delta(W)$ homöomorph zu $\mathbb{T}$ vermöge der Abbildung $z \mapsto \delta_z$, wobei $\delta_z(f) := f(z)$ für alle $z \in \mathbb{T}$, $f \in W$.*

Beweis. Wir hatten uns schon in Beispiel 13.2 (b) überlegt, daß $\{\delta_z\,;\, z \in \mathbb{T}\} \subseteq \Delta(W)$ gilt. Die hierdurch definierte Abbildung $\delta : \mathbb{T} \to \Delta(W)$ ist injektiv, denn für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ gilt mit $h := \mathrm{id}_{\mathbb{T}}$: Es ist $\delta_{z_j}(h) = z_j$ und daher $\delta_{z_1} = \delta_{z_2}$ genau dann, wenn $z_1 = z_2$.

Wir zeigen, daß δ auch surjektiv ist. Sei also $\varphi \in \Delta(W)$ beliebig vorgegeben und $h := \mathrm{id}_{\mathbb{T}}$. Dann ist $\|h\|_W = 1$ und h ist invertierbar in W mit $h^{-1}(z) = 1/z$ für alle $z \in \mathbb{T}$. Offensichtlich ist $\|h^{-1}\|_W = 1$. Da $\|\varphi\| = 1$ gilt (nach Satz 13.3), folgt $|\varphi(h)| \leq 1$ und $|\varphi(h^{-1})| \leq 1$. Wegen $\varphi(h^{-1})\varphi(h) = \varphi(h^{-1} \cdot h) = \varphi(1) = 1$ ist dies nur möglich, wenn $|\varphi(h)| = 1$ und somit $\varphi(h) \in \mathbb{T}$ gilt. Für alle $f \in W$ mit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{T}$ gilt $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h^n$ mit absoluter Konvergenz. Da φ stetig ist, folgt hieraus

$$\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(h^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (\varphi(h))^n = \delta_{\varphi(h)}(f).$$

Also ist $\varphi(f) = \delta_{\varphi(h)}(f)$ und die Surjektivität von δ ist gezeigt.

Wie im Beweis von Lemma 13.9 zeigt man nun, daß δ eine Homöomorphie ist. □

Als Folgerung erhalten wir folgenden Satz von Wiener:

13.12. Folgerung. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π–periodische Funktion mit absolutkonvergenter Fourierreihenentwicklung. Besitzt f keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, so hat auch die Funktion $1/f : t \mapsto 1/f(t)$ eine absolutkonvergente Fourierreihenentwicklung.*

Beweis. Sei also f mit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

ohne Nullstelle in $\mathbb{R}$, $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Dann ist die Funktion $\tilde{f} : z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in W und hat keine Nullstelle in $\mathbb{T}$. Also folgt mit Satz 13.11 und Folgerung 13.5:

$$0 \notin \{\tilde{f}(z)\,;\, z \in \mathbb{T}\} = \{\varphi(\tilde{f})\,;\, \varphi \in \Delta(W)\} = \sigma_W(\tilde{f}),$$

d.h. die Existenz von $1/\tilde{f}$ in W. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $g(t) := 1/\tilde{f}(e^{it})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt dann $f(t)g(t) \equiv 1$ und besitzt eine absolutkonvergente Fourierreihenentwicklung. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 13.

13.1. Aufgabe. Zeigen Sie, daß es für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ unendlich viele paarweise verschiedenen maximale Ideale $\mathcal{I}$ in der Banachalgebra $C_b(\mathbb{D})$ der stetigen und beschränkten Funktionen auf $\mathbb{D}$ gibt mit

$$\{f \in \mathcal{R} \,:\, \tilde{f}(z) = 0\} \subset \mathcal{I}.$$

Hierbei sei $\mathcal{R}$ die abgeschlossene Unteralgebra aller auf $\mathbb{D}$ beschränkten, stetigen Funktionen f, die eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\overline{\mathbb{D}}$ besitzen.

13.2. Aufgabe. Seien $(\mathfrak{R}_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2$, zwei kommutative Banachalgebren über $\mathbb{C}$ mit Einselementen $1_{\mathfrak{R}_1}, 1_{\mathfrak{R}_2}$. Zeigen Sie: Ist $\Phi : \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2$ ein (nicht notwendig stetiger) Algebrenhomomorphismus mit $\Phi(1_{\mathfrak{R}_1}) = 1_{\mathfrak{R}_2}$, so ist die durch $\phi \mapsto \phi \circ \Phi$ gegebene Abbildung von $\Delta(\mathfrak{R}_2)$ nach $\Delta(\mathfrak{R}_1)$ stetig, wenn man $\Delta(\mathfrak{R}_j)$ mit der von $\sigma(\mathfrak{R}_j', \mathfrak{R}_j)$ induzierten Relativtopologie versieht.

13.3. Aufgabe. Sei $A(\mathbb{D})$ die in Aufgabe 7.7 eingeführte Diskalgebra.

(a) Zeigen Sie, daß die Polynome in z dicht liegen in $A(\mathbb{D})$.
(b) Zeigen Sie, daß die multiplikativen Linearformen auf $A(\mathbb{D})$ genau die Punktauswertungen auf $\overline{\mathbb{D}}$ sind.
(c) Seien $f_1, \ldots, f_k$ Funktionen in $A(\mathbb{D})$ und zu jedem $z \in \overline{\mathbb{D}}$ gebe es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $f_j(z) \neq 0$. Dann existieren Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \in A(\mathbb{D})$ mit $\sum_{i=1}^k f_i \Phi_i \equiv 1$ auf $\overline{\mathbb{D}}$.

13.4. Aufgabe. Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins 1 und seien $a_1, \ldots, a_n \in A$. Das *gemeinsame Spektrum* von $a_1, \ldots, a_n$ in A ist definiert als

$$\sigma_A(a_1, \ldots, a_n) := \{(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \,:\, \varphi \in \Delta(A)\}.$$

(a) Zeigen Sie: $\sigma_A(a_1, \ldots, a_n)$ ist eine nicht leere, kompakte Teilmenge des $\mathbb{C}^n$.
(b) Für $j = 1, \ldots, n$ sei $\pi_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ die Projektion auf die j-te Koordinate. Zeigen Sie:
$$\pi_j(\sigma_A(a_1, \ldots, a_n)) = \sigma_A(a_j) \qquad \forall 1 \leq j \leq n.$$
(c) Zeigen Sie: Der Punkt $(z_1, \ldots, z_n)$ liegt genau dann in $\sigma_A(a_1, \ldots, a_n)$, wenn das von $z_1 \cdot 1 - a_1, \ldots, z_n \cdot 1 - a_n$ erzeugte Ideal von A echt ist.

13.5. Aufgabe. Bestimmen Sie den Gelfand-Raum der *Sandwichalgebra*

$$S(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \,:\, \text{ es gibt ein } g \in A(\mathbb{D}) \text{ mit } g|_{\partial\mathbb{D}} = f|_{\partial\mathbb{D}}\}.$$

Hierbei sei $S(\mathbb{D})$ versehen mit der sup–Norm.

13.6. Aufgabe. Sei $H^\infty(\mathbb{D})$ sei die Banachalgebra aller auf $\mathbb{D}$ holomorphen, beschränkten Funktionen (versehen mit der sup-Norm). Zeigen Sie:

(a) Für alle $z_0 \in \mathbb{D}$ und $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ ist die Funktion
$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (z \in \mathbb{D})$$
in z_0 holomorph ergänzbar und beschränkt.
(b) Es gibt eine stetige injektive Abbildung $\psi : \mathbb{D} \to \Delta(H^\infty(\mathbb{D}))$.
(c) Es gibt eine stetige surjektive Abbildung $\pi : \Delta(H^\infty(\mathbb{D})) \to \overline{\mathbb{D}}$ derart, daß $\pi|_{\mathbb{D}} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Insbesondere sind $\mathbb{D}$ und das Bild von $\mathbb{D}$ in $\Delta(H^\infty(\mathbb{D}))$ homöomorph.

KAPITEL 14

Der Šilovrand

In diesem Kapitel wollen wir die Frage untersuchen, wann sich ein maximales Ideal in einer Unteralgebra $\mathfrak{A}$ einer komplexen kommutativen Banachalgebra $\mathfrak{R}$ mit Einselement zu einem maximalen Ideal in $\mathfrak{R}$ erweitern läßt. Sei also im folgenden $\mathfrak{R}$ stets eine kommutative Banachalgebra mit Einselement 1 über $\mathbb{C}$.

14.1. DEFINITION. Unter einer *maximierenden Teilmenge* von $\Delta(\mathfrak{R})$ verstehen wir eine abgeschlossene, nicht leere Menge $F \subseteq \Delta(\mathfrak{R})$ mit

$$\forall x \in \mathfrak{R}: \qquad r(x) = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = \|\hat{x}\|_F \,. \tag{14.1}$$

Die Menge aller maximierenden Teilmengen von $\Delta(\mathfrak{R})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$.

Insbesondere ist also $\Delta(\mathfrak{R})$ selbst eine maximierende Teilmenge von sich.

14.2. SATZ. *Es gibt genau eine minimale maximierende Teilmenge $S(\mathfrak{R})$ von $\Delta(\mathfrak{R})$. $S(\mathfrak{R})$ heißt der Šilovrand von $\mathfrak{R}$. Es gilt:*

$$S(\mathfrak{R}) = \bigcap_{F \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))} F$$

BEWEIS. (a) *Existenz:* Die Menge $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ aller maximierenden Teilmengen von $\Delta(\mathfrak{R})$ ist durch die Inklusion teilweise geordnet und wegen $\Delta(\mathfrak{R}) \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ nicht leer. Wir zeigen mit Hilfe des Zornschen Lemmas, daß $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ ein minimales Element besitzt. Sei $\mathcal{K}$ eine beliebige totalgeordnete Teilmenge von $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$. Wegen der Kompaktheit von $\Delta(\mathfrak{R})$ sind alle $K \in \mathcal{K}$ nicht leere kompakte Teilmengen von $\Delta(\mathfrak{R})$. Da $\mathcal{K}$ totalgeordnet ist, folgt wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen, daß die Menge

$$K_0 := \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K$$

nicht leer und kompakt (also auch abgeschlossen in $\Delta(\mathfrak{R})$) ist. Wir zeigen, daß K_0 auch maximierend und damit eine untere Schranke für $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ ist. Für alle $x \in \mathfrak{R}$ ist wegen der Stetigkeit der Gelfandtransformierten $\hat{x}$ von x und der Kompaktheit von $\Delta(\mathfrak{R})$ die Menge

$$S_x := \{\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})\,;\, |\varphi(x)| = |\hat{x}(\varphi)| = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})}\}$$

abgeschlossen und nicht leer. Da die Elemente von $\mathcal{K}$ maximierende Teilmengen von $\Delta(\mathfrak{R})$ sind, gilt $\|\hat{x}\|_K = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})}$ und somit $K \cap S_x \neq \emptyset$ für alle $K \in \mathcal{K}, x \in \mathfrak{R}$. Wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen folgt auch

$$K_0 \cap S_x = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \cap S_x \neq \emptyset$$

für alle $x \in \mathfrak{R}$. Also ist K_0 maximierend und somit eine untere Schranke für $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ daher wenigstens ein minimales Element.

(b) *Eindeutigkeit:* Sei S eine minimale maximierende Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$ und sei $\varphi \in S$ beliebig. Sei V eine beliebige Umgebung von φ in $\Delta(\mathfrak{R})$. Dann gibt es endlich viele $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U := \{\psi \in \Delta(\mathfrak{R})\,;\, |\psi(y_j) - \varphi(y_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq V.$$

Mit $x_j := y_j - \varphi(y_j)1$ folgt $\psi(x_j) = \psi(y_j) - \varphi(y_j)$ und somit

$$U = \{\psi \in \Delta(\mathfrak{R})\,;\, |\psi(x_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}\,.$$

Da S minimales Element von $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ ist, gibt es ein $y \in S$ mit

$$r(y) = \|\hat{y}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = \sup_{\psi \in U} |\hat{y}(\psi)| > \sup_{\psi \in S \setminus U} |\hat{y}(\psi)|\,.$$

Gäbe es nämlich kein solches y, so wäre $S \setminus U$ eine echt kleinere minimale maximierende Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$. Indem wir notfalls y durch $r(y)^{-1}y$ ersetzen, können wir erreichen, daß

$$\sup_{\psi \in S \setminus U} |\hat{y}(\psi)| < r(y) = 1$$

gilt. Für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sup_{\psi \in S \setminus U} |\widehat{y^m}(\psi)| < \frac{\varepsilon}{\max_{1 \le j \le n} \|x_j\|}\,.$$

Damit folgt für $j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\max_{\psi \in \Delta(\mathfrak{R})} |\widehat{y^m}(\psi)\hat{x}_j(\psi)| &= \max_{\psi \in S} |\widehat{y^m}(\psi)\hat{x}_j(\psi)| \\ &= \max\left\{\sup_{\psi \in S \setminus U} |\widehat{y^m}(\psi)\hat{x}_j(\psi)|\,,\ \sup_{\psi \in S \cap U} |\widehat{y^m}(\psi)\hat{x}_j(\psi)|\right\} < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ist nun $F \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ beliebig gegeben, so gibt es, da F maximierend ist, ein $\varphi_0 \in F$ mit $1 = r(y^m) = |\widehat{y^m}(\varphi_0)|$. Damit erhalten wir für $j = 1, \ldots, n$:

$$|\hat{x}_j(\varphi_0)| = |\widehat{y^m}(\varphi_0)\hat{x}_j(\varphi_0)|\,.$$

Also ist $\varphi_0 \in U \subseteq V$. Für alle $\varphi \in S$ enthält also jede Umgebung V von φ Punkte aus F. Da F abgeschlossen ist folgt $\varphi \in F$. Wegen $S \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ folgt

$$S = \bigcap_{F \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))} F$$

und damit insbesondere auch die Eindeutigkeit des minimalen Elementes von $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$. $\square$

14.3. Beispiele. (a) Für jeden kompakten Hausdorffraum K gilt

$$S(C(K)) = \{\delta_t\,;\, t \in K\} = \Delta(C(K))\,.$$

(b) Die Diskalgebra $\mathcal{A}(\mathbb{D}) = C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ist, versehen mit der Supremumsnorm eine kommutative Banachalgebra mit Einselement 1. Es gilt:

$$\Delta(\mathcal{A}(\mathbb{D})) = \{\delta_z\,;\, z \in \overline{\mathbb{D}}\} \quad \text{und} \quad S(\mathcal{A}(\mathbb{D})) = \{\delta_z\,;\, z \in \partial\mathbb{D}\}\,.$$

Beweis in den Übungen.

14.4. Satz. *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt $\partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$.*

Beweis. Sei $z_0 \in \partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \setminus \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von $\hat{x}$ und der Kompaktheit von $S(\mathfrak{R})$ folgt

$$\delta := \inf_{\varphi \in S(\mathfrak{R})} |\hat{x}(\varphi) - z_0| = \min_{\varphi \in S(\mathfrak{R})} |\hat{x}(\varphi) - z_0| > 0\,.$$

Da z_0 im topologischen Rand von $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ liegt gibt es ein $z_1 \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ mit $|z_1 - z_0| < \delta/2$ und es folgt für alle $\varphi \in S(\mathfrak{R})$:

$$|\hat{x}(\varphi) - z_1| \geq |\hat{x}(\varphi) - z_0| - |z_1 - z_0| > \frac{\delta}{2}$$

und somit

$$r((x - z_1)^{-1}) = \max_{\varphi \in S(\mathfrak{R})} \Big| \frac{1}{\hat{x}(\varphi) - z_1} \Big| < \frac{2}{\delta}\,. \tag{14.2}$$

Andererseits ist $z_0 \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ und daher $z_0 = \hat{x}(\varphi_0) = \varphi_0(x)$ für ein $\varphi_0 \in \Delta(\mathfrak{R})$. Es folgt mit (14.2):

$$\frac{2}{\delta} > r((x - z_1)^{-1}) \geq |\varphi_0((x - z_1)^{-1})| = \Big| \frac{1}{\varphi_0(x) - z_1} \Big| = \frac{1}{|z_0 - z_1|} > \frac{2}{\delta}\,.$$

Da dies unmöglich ist kann es keinen Punkt $z_0 \in \partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \setminus \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$ geben, d.h. die Menge $\partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \setminus \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$ ist leer und es folgt $\partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$. □

Eine weitere Charakterisierung des Šilovrandes wird im folgenden Satz angegeben:

14.5. Satz. *Für ein nicht triviales multiplikatives Funktional φ auf $\mathfrak{R}$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\varphi \in S(\mathfrak{R})$.

(b) *Zu jeder in der auf $\Delta(\mathfrak{R})$ durch $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ gegebenen Relativtopologie offenen Umgebung U von φ existiert ein $y \in \mathfrak{R}$ mit*

$$\sup_{\psi \in \Delta(\mathfrak{R}) \setminus U} |\hat{y}(\psi)| < \sup_{\psi \in U} |\hat{y}(\psi)|\,.$$

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(b)" Ist (b) nicht erfüllt für ein $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$, so gibt es eine in der auf $\Delta(\mathfrak{R})$ durch $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ gegebenen Relativtopologie offenen Umgebung U von φ, so daß für alle $y \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\sup_{\psi \in \Delta(\mathfrak{R}) \setminus U} |\hat{y}(\psi)| \geq \sup_{\psi \in U} |\hat{y}(\psi)|\,.$$

$\Delta(\mathfrak{R}) \setminus U$ ist also eine maximierende Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$ und muß daher nach Satz 14.2 den Šilovrand $S(\mathfrak{R})$ enthalten. Insbesondere kann φ dann nicht im Šilovrand von $\mathfrak{R}$ liegen.

"(b)$\Longrightarrow$(a)" Hat $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ die Eigenschaft (b), so ist $U \cap S(\mathfrak{R}) \neq \emptyset$ für alle in der auf $\Delta(\mathfrak{R})$ durch $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ gegebenen Relativtopologie offenen Umgebungen U von φ. Also gilt $\varphi \in \overline{S(\mathfrak{R})} = S(\mathfrak{R})$. □

Für eine Banachalgebra $\mathfrak{A}$ und ein $x \in \mathfrak{A}$ sei $r_{\mathfrak{A}}(x)$ der Spektralradius von x in $\mathfrak{A}$.

14.6. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1.

(a) *Ist $\Phi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{A}$ ein (nicht notwendig stetiger) Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ in eine kommutative komplexe Banachalgebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement $1_{\mathfrak{A}}$, für den gilt:*

$$\Phi(1) = 1_{\mathfrak{A}} \quad \textit{und} \quad r_{\mathfrak{A}}(\Phi(x)) = r_{\mathfrak{R}}(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathfrak{R}\,, \tag{14.3}$$

so gilt $S(\mathfrak{R}) \subseteq \{\varphi \circ \Phi\,;\, \varphi \in S(\mathfrak{A})\}$. Der Šilovrand von $\mathfrak{R}$ ist die größte Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$ mit dieser Eigenschaft für alle möglichen Wahlen von $\mathfrak{A}$ und Φ mit(14.3).

(b) *Für jede kommutative, komplexe Banachalgebra $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{R}$ mit dem selben Einselement* 1 *und mit der Eigenschaft*

$$r_{\mathfrak{A}}(x) = r_{\mathfrak{R}}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{R} \tag{14.4}$$

läßt sich jedes Funktional aus $S(\mathfrak{R})$ fortsetzen zu einem multiplikativen Funktional auf $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{R}$ zusätzlich halbeinfach, so ist $S(\mathfrak{R})$ maximal mit dieser Eigenschaft für alle möglichen Wahlen von $\mathfrak{A}$.

Beweis. (i) Wegen der Stetigkeit der Abbildung $\Phi^{\#} : \Delta(\mathfrak{A}) \to \Delta(\mathfrak{R})$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \Phi$, (nach Aufgabe 13.2) und der Kompaktheit von $S(\mathfrak{A})$ ist

$$\Phi^{\#}(S(\mathfrak{A})) = \{\varphi \circ \Phi\,;\, \varphi \in S(\mathfrak{A})\}$$

kompakt und damit auch abgeschlossen in $\Delta(\mathfrak{R})$. Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\|\hat{x}\|_{\Phi^{\#}(S(\mathfrak{A}))} = \sup_{\varphi \in S(\mathfrak{A})} |\varphi(\Phi(x))| = \sup_{\varphi \in S(\mathfrak{A})} |\widehat{\Phi(x)}(\varphi)| = r_{\mathfrak{A}}(\Phi(x)) = r_{\mathfrak{R}}(x) = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})}\,.$$

$\Phi^{\#}(S(\mathfrak{A}))$ ist also eine maximierende Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$ und muß daher nach Satz14.2 den Šilovrand von $\mathfrak{R}$ als Teilmenge enthalten.

(ii) Um die Maximalitätsaussage zu erhalten betrachten wir speziell $\mathfrak{A} := C(S(\mathfrak{R}))$ (versehen mit der Supremumsnorm) und die Abbildung $\Phi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{A}$ mit $\Phi(x) := \hat{x}|_{S(\mathfrak{R})}$ für alle $x \in \mathfrak{R}$. Offensichtlich ist Φ ein Algebrenhomomorphismus mit $\Phi(1) = 1$. Nach Beispiel 14.3 (a) und Folgerung 13.10 gilt $S(\mathfrak{A}) = \Delta(\mathfrak{A}) = \{\delta_\varphi\,;\, \varphi \in S(\mathfrak{R})\}$. Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt dann

$$r_{\mathfrak{A}}(\Phi(x)) = \sup_{\varphi \in S(\mathfrak{R})} |\widehat{\Phi(x)}(\delta_\varphi)| = \sup_{\varphi \in S(\mathfrak{R})} |\hat{x}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})} |\hat{x}(\varphi)| = r_{\mathfrak{R}}(x)\,,$$

so daß die Bedingung (14.3) erfüllt ist. Wegen $\Phi^{\#}(S(\mathfrak{A})) = \{\delta_\varphi \circ \Phi\,;\, \varphi \in S(\mathfrak{R})\} = S(\mathfrak{R})$ folgt die Maximalitätsaussage und (a) ist bewiesen.

(iii) Ist $\mathfrak{R}$ Unteralgebra einer Banachalgebra $\mathfrak{A}$, so daß (14.4) gilt, so ist die Inklusionsabbildung $\Phi : x \mapsto x$ ein Monomorphismus der die Bedingung (14.3) erfüllt. Wegen (a) gibt es also zu jedem $\varphi \in S(\mathfrak{R})$ ein $\psi \in S(\mathfrak{A}) \subseteq \Delta(\mathfrak{A})$ mit $\psi(x) = \psi(\Phi(x)) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathfrak{R}$. Jedes $\varphi \in S(\mathfrak{R})$ besitzt also eine Fortsetzung zu einem $\psi \in S(\mathfrak{A}) \subseteq \Delta(\mathfrak{A})$.

(iv) Ist $\mathfrak{R}$ zusätzlich halbeinfach, so gilt für den Homomorphismus $\Phi : x \mapsto \hat{x}|_{S(\mathfrak{R})}$ aus (ii) und alle $x \in \mathfrak{R}$: Es ist $\Phi(x) = 0$ genau dann, wenn $0 = \|\hat{x}\|_{S(\mathfrak{R})} = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = r_{\mathfrak{R}}(x)$ gilt. Da $\mathfrak{R}$ halbeinfach ist, gilt dies genau dann, wenn $x = 0$ ist. Φ ist also in diesem Fall eine Einbettung vermöge der wir $\mathfrak{R}$ als Unteralgebra von $\mathfrak{A} = C(S(\mathfrak{R}))$ auffassen können, die (14.4) erfüllt. Nach (ii) folgt nun die Maximalitätsaussage in (b). □

14.7. Folgerung. *Ist $\mathfrak{A}$ eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1 *und ist $\mathfrak{R}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ mit $1 \in \mathfrak{R}$, so läßt sich jedes Funktional aus $S(\mathfrak{R})$ fortsetzen zu einem multiplikativen Funktional auf $\mathfrak{A}$.*

Dies folgt unmittelbar aus Satz 14.6, da für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt $r_{\mathfrak{R}}(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = r_{\mathfrak{A}}(x)$.

Übungsaufgaben zu Kapitel 14.

14.1. Aufgabe. Brechnen Sie die Šilovränder der beiden folgenden Banachalgebren:

(a) $(C(K), \|\cdot\|_K)$ (K ein kompakter Hausdorffraum) (b) $(A(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}})$

Hinweis zu (a): Verwenden Sie ohne Beweis das folgende Lemma von Urysohn: *Sind A, B abgeschlossene disjunkte Teilmengen eines kompakten Hausdorffraums K, so gibt es eine stetige Funktion $f : K \to [0,1]$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.*

14.2. Aufgabe. Sei A_W die Menge aller Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$\|f\|_{A_W} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

(a) Zeigen Sie, daß $(A_W, \|\cdot\|_W)$ bzgl. der punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren eine Banachalgebra ist mit $A_W \subset A(\mathbb{D})$.
(b) Berechnen Sie $\Delta(A_W)$ und $S(A_W)$.

14.3. Aufgabe. Berechnen Sie den Šilovrand der Sandwichalgebra aus Aufgabe 13.5

KAPITEL 15

C^*–Algebren: Definition und erste Eigenschaften

15.1. Definition. Eine komplexe Banachalgebra $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ heißt *C^*–Algebra*, falls eine Abbildung $^* : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, $x \mapsto x^*$, existiert mit den folgenden Eigenschaften:

(a) * ist eine *Involution*, d.h. es ist $(x^*)^* = x$ für alle $x \in \mathfrak{R}$.
(b) * ist konjugiert–linear, d.h. für alle $x, y \in \mathfrak{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $(\alpha x+\beta y)^* = \overline{\alpha}x^* + \overline{\beta}y^*$.
(c) Für alle $x, y \in \mathfrak{R}$ gilt $(xy)^* = y^*x^*$.
(d) Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt $\|x\|^2 = \|x^*x\|$.

15.2. Lemma. *Ist $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement* 1*, so ist* $1 = 1^*$ *und* $\|1\| = 1$.

Beweis. Aus $1^* = 1^*1$ folgt mit (c) und (a) in Definition 15.1: $1 = (1^*1)^* = 1^*1 = 1^*$ und hieraus mit (d): $\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\|$ Wegen $\|1\| \neq 0$ ist dies nur möglich, wenn $\|1\| = 1$ ist. □

15.3. Beispiele. (a) Die Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ der stetigen linearen Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind mit der Adjungiertenbildung als Involution eine (für $\dim \mathcal{H} \geq 2$) nicht kommutative C^*–Algebra mit dem Einselement $1 :=\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

(b) Die Algebren $C(K)$ (K ein kompakter Hausdorffraum), $C_\infty(\Omega)$ (Ω ein lokalkompakter topologischer Hausdorffraum), $\ell^\infty(I)$ (I eine nicht leere Menge) und $L^\infty(A)$ ($A \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue–meßbar) sind mit der durch

$$f^*(s) := \overline{f(s)} \quad \text{für alle } s$$

gegebenen Involution kommutative C^*–Algebren.

In Analogie zu Definition 2.41 definieren wir ;

15.4. Definition. Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra. Ein Element $x \in \mathfrak{R}$ heißt

- *normal*, falls $x^*x = xx^*$ gilt,
- *hermitesch*, falls $x = x^*$ gilt,
- *unitär*, falls $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1 besitzt und $x^*x = 1 = xx^*$ gilt.

15.5. Lemma. *Sei $\mathfrak{R}$ eine C^*–Algebra mit Einselement* 1.

(a) *Jedes $x \in \mathfrak{R}$ hat die Darstellung $x = u+iv$ mit hermiteschen Elementen $u, v \in \mathfrak{R}$.*
(b) *Ist $x \in \mathfrak{R}$ hermitesch, so ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subset \mathbb{R}$.*
(c) *Ist $\mathfrak{R}$ kommutativ, so gilt für alle $x \in \mathfrak{R}$, $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$: $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$.*

Beweis. (a) In der Tat gilt $x = u + iv$ mit

$$u = \frac{1}{2}(x + x^*) \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2i}(x - x*)$$

und die so definierten Elemente $u, v \in \mathfrak{R}$ sind hermitesch.

(b) Sei $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ beliebig mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $\beta = 0$. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda + i\xi \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x + i\xi)$. Also hat man

$$|\lambda + i\xi| \leq r_{\mathfrak{R}}(x + i\xi) \leq \|x + i\xi\|$$

und daher

$$\begin{aligned}|\lambda + i\xi|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \xi^2 + 2\beta\xi \leq \|x + i\xi\|^2 &= \|(x + i\xi)^*(x + i\xi)\| = \|(x - i\xi)(x + i\xi)\| \\ &\leq \|x^2 + \xi^2\| \leq \|x\|^2 + \xi^2\end{aligned}$$

Wir erhalten also für alle $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\xi \leq \|x\|^2.$$

Dies ist nur möglich für $\beta = 0$.

(c) Nach (a) hat x eine Darstellung der Form $x = u + iv$ mit hermiteschen Elementen $u, v \in \mathfrak{R}$. Für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ gilt nach (b) und Folgerung 13.5

$$\varphi(u) \in \sigma_{\mathfrak{R}}(u) \subset \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \varphi(v) \in \sigma_{\mathfrak{R}}(v) \subset \mathbb{R}$$

und daher

$$\overline{\varphi(x)} = \overline{\varphi(u + iv)} = \overline{\varphi(u) + i\varphi(v)} = \varphi(u) - i\varphi(v) = \varphi(u - iv) = \varphi(x^*)\,.$$

□

15.6. Lemma. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra.*

(a) *Es gilt $\|x\| = \|x^*\|$ für alle $x \in \mathfrak{R}$. Die Involution * von $\mathfrak{R}$ ist also eine konjugiert lineare Isometrie.*

(b) *Ist $x \in \mathfrak{R}$ ein normales Element, so ist die von $1, x$ und x^* erzeugte abgeschlossene Unteralgebra $\mathfrak{R}_0$ eine kommutative C^*–Algebra, deren Elemente alle normal sind. Es gilt ferner*

$$\|x\|^2 = \|x^2\| \quad \textit{und} \quad r_{\mathfrak{R}}(x) = \|x\|\,.$$

Beweis. (a) Nach Definition 15.1 gilt für alle $x \in \mathfrak{R}$

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \text{ und daher } \|x\| \leq \|x^*\|$$

sowie

$$\|x^*\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \text{ und daher } \|x^*\| \leq \|x\|\,.$$

Also folgt $\|x\| = \|x^*\|$

(b) Da die Elemente $1, x$ und x^* paarweise vertauschen, ist

$$\mathfrak{R}_0 = \overline{\{p(x, x^*)\,;\, p \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]\}}$$

eine kommutative Banachalgebra, die offensichtlich unter der Involution * invariant ist (da diese nach (a) insbesondere stetig ist). $\mathfrak{R}_0$ ist also mit der auf $\mathfrak{R}_0$ eingeschränkten Involution eine kommutative C^*–Algebra. Insbesondere sind alle Elemente von $\mathfrak{R}_0$ normal. Für alle $a \in \mathfrak{R}_0$ gilt daher

$$\|a^2\| = \|(a^2)^*a^2\|^{1/2} = \|(a^*a)^*(a^*a)\|^{1/2} = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Nach Lemma 8.2 folgt $r_{\mathfrak{R}}(x) = r_{\mathfrak{R}_0}(x) = \|x\|$. □

Wir werden den folgenden Approximationassatz für stetige Funktionen verwenden:

15.7. Satz (Stone–Weierstraß). *Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C(K)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $1 \in \mathcal{A}$.

(b) *Für alle $f \in \mathcal{A}$ liegt auch f^* in $\mathcal{A}$ mit $f^*(t) := \overline{f(t)}$ für alle $t \in K$.*

(c) *$\mathcal{A}$ trennt die Punkte von K.*

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C(K)$ bezüglich der Supremumsnorm.

Zum Beweis siehe z.B. Satz 7.3 in [**2**].

15.8. SATZ (Gelfand–Neumark). *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative C^*–Algebra mit Einselement* 1. *Dann ist der Gelfandhomomorphismus*

$$\Gamma : \mathfrak{R} \to C(\Delta(\mathfrak{R}))\,, \quad x \mapsto \hat{x}\,,$$

ein isometrischer *–Isomorphismus, d.h. ein isometrischer Algebrenisomorphismus mit

$$\forall x \in \mathfrak{R} : \quad \forall \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}) : \qquad \widehat{x^*}(\varphi) = \overline{\hat{x}(\varphi)}\,.$$

BEWEIS. Nach Satz 13.6 ist $\Gamma : \mathfrak{R} \to C(\Delta(\mathfrak{R}))$ ein Algebrenhomomorphismus mit $\Gamma(1) = 1$ und es gilt für alle $x \in \mathfrak{R}$:

$$\|\Gamma(x)\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = r_{\mathfrak{R}}(x) = \|x\|,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen nach Lemma 15.6 gilt, denn wegen der Kommutativität von $\mathfrak{R}$ sind alle Elemente von $\mathfrak{R}$ normal. Γ ist also sogar eine Isometrie. Insbesondere ist $\mathcal{A} := \operatorname{ran}\Gamma$ abgeschlossen in $\mathfrak{R}$. Die Algebra $\mathcal{A}$ enthält die konstante Funktion 1 und trennt nach Satz 13.6 (d) die Punkte von $\Delta(\mathfrak{R})$. Ferner gilt nach Lemma 15.5 (c) für alle $x \in \mathfrak{R}$, $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$:

$$\widehat{x^*}(\varphi) = \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\hat{x}(\varphi)}\,.$$

Nach dem Satz 15.7 von Stone und Weierstraß liegt $\mathcal{A}$ also dicht in $C(\Delta(\mathfrak{R}))$. Da $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist, folgt $\mathcal{A} = C(\Delta(\mathfrak{R}))$. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

15.9. FOLGERUNG. *Ist $\mathfrak{R}$ eine kommutative C^*–Algebra mit Einselement, so gilt in Lemma 15.5 (b) auch die Umkehrung.*

Unter einer *C^*–Unteralgebra* $\mathfrak{R}_1$ einer C^*–Algebra $\mathfrak{R}$ verstehen wir eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{R}$ mit $x^* \in \mathfrak{R}_1$ für alle $x \in \mathfrak{R}_1$. Dann ist $\mathfrak{R}_1$ bezüglich der auf $\mathfrak{R}_1$ eingeschränkten Norm und Involution wieder eine C^*–Algebra.

15.10. LEMMA. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement* 1 *und sei $\mathfrak{R}_1$ eine C^*–Unteralgebra von $\mathfrak{R}$ mit $1 \in \mathfrak{R}_1$. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{R}_1$:*

$$\sigma_{\mathfrak{R}_1}(x) = \sigma_{\mathfrak{R}}(x)\,.$$

BEWEIS. (a) Sei zunächst $a = a^* \in \mathfrak{R}_1$ hermitesch. Nach Übungsaufgabe 8.1 und Lemma 15.5 (b) gilt $\sigma_{\mathfrak{R}}(a) \subseteq \sigma_{\mathfrak{R}_1}(a) \subset \mathbb{R}$ sowie $\partial\sigma_{\mathfrak{R}_1}(a) \subseteq \partial\sigma_{\mathfrak{R}}(a)$. Insbesondere ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(a) = \partial\sigma_{\mathfrak{R}}(a)$ und $\sigma_{\mathfrak{R}_1}(a) = \partial\sigma_{\mathfrak{R}_1}(a)$, so daß insgesamt $\sigma_{\mathfrak{R}_1}(a) = \sigma_{\mathfrak{R}}(a)$ folgt.

(b) Sei nun x normal (nicht notwendig hermitesch) und $x \in \mathfrak{R}_1$. Nach Übungsaufgabe 8.1 ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \sigma_{\mathfrak{R}_1}(x)$. Um die Gleichheit zu beweisen, genügt es somit $\rho_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \rho_{\mathfrak{R}_1}(x)$ zu zeigen. Sei also $\lambda \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ beliebig. Mit $\lambda - x$ ist dann auch $(\lambda - x)^*$ invertierbar in $\mathfrak{R}$ und es gilt $((\lambda - x)^*)^{-1} = ((\lambda - x)^{-1})^*$. Daher ist $a := (\lambda - x)^*(\lambda - x)$ ein hermitesches in $\mathfrak{R}$ invertierbares Element mit $a \in \mathfrak{R}_1$. Wegen $0 \notin \sigma_{\mathfrak{R}}(a)$ folgt nach (a) auch $0 \notin \sigma_{\mathfrak{R}_1}(a)$. Also ist $a^{-1} = (\lambda - x)^{-1}((\lambda - x)^*)^{-1} \in \mathfrak{R}_1$ und $(\lambda - x)^{-1} = a^{-1}(\lambda - x)^* \in \mathfrak{R}_1$, d.h. es ist $\lambda \in \rho_{\mathfrak{R}_1}(x)$ für alle $\lambda \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$. □

15.11. SATZ. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement* 1 *und sei x ein normales Element von $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}_0$ sei die von $1, x$ und x^* erzeugte kommutative C^*–Unteralgebra von $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*

(a) $\Delta(\mathfrak{R}_0)$ *ist homöomorph zu $\sigma_{\mathfrak{R}_0}(x) = \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ vermöge der Abbildung*

$$\hat{x} : \Delta(\mathfrak{R}_0) \to \sigma_{\mathfrak{R}_0}(x), \qquad \varphi \mapsto \hat{x}(\varphi) = \varphi(x).$$

(b) $\mathfrak{R}_0$ *ist isometrisch *–isomorph zu $C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$.*

Beweis. Nach Lemma 15.10 ist $\sigma_{\mathfrak{R}_1}(x) = \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$.

(a) Die Abbildung $\hat{x} : \Delta(\mathfrak{R}_0) \to \sigma_{\mathfrak{R}_0}(x)$ ist nach Folgerung 13.5 surjektiv und nach Satz 13.6 stetig. Um zu zeigen, daß $\hat{x}$ eine Homöomorphie ist, genügt es (etwa nach [**2**], Satz 4.9) die Injektivität von $\hat{x}$ zu beweisen. Seien also $\varphi, \psi \in \mathfrak{R}_0$ mit $\hat{x}(\varphi) = \hat{x}(\psi)$. Dann folgt $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\psi(x)} = \psi(x^*)$ (nach Lemma 15.5 (b)) und $\varphi(1) = 1 = \psi(1)$. Es folgt $1, x, x^* \in \ker(\varphi - \psi)$. Nun ist, wie man unmittelbar nachrechnet, $ker(\varphi - \psi)$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{R}_0$, welche wegen der Stetigkeit von $\varphi - \psi$ abgeschlossen ist. Da $\mathfrak{R}_0$ die von $1, x, x^*$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{R}$ ist, folgt $\ker(\varphi - \psi) = \mathfrak{R}_0$ und damit $\varphi = \psi$. $\hat{x}$ ist daher injektiv und somit eine Homöomorphie.

(b) Nach dem Satz 15.8 von Gelfand und Neumark ist $\Gamma : \mathfrak{R}_0 \to C(\Delta(\mathfrak{R}_0))$ ein isometrischer *–Isomorphismus. Da $\hat{x} : \Delta(\mathfrak{R}_0) \to \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ nach (a) eine Homöomorphie ist, ist die Abbildung $\Psi : C(\Delta(\mathfrak{R}_0)) \to C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$ mit $\Psi(f) := f \circ \hat{x}^{-1}$ ebenfalls ein isometrischer *–Isomorphismus. Somit ist auch $\Psi \circ \Gamma : \mathfrak{R}_0 \to C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$ ein isometrischer *–Isomorphismus. □

15.12. Bemerkung. Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 und sei $x \in \mathfrak{R}$. Ist f eine in einer Umgebung der Kreisscheibe $K := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le r_{\mathfrak{R}}(x)\}$ holomorphe Funktion, so besitzt f eine Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ um 0 mit einem Konvergenzradius $\rho > r_{\mathfrak{R}}(x)$. Wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \big(|a_n| \cdot \|x^n\|\big)^{1/n} \le \frac{r_{\mathfrak{R}}(x)}{\rho} < 1$$

ist dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent in $\mathfrak{R}$ gegen einen Grenzwert, den wir mit $f(x)$ bezeichnen.

Ist $\mathfrak{R}$ kommutativ und $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ beliebig, so folgt wegen der Stetigkeit von φ:

$$\varphi(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x)^n = f(\varphi(x))\,.$$

Insbesondere gilt also nach Folgerung 13.5 der *spektrale Abbildungssatz*:

$$\sigma_{\mathfrak{R}}(f(x)) = f(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))\,.$$

15.13. Satz (Funktionalkalkül für normale Elemente). *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement 1 und sei x ein normales Element von $\mathfrak{R}$. Dann gibt es einen isometrischen *–Monomorphismus $\Phi : C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x)) \to \mathfrak{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\Phi(1) = 1$, $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)}) = x$.
(b) *Es gilt der spektrale Abbildungssatz: $\sigma_{\mathfrak{R}}(\Phi(f)) = f(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$ für alle $f \in C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$.*
(c) *Ist f eine in einer Umgebung von $K := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le r_{\mathfrak{R}}(x)\}$ holomorphe Funktion, so gilt $f(x) = \Phi(f|_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)})$*

Ist auch $\Psi : C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x)) \to \mathfrak{R}$ ein weiterer *–Homomorphismus mit (a), so gilt schon $\Psi = \Phi$. Aufgrund dieser Eigenschaften von Φ schreiben wir im folgenden auch $f(x)$ statt $\Phi(f)$ für alle $f \in C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$.

Beweis. Zur Existenz und (a): Nach (dem Beweis zu) Satz 15.11 ist durch

$$a \mapsto \Theta(a) := \Gamma(a) \circ \hat{x}^{-1} = \hat{a} \circ \hat{x}^{-1}$$

ein isometrischer *–Isomorphismus von der von 1, x und x^* erzeugten abgeschlossenen C^*–Unteralgebra $\mathfrak{R}_1$ auf $C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$ gegeben, für den offensichtlich gilt $\Theta(1) = 1$ und $\Theta(x) = \mathrm{id}_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)}$. Durch $f \mapsto \Phi(f) := \Theta^{-1}(f)$ wird also ein isometrischer *–Monomorphismus $\Phi : C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x)) \to \mathfrak{R}$ definiert mit $\operatorname{ran}\Phi = \mathfrak{R}_1$ und $\Phi(1) = 1$, $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)}) = x$.

Zur Eindeutigkeit: Ist $\Psi : C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x)) \to \mathfrak{R}$ ein weiterer *–Homomorphismus mit (a), so folgt aus den *–Homomorphieeigenschaften und (a) für Φ und Ψ: Für alle Polynome

$p : (z, \bar{z}) \mapsto p(z, \bar{z})$ in z und $\bar{z}$ ist $\Phi(p) = p(x, x^*) = \Psi(p)$. Nach Übungsaufgabe 15.4, ist Ψ stetig. Da die Polynome in z und $\bar{z}$ nach dem Satz von Stone und Weierstraß dicht liegen in $C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$ folgt wegen der Stetigkeit von Φ und Ψ, daß $\Phi = \Psi$ gilt.

Zu (b): Für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$, $f \in C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$ gilt

$$\varphi(\Phi(f)) = \varphi(\Theta^{-1}(f)) = \varphi(\Gamma^{-1}(f \circ \hat{x}) = (f \circ \hat{x})(\varphi) = f(\hat{x}(\varphi)) = f(\varphi(x))\,.$$

Mit Folgerung 13.5 und Lemma 15.10 folgt

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathfrak{R}}(\Phi(f)) &= \sigma_{\mathfrak{R}_1}(\Phi(f)) = \{\varphi(\Phi(f))\,;\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)\} = \{f(\varphi(x)))\,;\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)\}\\ &= f(\sigma_{\mathfrak{R}_1}(x)) = f(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))\,.\end{aligned}$$

Also ist (b) erfüllt.

Zu (c): Ist f eine in einer Umgebung von K holomorphe Funktion, so hat f eine Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ um 0 mit einem Konvergenzradius $\rho > r_{\mathfrak{R}}(x)$. Insbesondere konvergieren die Partialsummen $s_k(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ gleichmäßig auf $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ gegen f. Es folgt wegen (a) und der Stetigkeit von Φ:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} s_n(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi(s_n) = \Phi(f|_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)})\,.$$

□

15.14. Satz (Fuglede). *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement* 1 *und seien x, y zwei normale Elemente von $\mathfrak{R}$. Ist $a \in \mathfrak{R}$ mit $xa = ay$, so gilt auch $x^*a = ay^*$.*

Beweis. Durch vollständige Induktion folgt aus der Voraussetzung: $x^n a = a y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und hieraus für alle $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\exp(i\bar{\lambda}x)a = a\exp(i\bar{\lambda}y)$$

und somit

$$a = \exp(i\bar{\lambda}x)a\exp(-i\bar{\lambda}y)$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt hieraus mit Übungsaufgabe 15.1:

$$\begin{aligned}f(\lambda) &:= \exp(i\lambda x^*)a\exp(-i\lambda y^*) = \exp(i\lambda x^*)\exp(i\bar{\lambda}x)a\exp(-i\bar{\lambda}y)\exp(-i\lambda y^*)\\ &= \exp(i(\lambda x^* + \bar{\lambda}x))a\exp(-i(\bar{\lambda}y + \lambda y^*))\end{aligned} \tag{15.1}$$

Da die Elemente $\lambda x^* + \bar{\lambda}x$ und $\bar{\lambda}y + \lambda y^*$ hermitesch sind, folgt nach Übungsaufgabe 15.2:

$$\|f(\lambda)\| \leq \|\exp(i(\lambda x^* + \bar{\lambda}x))\| \cdot \|a\| \cdot \|\exp(-i(\bar{\lambda}y + \lambda y^*))\| = \|a\|\,. \tag{15.2}$$

Nach (15.1) Übungsaufgabe 15.2 gilt ferner

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}(L_{x^*} - R_{y^*})^n(a)$$

mit absoluter Konvergenz für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Hierbei sind L_{x^*} bzw. R_{y^*} die Operatoren der Multiplikation von links mit x^* bzw. von rechts mit y^*. Für alle $u' \in \mathfrak{R}'$ ist somit durch

$$\lambda \mapsto u'(f(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u'\big((L_{x^*} - R_{y^*})^n(a)\big)$$

eine ganze Funktion gegeben, die wegen (15.2) beschränkt, also nach dem Satz von Liouville konstant ist. Für alle $n \geq 1$ und alle $u' \in \mathfrak{R}'$ gilt daher $u'\big((L_{x^*} - R_{y^*})^n(a)\big) = 0$ und somit $(L_{x^*} - R_{y^*})^n(a) = 0$. Für $n = 1$ folgt $x^*a - ay^* = 0$ und damit die Behauptung. □

15.15. Folgerung. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement* 1 *und sei x ein normales Element von $\mathfrak{R}$. Dann nimmt der Funktionalkalkül aus Satz 15.13 seine Werte im Bikommutanten von x an, d.h. für alle $f \in C(\sigma_{\mathfrak{R}}(x))$ und alle $a \in \mathfrak{R}$ mit $ax = xa$ gilt: $af(x) = f(x)a$.*

Beweis. Nach dem Satz von Fuglede kommutiert jedes Element $a \in \mathfrak{R}$ mit $ax = xa$ auch mit x^*, also auch mit jedem Element der von 1, x und x^* erzeugten abgeschlossenen Unteralgebra $\mathfrak{R}_1$. Da der Funktionalkalkül aus Satz 15.13 seine Werte in $\mathfrak{R}_1$ annimmt, folgt die Behauptung. $\square$

Im folgenden sei stets $\mathfrak{R}$ eine C^*–Algebra mit Einselement 1 über $\mathbb{C}$.

15.16. Definition. Ein Element $x \in \mathfrak{R}$ heißt *positiv* (Schreibweise: $x \geq 0$), falls x hermitesch ist und $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq [0, \infty)$ gilt.

Jedes hermitesche Element läßt sich als Differenz von zwei positiven schreiben:

15.17. Lemma. *Sei $x \in \mathfrak{R}$ hermitesch. Dann gibt es positive Elemente $u, v \in \mathfrak{R}$ mit $x = u - v$, $uv = vu = 0$ und $\|u\| \leq \|x\|$, $\|v\| \leq \|x\|$.*

Beweis. Nach Lemma 15.5 hat x reelles Spektrum. Die Funktionen

$$f_\pm : \sigma_{\mathfrak{R}}(x) \to [0, \infty)\,, \quad \lambda \mapsto f_+(\lambda) := \max\{0, \lambda\}\,, \quad \text{und } \lambda \mapsto f_-(\lambda) := \max\{0, -\lambda\}$$

sind stetig und erfüllen

$$f_+ f_- \equiv 0 \text{ und } f_+ - f_- \equiv \mathrm{id} \text{ sowie } \|f_\pm\|_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)} \leq \|\mathrm{id}\|_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)} = r_{\mathfrak{R}}(x) = \|x\|\,.$$

Mit $u := f_+(x)$, $v := f_-(x)$ in Satz 15.13 folgt die Behauptung. $\square$

15.18. Lemma. *Sei $0 \leq x \in \mathfrak{R}$. Dann existiert genau ein $y \in \mathfrak{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$. Wir schreiben dann $y = \sqrt{x}$. Ist x in $\mathfrak{R}$ invertierbar, so auch y.*

Beweis. (a) Existenz: Die Funktion $g : \sigma_{\mathfrak{R}}(x) \to [0, \infty)$ mit $g(\lambda) := \sqrt{(\lambda)}$ für alle $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ ist stetig und erfüllt $g \geq 0$ und $g^2(\lambda) \equiv \lambda$. Für $y := g(x)$ gilt nach Satz 15.13: $y^2 = g(x)^2 = x$, $y^* = g(x)^* = g(x) = y$ und nach dem spektralen Abbildungssatz $y \geq 0$.

(b) Eindeutigkeit: Sei auch $0 \leq u \in \mathfrak{R}$ mit $u^2 = x$. Insbesondere folgt $ux - xu = 0$. Nach Folgerung 15.15 gilt also $yu - uy = 0$ für y wie in (a). Sei nun $\mathfrak{R}_1$ die von u, y und 1 erzeugte abgeschlossene, kommutative Unteralgebra von $\mathfrak{R}$. Dann gilt für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$:

$$\varphi(u) \in \sigma_{\mathfrak{R}_1}(u) = \sigma_{\mathfrak{R}}(u) \subset [0, \infty), \quad \varphi(y) \in \sigma_{\mathfrak{R}_1}(y) = \sigma_{\mathfrak{R}}(y) \subset [0, \infty),$$

woraus wegen $\varphi(u)^2 = \varphi(u^2) = \varphi(x) = \varphi(y)^2$ schon $\varphi(u) = \varphi(y)$ folgt. Es folgt

$$\|u - y\| = r_{\mathfrak{R}}(u - y) = r_{\mathfrak{R}_1}(u - y) = \sup_{\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)} |\varphi(u) - \varphi(y)| = 0\,,$$

d.h. $u = y$. $\square$

15.19. Definition. Eine Teilmenge K eines $\mathbb{K}$–Vektorraums heißt *Kegel*, falls gilt

$$\forall x \in K \quad \forall \lambda > 0 : \qquad \lambda x \in K\,.$$

Ein Kegel K heißt *spitz*, falls $K \cap (-K) = \{0\}$. Ein Kegel K heißt *konvex*, falls $K + K \subseteq K$.

15.20. Satz (Kelley-Kaplansky-Vaught). *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement 1. Sei $\mathcal{P} := \{x \in \mathfrak{R}\,;\, x \geq 0\}$ die Menge der positiven Elemente von $\mathfrak{R}$. Dann ist $\mathcal{P}$ ein abgeschlossener, konvexer, spitzer Kegel in $\mathfrak{R}$, dessen relatives Inneres in der Menge $\mathfrak{R}_h$ der hermiteschen Elemente von $\mathfrak{R}$ aus invertierbaren Elementen besteht und dessen Rand nur nicht invertierbare Elemente enthält.*

Für ein Element $x \in \mathfrak{R}$ sind die folgenden Aussagen (a) – (d) äquivalent:

(a) *$x \geq 0$ (d.h. $x = x^*$ und $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subset [0, \infty)$).*
(b) *$x = x^*$ und $\|\|x\|1 - x\| \leq \|x\|$.*
(c) *Es gibt ein $y \in \mathfrak{R}$ mit $y = y^*$ und $y^2 = x$.*
(d) *Es gibt ein $y \in \mathfrak{R}$ mit $y^* y = x$.*

Beweis. 1.)“(a) $\iff$ (b)”: Für ein hermitesches Element $x \in \mathfrak{R}$ gilt nach Lemma 15.5: $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq [-\|x\|, \|x\|]$. Daher hat man $\sigma_{\mathfrak{R}}(\|x\|1 - x) = \{\|x\| - \lambda\,;\, \lambda\sigma_{\mathfrak{R}}(x)\} \subseteq [0, 2\|x\|]$. Mit Lemma15.6 folgt

$$\|x\| \geq \|\|x\|1 - x\| = r_{\mathfrak{R}}(\|x\|1 - x) \qquad \iff \qquad \sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq [0, \|x\|]\,.$$

Insbesondere folgt aus dieser Äquivalenz auch, daß $\mathcal{P}$ abgeschlossen ist in $\mathfrak{R}$.

2.) Die Aussage “(a) $\Longrightarrow$ (c)” folgt aus Lemma 15.18 und “(c) $\Longrightarrow$ (d)” ist trivial.

3.) $\mathcal{P}$ ist ein spitzer Kegel: Für alle $x \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ und alle $\lambda \geq 0$ aus $\mathbb{R}$ hat man $\sigma_{\mathfrak{R}}(\lambda x) = \lambda\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subset [0, \infty)$ und $(\lambda x)^* = \lambda x$ und somit $\lambda x \in \mathcal{P}$. Es ist $0 \in \mathcal{P}$ und für alle $x \in \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P})$ ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq [0, \infty) \cap (-\infty, 0] = \{0\}$ und daher $\|x\| = r_{\mathfrak{R}}(x) = 0$. Also ist der Kegel $\mathcal{P}$ auch spitz.

4.) Wir zeigen: Für alle $x = x^* \in \mathfrak{R}$ mit $\|x\| \leq 1$ gilt: $x \geq 0 \iff \|1 - x\| \leq 1$. In der Tat hat man für solche x:

$$\begin{aligned} \|1 - x\| \leq 1 \qquad &\iff \qquad \sigma_{\mathfrak{R}}(1 - x) = \{1 - \lambda\,;\, \lambda \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)\} \subseteq [-1, 1] \\ &\iff \qquad \sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq [0, 1] \\ &\iff \qquad x \geq 0\,. \end{aligned}$$

5.) Der Kegel $\mathcal{P}$ ist konvex: Seien $x, y \in \mathcal{P}$ beliebig. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist $x + y \in \mathcal{P}$. Seien nun $x \neq 0$ und $y \neq 0$ vorausgesetzt. Da $\mathcal{P}$ ein Kegel ist, folgt

$$\frac{1}{\|x\| + \|y\|}x\,,\ \frac{1}{\|x\| + \|y\|}y \in \mathcal{P}\,.$$

Also ist

$$u := \frac{1}{2(\|x\| + \|y\|)}(x + y) = u^* \quad \text{und } \|u\| \leq 1\,.$$

Es folgt mit 4.):

$$\begin{aligned} \|1 - u\| &= \frac{1}{2}\Big\|2 \cdot 1 - \frac{1}{\|x\| + \|y\|}(x + y)\Big\| \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(\Big\|1 - \frac{1}{\|x\| + \|y\|}x\Big\| + \Big\|1 - \frac{1}{\|x\| + \|y\|}y\Big\|\Big) \\ &\leq \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

Ebenfalls nach 4.) muß also $u \in \mathcal{P}$ und damit (nach 3.)) auch $x + y \in \mathcal{P}$ gelten.

6.) Ist x ein innerer Punkt von $\mathcal{P}$ (betrachtet als Teilmenge des reellen normierten Vektorraums $\mathfrak{R}_h$), so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $-\varepsilon 1 + x \in \mathcal{P}$. Insbesondere ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(-\varepsilon 1 + x) \subset [0, \infty)$ und daher $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subset [\varepsilon, \infty)$. x ist daher invertierbar. Ist umgekehrt $x \in \mathcal{P}$ invertierbar, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subset [\varepsilon, \infty)$. Es folgt

$$\|\|x\|1 - x\| = r_{\mathfrak{R}}(\|x\|1 - x) = \sup_{\lambda \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)} \|x\| - \lambda \leq \|x\| - \varepsilon < \|x\|\,.$$

Wegen der Äquivalenz von (a) und (b) ist die Menge $\{u = u^* \in \mathfrak{R}\,;\, \|\|u\|1 - u\| < \|u\|\}$ in $\mathcal{P}$ und offensichtlich offen in $\mathfrak{R}_h$. x ist also innerer Punkt von $\mathcal{P}$ betrachtet als Teilmenge des normierten Raums $\mathfrak{R}_h$.

7.) Wir zeigen: Ist $w \in \mathfrak{R}$ mit $w^*w \in -\mathcal{P}$, so ist $w = 0$.

Zum Beweis schreiben wir w in der Form $w = w_1 + iw_2$ mit hermiteschen Elementen w_1, w_2 (vergl. Lemma 15.5) Mit Satz 15.13 folgt $w_j^2 \in \mathcal{P}$, denn w_j^2 ist hermitesch und $\sigma_{\mathfrak{R}}(w_j^2) = \{\lambda^2\,;\, \lambda \in \sigma_{\mathfrak{R}}(w_j)\} \subset [0, \infty)$ (j=1,2). Wegen 3.) und 5.) folgt

$$w^*w + ww^* = 2(w_1^2 + w_2^2) \in \mathcal{P}$$

und daher

$$ww^* = (w^*w + ww^*) + (-w^*w) \in \mathcal{P} + \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}\,.$$

Es folgt insbesondere $\sigma_{\mathfrak{R}}(ww^*) \subset [0,\infty)$ und hieraus mit Übungsaufgabe 8.2: $\sigma_{\mathfrak{R}}(w^*w) \subset [0,\infty)$. Also folgt mit 3.):

$$w^*w \in \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\}$$

und somit $\|w\| = \|w^*w\|^{1/2} = 0$, d.h. $w = 0$.

8.) “(d) $\Longrightarrow$ (a)”: Sei nun $x = y^*y$ für ein $y \in \mathfrak{R}$. Dann ist x insbesondere hermitesch und läßt sich nach Lemma 15.17 schreiben in der Form $x = u - v$ mit $u, v \in \mathcal{P}$ und $uv = vu = 0$. Für $w := yv$ folgt

$$w^*w = (yv)^*(yv) = v^*y^*yv = v(u-v)v = -v^3 \in -\mathcal{P}\,,$$

denn $\sigma_{\mathfrak{R}}(v^3) = \{\lambda^3\,;\, \lambda \in \sigma_{\mathfrak{R}}(v)\} \subset [0,\infty)$. Wegen 7.) muß $w = 0$ und damit auch $v^3 = -w^*w = 0$ gelten. Es folgt $\|v\| = r_{\mathfrak{R}}(v) = 0$ und damit $x = u + v = u \in \mathcal{P}$. □

Zum Abschluß dieses Kapitels zeigen wir noch, daß die Definitionen 15.16 und die Definition eines positiven Operators in Definition 2.41 verträglich sind:

15.21. Satz. *Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum. Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\forall x \in \mathcal{H}: \quad \langle Tx, x\rangle \geq 0$, *d.h. T ist positiv im Sinn von Definition 2.41.*
(b) *T ist positiv als Element der C^*–Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, d.h. $T = T^*$ und $\sigma_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T) \subset [0,\infty)$.*

Beweis. Ist (a) erfüllt, so ist insbesondere $T = T^*$ nach Lemma 2.42. Also ist auch $\|T\|1 - T$ hermitesch. Mit Lemma 2.45 und $B_{\mathcal{H}} := \{x \in \mathcal{H}\,;\, \|x \leq 1\}$ folgt unter Verwendung von $\langle Tx, x\rangle 0$ für alle $x \in B_{\mathcal{H}}$:

$$\begin{aligned}
\|\|T\|1 - T\| &= \sup_{x\in B_{\mathcal{H}}} |\langle (\|T\| - T)x, x\rangle| = \sup_{x\in B_{\mathcal{H}}} |\|T\|\|x\|^2 - \langle Tx, x\rangle| \\
&= \sup_{x\in B_{\mathcal{H}}} \|T\|\|x\|^2 - \langle Tx, x\rangle \\
&\leq \sup_{x\in B_{\mathcal{H}}} \|T\|\|x\|^2 = \|T\|
\end{aligned}$$

Nach Satz 15.20 ist T daher auch positiv als Element der C^*–Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Ist T positiv als Element der C^*–Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, so gibt es nach Satz 15.20 einen Operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $S^*S = T$. Für alle $x \in \mathcal{H}$ folgt dann

$$\langle Tx, x\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle \geq 0.$$

T ist also auch positiv im Sinne von Definition 2.41. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 15.

15.1. Aufgabe. Sei $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in \mathfrak{R}$ mit $xy = yx$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$.
(b) Für alle $a, b, c \in \mathfrak{R}$ gilt $\exp(a)\,b\,\exp(c) = \exp(L_a + R_c)(b)$.
Hierbei sind $L_a, R_c \in \mathcal{L}(\mathfrak{R})$ definiert durch

$$L_a(x) = ax \qquad \text{und} \qquad R_c(x) = xc \qquad (x \in \mathfrak{R}).$$

15.2. Aufgabe. Sei $(\mathfrak{R}\|\cdot\|)$ eine C^*-Algebra. Zeigen Sie: Für $x \in \mathfrak{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $x = x^*$, d.h. x ist hermitesch.
(b) $\|\exp(itx)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) $\|\exp(itx)\| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

15.3. AUFGABE. Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie:

(a) $|T|$ ist der einzige positive Operator P mit der Eigenschaft, daß $\|Px\| = \|Tx\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.
(b) Ist T invertierbar, so gibt es genau einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $T = U|T|$.
(c) Ist T normal, so gibt es einen unitären Operator U mit $T = U|T| = |T|U$.

15.4. AUFGABE. Seien $(\mathfrak{R}_1, \|\cdot\|_1), (\mathfrak{R}_2, \|\cdot\|_2)$ zwei C^*-Algebren mit Einselementen $1_{\mathfrak{R}_1}, 1_{\mathfrak{R}_2}$ und sei $\Phi : \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2$ ein $*$-Homomorphismus mit $\Phi(1_{\mathfrak{R}_1}) = 1_{\mathfrak{R}_2}$. Zeigen Sie, daß Φ dann stetig ist mit $\|\Phi\| = 1$.

KAPITEL 16

Konvexität in lokalkonvexen Vektorräumen

Wir beginnen mit einem elementaren Lemma aus der linearen Algebra. Im gesamten Kapitel sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

16.1. Lemma. *Seien $g, f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{K}$ Linearformen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E mit*

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker(f_j) \subseteq \ker g\,.$$

Dann ist g eine Linearkombination von $f_1 \ldots, f_n$.

Beweis. Die Abbildung $T : E \to \mathbb{K}^n$ mit $T(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ für alle $x \in E$ ist linear. Insbesondere ist $T(E)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$. Sind x, y zwei Vektoren aus E mit $T(x) = T(y)$ so folgt $f_j(x) = f_j(y)$ und somit $x - y \in \ker f_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Nach Voraussetzung gilt also auch $x - y \in \ker g$ und somit $g(x) = g(y)$. Durch $\phi(T(x)) := g(x)$ für alle $x \in E$ ist also eine wohldefinierte, lineare Abbildung $\phi : T(E) \to \mathbb{K}$ definiert, die eine Fortsetzung zu einem linearen Funktional $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ besitzt. Es gibt also $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit

$$\psi(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j \qquad \text{für alle } \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Insbesondere folgt für alle $x \in E$:

$$g(x) = \phi(T(x)) = \psi(T(x)) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_j(x)$$

und somit $g = \sum_{j=0}^{n} f_j$. □

16.2. Satz. *Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem. Dann ist $(E, \sigma(E, F))' = F$, wobei wir F vermöge der Einbettung $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$ als Untervektorraum des algebraischen Dualraums $E^{\#}$ von E auffassen. Ebenso gilt $(F, \sigma(F, E))' = E$.*

Beweis. Nach Definition der Topologie $\sigma(E, F)$ sind alle linearen Funktionale der Gestalt $\langle \cdot, y\rangle$, $y \in F$, stetig auf $(E, \sigma(E, F))$, d.h. es gilt mit der obigen Identifikation von F als Untervektorraum von $E^{\#}$ die Inklusion $F \subseteq (E, \sigma(E, F))'$.

Sei nun umgekehrt $g : (E, \sigma(E, F)) \to \mathbb{K}$ stetig und linear. Dann gibt es endlich viele $y_1, \ldots, y_n \in F$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_{y_1,\ldots,y_n;\varepsilon} := \{x \in E\,;\, |\langle x, y_j\rangle| < \varepsilon,\ j = 1, \ldots, n\} \subseteq g^{-1}(U_1(0)).$$

Insbesondere folgt

$$g\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \ker\langle \cdot, y_j\rangle\Big) \subseteq U_1(0) = \{\lambda \in \mathbb{K}\,;\, |\lambda| < 1\}.$$

Dies ist nur möglich, wenn

$$g\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \ker\langle \cdot, y_j\rangle\Big) = \{0\} \qquad \text{und somit} \qquad \bigcap_{j=1}^{n} \ker\langle \cdot, y_j\rangle \subseteq \ker g$$

gilt. Nach Lemma 16.1 gibt es also $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x, y_j \rangle = \Big\langle x, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \Big\rangle$$

für alle $x \in E$. Also ist $g = \langle \cdot, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \rangle$.

Analog zeigt man $(F, \sigma(F, E))' = E$. □

16.3. Folgerung. *Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem und sei F_1 ein echter Unterverktorraum von F derart, daß auch $(E, F_1, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{E \times F_1})$ ein Dualsystem ist. Dann ist die Topologie $\sigma(E, F_1)$ echt gröber als $\sigma(E, F)$.*

Um die lokalkonvexe Variante des Trennungssatzes von Hahn-Banach zeigen zu können, beweisen wir zunächst eine Trennungseigenschaft allgemeiner separierter topologischer Vektorräume.

16.4. Satz. *Sei K eine kompakte und A eine zu K disjunkte abgeschlossene Teilmenge eines separierten topologischen Vektorraums (E, τ). Dann gibt es eine τ-Nullumgebung U in E mit $(K + U) \cap (A + U) = \emptyset$.*

Hieraus folgt insbesondere leicht, daß es in der Situation des Satzes offene Mengen $V, W \subseteq E$ gibt mit $K \subseteq V$, $A \subseteq W$ und $V \cap W = \emptyset$ (vergl. Aufgabe 16.1).

Beweis. Im Fall $K = \emptyset$ ist die Aussage trivial (wegen $\emptyset + U = \emptyset$ für jede τ-Nullumgebung). Sei nun $K \neq \emptyset$. Da $E \setminus A$ offen ist, gibt es zu jedem $x \in K$ eine offene Nullumgebung V_x mit $(x + V_x) \cap A = \emptyset$. Zu V_x gibt es nach den Bemerkungen 11.2 und 11.5 eine kreisförmige Nullumgebung U_x mit

$$U_x + U_x + U_x \subseteq V_x\,.$$

Insbesondere gilt wegen $U_x = -U_x$ für alle $x \in E$:

$$(x + U_x + U_x) \cap (A + U_x) = \emptyset\,, \quad \text{d.h.} \quad x + U_x + U_x \subseteq E \setminus (A + U_x)\,.$$

Wegen der Kompaktheit von K gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + U_{x_j}).$$

Dann ist auch $U := \bigcap_{j=1}^{n} U_{x_j}$ eine Nullumgebung und es folgt

$$K + U \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + U_{x_j} + U) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + U_{x_j} + U_{x_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (E \setminus (A + U_{x_j})) \subseteq E \setminus U.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

16.5. Trennungssatz von Hahn–Banach. *Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum und seien A, B zwei disjunkte, konvexe, nicht leere Teilmengen von E.*

(a) *Ist A offen, so gibt es ein $f \in E'$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit*

$$\forall a \in A, b \in B: \quad \operatorname{Re} f(a) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(b).$$

(b) *Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es $f \in E'$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ mit*

$$\forall a \in A, b \in B: \quad \operatorname{Re} f(a) < \gamma - \varepsilon < \gamma < \operatorname{Re} f(b).$$

Beweis. Wie im normierten Fall (Satz 6.11) genügt es, die Behauptung für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu beweisen. Für den Beweis zu (a) kann man (unter Verwendung von Aufgabe 16.2) wörtlich den entsprechenden Beweisteil für den normierten Fall (Satz 6.11) übernehmen.

Zu (b): Nach Satz 16.4 gibt es eine τ-Nullumgebung U mit $A+U \cap B+U = \emptyset$. Da (E, τ) lokalkonvex ist, gibt es eine offene und konvexe Nullumgebung V mit $V \subseteq U$. Insbesondere ist $A+V = \bigcup_{a \in A} a+V$ offen, konvex und zu B disjunkt. Nach (a) (angewendet auf $A+V$ statt A) gibt es also ein $f \in E'$ und ein $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in A+V,\, b \in B: \qquad f(x) < \gamma_0 \leq f(b).$$

Wegen der Kompaktheit von A und der Stetigkeit von f folgt

$$\gamma_1 := \sup_{a \in A} f(a) = \max_{a \in A} f(a) < \gamma_0.$$

Insbesondere gibt es ein $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall a \in A,\, b \in B: \qquad f(a) \leq \gamma_1 < \gamma - \varepsilon < \gamma < \gamma_0 \leq f(b).$$

Hieraus folgt (b) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. □

16.6. Satz. *Eine konvexe Teilmenge A eines lokalkonvexen Hausdorffraums ist genau dann τ-abgeschlossen, wenn sie schwach (also bzgl. $\sigma(E, E')$) abgeschlossen ist.*

Beweis. Da die schwache Topologie $\sigma(E, E')$ gröber als die Ausgangstopologie τ ist, ist jede schwach abgeschlossene Menge insbesondere τ-abgeschlossen.

Sei nun A eine τ-abgeschlossene konvexe Menge und $x_0 \in E \backslash A$ beliebig. Da $K := \{x_0\}$ kompakt und konvex ist, gibt es nach dem Trennungssatz 16.5 von Hahn-Banach also ein stetiges lineares Funktional $x' \in E'$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall a \in A: \qquad \operatorname{Re} x'(x_0) < \gamma < \operatorname{Re} x'(a)\,. \tag{16.1}$$

Nach Definition von $\sigma(E, E')$ ist x' auch stetig bezüglich $\sigma(E, E')$. Damit ist auch das reell-lineare Funktional $g : x \mapsto \operatorname{Re} x'(x)$ stetig bezüglich $\sigma(E, E')$. Insbesondere ist die schwache Abschließung $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ von A in $g^{-1}([\gamma, \infty))$ enthalten und somit (nach (16.1)) $x_0 \notin \overline{A}^{\sigma(E,E')}$. Da x_0 ein beliebiger Punkt aus $E \setminus A$ war, folgt $A = \overline{A}^{\sigma(E,E')}$, d.h. A ist schwach abgeschlossen. □

16.7. Definition. Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem und sei $\emptyset \neq A \subseteq E$. Dann heißt die Menge

$$A^\circ := \{f \in F\,; \forall a \in A: \quad |\langle a, f \rangle| \leq 1\}$$

die (*absolut*) *polare* Menge zu A (bezüglich $\langle E, F \rangle$). Ebenso können wir für $\emptyset \neq B \subseteq F$ die zu B polare Menge

$$B_\circ := \{x \in E\,; \forall b \in B: \quad |\langle x, b \rangle| \leq 1\}$$

bilden.

Die folgenden Rechenregeln für die Polarenbildung rechnet man leicht nach.

16.8. Lemma. *Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem.*

(a) $\{0\}^\circ = F$, $E^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = E$, $F_\circ = \{0\}$.
(b) *Ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ und sind $A_1, A_2 \subseteq E$ zwei nicht leere Teilmengen von E mit $\lambda A_1 \subseteq A_2$, so gilt $A_2^\circ \subseteq \frac{1}{\lambda} A_1^\circ$.*
(c) *Ist X ein Untervektorraum von E, so ist $X^\circ = X^\perp = \{f \in F\,; \forall x \in X: \langle x, f \rangle = 0\}$ und X° ist ein Untervektorraum von F.*

(d) *Ist* $(A_i)_{i\in I}$ *eine Familie von nicht leeren Teilmengen von* E*, so gilt*

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ\,.$$

16.9. Beispiel. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt für die abgeschlossene Einheitskugel $B_E = \{x \in E\,;\, \|x\| \le 1\}$:

$$B_E^\circ = \{x' \in E'\,;\, \forall x \in B_E : \quad |x'(x)| \le 1\} = \{x' \in E'\,;\, \|x'\| \le 1\} = B_{E'}.$$

Mit $B_r(0) := \{x \in E\,;\, \|x\| \le r\}$ gilt nach Lemma 16.8 für alle $r > 0$:

$$B_r(0)^\circ = \big(rB_E\big)^\circ = \frac{1}{r}B_E^\circ = \frac{1}{r}B_{E'}\,.$$

16.10. Lemma. *Sei* $\langle E, F\rangle$ *ein Dualsystem und seien* $A \subseteq E$ *und* $B \subseteq F$ *zwei nicht leere Teilmengen von* E *bzw.* F*. Dann sind die hierzu polaren Mengen* A° *und* $B_\circ$ *absolutkonvex und abgeschlossen bezüglich* $\sigma(F, E)$ *bzw.* $\sigma(E, F)$*.*

Beweis. Für alle $u, v \in A^\circ$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| + |\beta| \le 1$ gilt:

$$\forall a \in A : \quad |\langle a, \alpha u + \beta v\rangle| = |\alpha\langle a, u\rangle + \beta\langle a, v\rangle| \le |\alpha|\cdot|\langle a, u\rangle| + |\beta|\cdot|\langle a, v\rangle| \le 1\,.$$

Also folgt $\alpha u + \beta v \in A^\circ$.

Da $B_{\mathbb{K}} := \{\lambda \in \mathbb{K}\,;\, |\lambda| \le 1\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}$ ist, ist wegen der Stetigkeit der linearen Funktionale $f_x : F \to \mathbb{K}$, $y \mapsto f_x(y) := \langle x, y\rangle$ bezüglich der Topologie $\sigma(F, E)$ auf F die Menge

$$A^\circ = \bigcap_{x\in A} f_x^{-1}(B_{\mathbb{K}})$$

$\sigma(F, E)$-abgeschlossen in F. Die Aussagen für $B_\circ$ zeigt man analog. □

16.11. Satz (Bipolarensatz). *Sei* $\langle E, F\rangle$ *ein Dualsystem und sei* A *eine nicht leere Teilmenge von* E*. Dann ist die Bipolare* $(A^\circ)_\circ$ *die* $\sigma(E, F)$*-Abschließung der absolutkonvexen Hülle von* A*.*

Beweis. Offensichtlich gilt stets $A \subseteq (A^\circ)_\circ$ und nach Lemma 16.10 ist $(A^\circ)_\circ$ bezüglich $\sigma(E, F)$ abgeschlossen. Also ist die $\sigma(E, F)$-Abschließung B der absolutkonvexen Hülle von A in der Bipolaren $(A^\circ)_\circ$ enthalten.

Ist umgekehrt $x_0 \in E \setminus B$ beliebig, so gibt es nach dem Trennungssatz 16.5 von Hahn-Banach ein $\sigma(E, F)$-stetiges lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall b \in B : \qquad \operatorname{Re} f(x_0) < \gamma < \operatorname{Re} f(b). \tag{16.2}$$

Wegen $0 \in B$ folgt $\gamma < 0$. Division von (16.2) durch γ ergibt

$$\forall b \in B : \qquad \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{\gamma}f(b)\Big) < 1 < \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{\gamma}f(x_0)\Big)\,.$$

Ist $b \in B$ beliebig, so gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $|f(b)| = e^{i\varphi}f(b) = f\big(e^{i\varphi}b\big)$. Da B absolutkonvex ist, folgt $-e^{i\varphi}b \in B$ und somit

$$\Big|\frac{1}{\gamma}f(b)\Big| = -\frac{1}{\gamma}|f(b)| = -\frac{1}{\gamma}e^{i\varphi}f(b) = \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{\gamma}f(-e^{i\varphi}b)\Big) < 1.$$

Zu dem Funktional $\frac{1}{\gamma}f \in (E, \sigma(E, F))'$ gibt es nach Satz 16.2 genau ein $y_0 \in F$ mit

$$\forall x \in E : \qquad \frac{1}{\gamma}f(x) = \langle x, y_0\rangle.$$

Es folgt $y_0 \in B^\circ \subseteq A^\circ$ und damit $(A^\circ)_\circ \subseteq (B^\circ)_\circ$. Wegen

$$|\langle x_0, y_0\rangle| = \left|\frac{1}{\gamma} f(x_0)\right| \geq \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\gamma} f(x_0)\right) > 1$$

ist $x_0 \notin (A^\circ)_\circ$. Da $x_0 \in E \setminus B$ beliebig war, folgt $(A^\circ)_\circ \subseteq B$ und damit insgesamt $B = (A^\circ)_\circ$. □

16.12. Folgerung. *Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem und sei A eine nicht leere Teilmenge von E. Dann gilt $\big((A^\circ)_\circ\big)^\circ = A^\circ$.*

Beweis. Nach Lemma 16.10 ist A° absolutkonvex und $\sigma(F, E)$-abgeschlossen stimmt also mit seiner $\sigma(F, E)$-abgeschlossenen absolutkonvexen Hülle überein. Wenden wir also den Bipolarensatz 16.11 auf das Dualsystem $[F, E]$ mit $[f, e] := \langle e, f\rangle$ für alle $e \in E$, $f \in F$ an, so folgt die Behauptung. □

16.13. Folgerung. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $M > 0$ und A eine nicht leere Teilmenge von E mit*

$$\forall x' \in E' : \qquad \|x'\| \leq M \sup_{a\in A} |x'(a)| .$$

Dann gilt für die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von A:

$$\frac{1}{M} B_E \subseteq \overline{\operatorname{absconv}(A)} .$$

Beweis. Nach Voraussetzung und Beispiel 16.9 gilt

$$A^\circ \subseteq \left\{x' \in E' ;\ \frac{1}{M}\|x'\| \leq 1\right\} = M B_{E'} = \left(\frac{1}{M} B_E\right)^\circ .$$

Nach dem Bipolarensatz 16.11 und Satz 16.6 folgt

$$\frac{1}{M} B_E = \left(\left(\frac{1}{M} B_E\right)^\circ\right)_\circ \subseteq (A^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{absconv}(A)}^{\sigma(E,F)} = \overline{\operatorname{absconv}(A)}^{\|\cdot\|}$$

und damit die Behauptung. □

Die Polaren von Nullumgebungen in lokalkonvexen Hausdorffräumen spielen, wie die folgenden Aussagen zeigen werden, eine wichtige Rolle.

16.14. Satz. *Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Für eine Teilmenge H des algebraischen Dualraums $E^\#$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *H ist gleichstetig, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Nullumgebung V in (E, τ) mit $H(V) := \{h(v) ;\ h \in H, v \in V\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} ;\ |\lambda| \leq \varepsilon\}$.*

(b) *Es gibt eine Nullumgebung U in (E, τ) mit $H \subseteq U^\circ \cap E'$ bezüglich des Dualsystems $\langle E, E^\#\rangle$.*

(c) *Es gibt eine Nullumgebung U in (E, τ) mit $H \subseteq U^\circ$ bezüglich des Dualsystems $\langle E, E'\rangle$.*

(d) *Es gibt eine Nullumgebung U in (E, τ) mit $H \subseteq U^\circ$ bezüglich des Dualsystems $\langle E, E^\#\rangle$.*

Beweis. (a)$\Longrightarrow$(b): Ist H gleichstetig, so ist $H \subseteq E'$ und zu $\varepsilon := 1$ gibt es eine Nullumgebung U in (E, τ) mit $H(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} ;\ |\lambda| \leq 1\}$. Also folgt $H \subseteq U^\circ \cap E'$.

(b)$\Longrightarrow$(c): Dies ist offensichtlich, da die Polare von U bezüglich $\langle E, E'\rangle$ gleich dem Schnitt der Polaren bezüglich $\langle E, E^\#\rangle$ mit E' ist.

(c)$\Longrightarrow$(d) ist trivial.

(d)$\Longrightarrow$(a): Sei $H \subseteq U^\circ$ für eine Nullumgebung U in (E, τ), wobei die Polare bezüglich $\langle E, E^\#\rangle$ gebildet sei. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist auch εU eine τ-Nullumgebung in E und $H(\varepsilon U) = \varepsilon H(U) \subseteq \varepsilon\{\lambda \in \mathbb{K} ;\ |\lambda| \leq 1\}$. Insbesondere ist die Bedingung aus (a) erfüllt und H ist gleichstetig. □

16.15. Folgerung. *Sei (E,τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum.*

(a) *Für jede Nullumgebung U ist U° gleichstetig, absolutkonvex und abgeschlossen in den Topologien $\sigma(E^\#,E)$ und $\sigma(E',E)$.*

(b) *Ist $H \subseteq E^\#$ gleichstetig, so gilt $\overline{\operatorname{absconv}(H)}^{\sigma(E^\#,E)} \subseteq E'$ und $\overline{\operatorname{absconv}(H)}^{\sigma(E^\#,E)}$ ist gleichstetig.*

Beweis. (a) ist klar nach den Satz 16.14 und Lemma16.10.

(b) Nach Satz 16.14 ist $H \subseteq U^\circ$ (bzgl. $\sigma(E^\#,E)$) für eine τ-Nullumgebung U. Mit dem Bipolarensatz 16.11 und Folgerung 16.13 folgt

$$\overline{\operatorname{absconv}(H)}^{\sigma(E^\#,E)} = (H_\circ)^\circ \subseteq \big((U^\circ)_\circ\big)^\circ = U^\circ.$$

Mit Satz 16.14 folgt die Behauptung. □

Der Satz 12.10 von Banach-Alaoglu gestattet folgende Verallgemeinerung auf den Fall lokalkonvexer Räume, die sich ebenfalls mit Hilfe des Satzes von Tychonov beweisen läßt:

16.16. Satz (Satz von Alaoglu-Bourbaki). *Für jede Nullumgebung U eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E,τ) ist U° kompakt bezüglich $\sigma(E^\#,E)$ und $\sigma(E',E)$.*

Beweis. $\mathbb{K}^E$ ist - versehen mit der Produkttopologie - ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Ein diese Topologie definierendes Halbnormensystem ist gegeben durch $p_x(f) := |\pi_x(f)|$ für alle $f \in \mathbb{K}^E$, $x \in E$, wobei $\pi_x : \mathbb{K}^E \to \mathbb{K}$ die Projektion auf die mit x indizierte Komponente sei. Die Produkttopologie auf $\mathbb{K}^E$ ist die gröbste Topologie auf $\mathbb{K}^E$, für die alle π_x, $x \in E$, stetig sind. Daher ist

$$F := \{\lambda = (\lambda_x)_{x\in E} \in \mathbb{K}^E\,;\, \forall x,y \in E, \alpha,\beta \in \mathbb{K} : \quad \alpha\pi_x(\lambda) + \beta\pi_y(\lambda) - \pi_{\alpha x+\beta y}(\lambda) = 0\}$$

ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathbb{K}^E$. Die Abbildung $\phi : E^\# \to \mathbb{K}^E$ mit $\phi(f) := (f(x))_{x\in E}$ für alle $f \in E^\#$ ist ein Monomorphismus mit $\phi(E^\#) = F$. Wegen $p_x(\phi(f)) = |f(x)|$ für alle $x \in E$ folgt: ϕ ist ein topologischer Isomorphismus von $(E^\#, \sigma(E^\#,E))$ nach F versehen mit der von der Produkttopologie induzierten Relativtopologie. Sei nun U eine beliebige τ-Nullumgebung. Da U absorbant ist, folgt $E = \bigcup_{r>0} rU$. Zu jedem $x \in E$ gibt es also ein $r(x) > 0$ mit $x \in r(x)U$. Für alle $f \in U^\circ$ und alle $x \in E$ folgt $|f(x)| = r(x)\big|f\big(\frac{1}{r(x)}x\big)\big| \le r(x)$. Somit erhalten wir

$$\phi(U^\circ) \subseteq F \cap K \quad \text{mit} \quad K := \big\{\lambda = (\lambda_x)_{x\in E}\,;\, \forall x \in E : \, |\lambda_x| \le r(x)\big\}.$$

Nach dem Satz von Tychonoff ist K kompakt. Da U° in $(E^\#, \sigma(E^\#,E))$ und daher auch $\phi(U^\circ)$ in F abgeschlossen ist, ist $\phi(U^\circ)$ kompakte Teilmenge von F und daher auch U° kompakt in $(E^\#, \sigma(E^\#,E))$. Wegen $U^\circ \subseteq E'$ (nach Folgerung 16.15) und, da die Relativtopologie von $\sigma(E^\#,E)$ auf E' mit $\sigma(E',E)$ übereinstimmt, folgt die Kompaktheit von U° als Teilmenge von $(E', \sigma(E',E))$. □

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 16.14 und dem Satz 16.16 von Alaoglu-Bourbaki erhalten wir:

16.17. Folgerung. *Sei (E,τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Dann ist jede gleichstetige Teilmenge von $E^\#$ relativkompakt bezüglich $\sigma(E^\#,E)$ und $\sigma(E',E)$.*

16.18. Definition. Eine Teilmenge B eines topologischen Vektorraums (E,τ) heißt *beschränkt* (bezüglich τ oder in (E,τ)), falls es zu jeder τ-Nullumgebung U in E ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $B \subseteq nU$.

In Aufgabe 16.4 sind einige elementare Aussagen über beschränkte Mengen zusammengefaßt.

16.19. Satz. *Sei $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ eine Familie von stetigen, linearen Abbildungen zwischen zwei lokalkonvexen Hausdorffräumen (E,τ_E), (F,τ_F). Für jede kompakte, absolutkonvexe Teilmenge K von (E,τ) mit der Eigenschaft, daß für alle $x \in K$ die Menge $H(x) := \{Tx\,;\, T \in H\}$ in (F,τ_F) beschränkt ist, ist die Menge $H(K) = \{Tx\,;\, T \in H,\, x \in K\}$ beschränkt in (F,τ_F).*

Beweis. Sei W eine beliebige Nullumgebung in (F,τ_F). Dann gibt es eine absolutkonvexe, abgeschlossene Nullumgebung V in (F,τ_F) mit $V+V \subseteq W$. Wegen der Stetigkeit aller Abbildungen aus H ist dann auch die Menge

$$A := \bigcap_{T\in H} T^{-1}(V)$$

abgeschlossen in (E,τ_E). Sei nun $x \in K$ beliebig. Wegen der Beschränktheit von $H(x)$ in (F,τ_F) gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $H(x) \subseteq nV$, d.h. es gilt $x \in nA$. Es folgt also

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap nA)\,.$$

Nach dem Baireschen Kategoriensatz (in der Form von Satz 5.5 im Skriptum zur Topologie [**2**]) gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $K \cap nA$ nicht leeres Inneres bezüglich der Relativtopologie von τ_E auf K besitzt. Sei also x_0 ein innerer Punkt von $K \cap nA$ bezüglich dieser Relativtopologie. Dann gibt es eine absolutkonvexe Nullumgebung U in (E,τ) mit $(x_0+U) \cap K \subseteq nA$. Da K und somit auch $K - x_0$ kompakt ist gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $K - x_0 \subseteq pU$, d.h. mit $K \subseteq x_0 + pU$ (vergl. Aufgabe 16.4).

Sei nun $x \in K$ beliebig. Dann ist $x - x_0 \in pU$ und (wegen der Konvexität von K) gilt

$$y := \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)x_0 + \frac{1}{p}x \in K.$$

Es folgt $x = py + (1-p)x_0$ sowie

$$y = x_0 + \frac{1}{p}(x - x_0) \in K \cap (x_0 + U) \subseteq nA.$$

Für alle $T \in H$ gilt also

$$Tx = pTy + (1-p)Tx_0 \in pT(nA) + (1-p)T(nA)$$

und daher

$$Tx \in pnV + (1-p)nV \subseteq pn(V+V) \subseteq pnW.$$

Da dies für alle $T \in H$ und $x \in K$ gilt, folgt $H(K) \subseteq pnW$ und die Beschränktheit von $H(K)$ bezüglich τ_F ist bewiesen. □

In einem lokalkonvexen Hausdorffraum (E,τ) gibt es auf E neben der Ausgangstopologie τ auch noch die schwache Topologie $\sigma(E,E')$. Es zeigt sich, daß eine Teilmenge genau dann schwach beschränkt ist, wenn sie τ-beschränkt ist:

16.20. Satz (Satz von Mackey). *In einem lokalkonvexen Hausdorffraum (E,τ) ist eine Teilmenge A genau dann τ-beschränkt, wenn sie $\sigma(E,E')$-beschränkt ist.*

Beweis. Da $\sigma(E,E')$ gröber als τ ist, ist jede τ-beschränkte Menge auch bezüglich $\sigma(E,E')$ beschränkt. Sei nun $A \subseteq E$ $\sigma(E,E')$-beschränkt und sei U eine beliebige τ-Nullumgebung. Nach Lemma 11.7 hat (E,τ) eine Nullumgebungsbasis aus abgeschlossenen, absolutkonvexen Nullumgebungen. Es gibt also eine abgeschlossene, absolutkonvexe τ-Nullumgebung V mit $V \subseteq U$. Nach dem Bipolarensatz 16.11 gilt $V = (V^\circ)_\circ$ und nach dem Satz von Alaoglu–Bourbaki 16.16 ist V° $\sigma(E',E)$-kompakt. Nach Definition der Topologie $\sigma(E',E)$ ist für alle $x \in E$ die Abbildung $x' \mapsto x'(x)$ stetig von $(E',\sigma(E',E))$ nach

$\mathbb{K}$. Da A nach Voraussetzung $\sigma(E, E')$-beschränkt ist, gibt es (nach Aufgabe 16.4(g)) zu jedem $x' \in V^\circ$ ein $\gamma_{x'} > 0$ mit $|x'(a)| \leq \gamma_{x'}$ für alle $a \in A$. Nach Satz 16.19 (angewendet auf $K := V^\circ$ und $H := \{x' \mapsto x'(a)\,;\, a \in A\}$) ist also $\{x'(a)\,;\, a \in A,\, x' \in V^\circ\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$. Daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall a \in A,\, x' \in V^\circ : \qquad |f(x)| \leq n.$$

Es folgt $\frac{1}{n}A \subseteq (V^\circ)_\circ = V$ und daher $A \subseteq nV \subseteq nU$. Damit ist gezeigt, daß die Menge A auch τ-beschränkt ist. □

16.21. Folgerung. *Sei A eine Teilmenge eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$, so daß*

$$\forall x' \in E' : \qquad \sup_{a \in A} |x'(a)| < \infty.$$

Dann ist A normbeschränkt, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $\|a\| \leq C$ für alle $a \in A$.

Beweis. Nach Aufgabe 16.4 besagt die Voraussetzung gerade, daß die Menge A schwach beschränkt ist. Nach dem Satz von Mackey muß sie also auch in der Normtopologie beschränkt sein. □

16.22. Definition. Sei K eine Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums E. Eine Teilmenge A von K heißt *extremale Teilmenge von K*, falls gilt

$$\forall x, y \in K \quad \forall \alpha \in (0,1) : \qquad \alpha x + (1-\alpha)y \in A \quad \Longrightarrow \quad x, y \in A.$$

Dies bedeutet, daß kein Punkt von A auf einer Strecke liegen kann, von deren Endpunkten wenigstens einer in $K \setminus A$ liegt. Ein Punkt $x_0 \in K$ heißt *Extremalpunkt von K*, falls gilt:

$$\forall x, y \in K \quad \forall \alpha \in (0,1) : \qquad \alpha x + (1-\alpha)y = x_0 \quad \Longrightarrow \quad x = y = x_0\,,$$

d.h. $\{x_0\}$ ist einpunktige extremale Teilmenge von K. Für $K \subset E$ bezeichne K_e die Menge aller Extremalpunkte von K. Insbesondere sind also stets K und $\emptyset$ extremale Teilmengen von K. Diese werden wir triviale extremale Teilmengen nennen.

16.23. Beispiele. Sei $E := \mathbb{R}^3$.

(a) Für die abgeschlossene euklidische Einheitskugel $B = \{x \in \mathbb{R}^3\,;\, |x| \leq 1\}$ gilt: $B_e = S := \{x \in \mathbb{R}^3\,;\, |x| = 1\}$ und jede Teilmenge der Sphäre S ist eine extremale Teilmenge von B.

(b) Jede Teilmenge von S ist extremale Teilmenge von S.

(c) U und $\emptyset$ sind die einzigen extremalen Teilmengen der offenen euklidische Einheitskugel U. Insbesondere hat U keine Extremalpunkte.

(d) Sei K die konvexe Hülle von

$$P := (0,0,1), \qquad Q := (0,0,-1), \qquad C := \{(x,y,0)\,;\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Beispiele für nichttriviale extremalen Teilmengen sind $\{P\}$, $\{Q\}$ und alle Teilmengen von C. Auch alle Verbindungsstrecken von P bzw. Q zu Punkten aus C sind extremale Teilmengen. Die Menge der Extremalpunkte ist die abgeschlossene Menge $K_e = \{P, Q\} \cup C$.

(e) Sei nun K die konvexe Hülle von

$$P := (0,0,1), \qquad Q := (0,0,-1), \qquad C := \{(x,y,0)\,;\, (1-x)^2 + y^2 = 1\}.$$

Beispiele für nichttriviale extremalen Teilmengen sind $\{P\}$, $\{Q\}$ und alle Teilmengen von $C \setminus \{(0,0,0)\}$. Auch die Verbindungsstrecke von P zu Q und alle Verbindungsstrecken von P bzw. Q zu von $(0,0,0)$ verschiedenen Punkten aus C sind extremale Teilmengen. Die Menge der Extremalpunkte ist die in diesem Fall nicht abgeschlossene Menge $K_e = \{P, Q\} \cup (C \setminus \{(0,0,0)\})$.

(f) Der abgeschlossene Halbraum $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z \geq 0\}$ hat nur die Ebene $F := \{(x,y,0) \,;\, x,y \in \mathbb{R}\}$ als nichttriviale extremale Teilmenge. Insbesondere hat H keine Extremalpunkte.

16.24. Satz (Satz von Krein-Milman, 1940). *Sei (E,τ) ein separierter topologischer Vektorraum, so daß E' die Punkte von E trennt, und $\emptyset \neq K \subset E$ kompakt.*

(a) *Ist K zusätzlich konvex, so ist $K = \overline{\mathrm{conv}(K_e)}$. Insbesondere ist $K_e \neq \emptyset$.*
(b) *Ist (E,τ) zusätzlich lokalkonvex, so ist $K \subseteq \overline{\mathrm{conv}(K_e)}$. Also ist auch in diesem Fall $K_e \neq \emptyset$.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}$ die Menge aller abgeschlossenen, nicht leeren, extremalen Teilmengen von K. Wegen $K \in \mathcal{E}$ ist $\mathcal{E}$ nicht leer. Wir vermerken zunächst:

(i) *Ist $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ mit $A_0 := \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$, so ist $A_0 \in \mathcal{E}$.* Dies rechnet man mit Hilfe der Definition der extremalen Teilmengen unmittelbar nach.

(ii) *Ist $A \in \mathcal{E}$ und $f \in E'$, so ist*

$$\emptyset \neq A_f := \{x \in E \,;\, \mathrm{Re}\, f(x) = \mu_f := \max_{y\in A} \mathrm{Re}\, f(y)\} \in \mathcal{E}.$$

Dies sieht man so: Wegen der Kompaktheit von A ist $A_f \neq \emptyset$. Seien nun $x,y \in K$ mit $\alpha x + (1-\alpha)y \in A_f$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Es folgt

$$\mu_f = \mathrm{Re}\big(f(\alpha x + (1-\alpha)y)\big) = \alpha\, \mathrm{Re}\, f(x) + (1-\alpha)\, \mathrm{Re}\, f(y)\,.$$

Wegen $\mathrm{Re}\, f(x) \leq \mu_f$ und $\mathrm{Re}\, f(y) \leq \mu_f$ ist dies nur möglich, wenn $\mathrm{Re}\, f(x) = \mu_f = \mathrm{Re}\, f(y)$ erfüllt ist.

(iii) *Für alle $A \in \mathcal{E}$ ist $A \cap K_e$ nicht leer.* Sei also A eine beliebige abgeschlossene, nicht leere, extremale Teilmenge von K. Wir setzen

$$\mathcal{E}_A := \{B \in \mathcal{E} \,;\, B \subseteq A\}.$$

$\mathcal{E}_A$ ist eine (wegen $A \in \mathcal{E}_A$) nicht leere durch die Inklusion teilweise geordnete Menge. Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_A$ eine beliebige totalgeordnete Teilmenge von $\mathcal{E}_A$. Wegen der Kompaktheit von K ist dann auch $C := \bigcap_{D\in\mathcal{K}} D$ kompakt, nicht leer und extremal (nach Beweisteil (i)), d.h. $C \in \mathcal{E}_A$. Da also jede total geordnete Teilmenge von $\mathcal{E}_A$ eine untere Schranke in $\mathcal{E}_A$ hat, besitzt $\mathcal{E}_A$ nach dem Zornschen Lemma wenigstens ein minimales Element G. Dann kann keine echte Teilmenge von G ein Element von $\mathcal{E}$ sein. Wegen (ii) folgt insbesondere $G_f = G$ für alle $f \in E'$. Da E' die Punkte von E trennt, kann G nur aus einem Punkt bestehen, d.h. es ist $G = \{x_0\}$ für ein $x_0 \in A \cap K_e$.

(iv) Mit $H := \mathrm{conv}(K_e)$ folgt $H \subseteq \mathrm{conv}(K)$ und nach (iii): $A \cap H \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{E}$.

(v) *Beweis zu* (a):Da K kompakt und konvex ist, ist $\overline{H} \subseteq K$. Weil E' die Punkte von E trennt, ist $\langle R, E'\rangle$ ein Dualsystem. Da $\sigma(E,E')$ gröber als τ ist, ist K und auch $\overline{H}$ $\sigma(E,E')$-kompakt. Sei nun $x_0 \in E \setminus \overline{H}$. Nach dem Trennungssatz 16.5 von Hahn-Banach gibt es ein Funktional $f \in E' = (E, \sigma(E,E'))'$ mit

$$\sup_{x\in\overline{H}} \mathrm{Re}\, f(x) < \mathrm{Re}\, f(x_0). \tag{16.3}$$

Insbesondere ist $x_0 \notin K$, da sonst $K_f \cap \overline{H}$ nach (ii) und (iv) nicht leer wäre im Widerspruch zu (16.3). Also muß $\overline{H} = K$ gelten.

(vi) *Beweis zu* (b): Sei $x_0 \in E \setminus \overline{H}$ beliebig. Dann gibt es nach dem Trennungssatz 16.5 von Hahn-Banach ein Funktional $f \in E' = (E, \sigma(E,E'))'$ mit (16.3). Wie im Beweis zu (a) folgt $x_0 \notin K$. Also gilt $K \subseteq \overline{H} = \overline{\mathrm{conv}(K_e)}$. ☐

Eine Teilmenge A eines metrischen Raums heißt bekanntlich *präkompakt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in A$ gibt mit

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)\,.$$

In vollständigen metrischen Räumen ist eine Teilmenge bekanntlich genau dann präkompakt, wenn sie relativkompakt ist.

16.25. Definition. Wir nennen eine Teilmenge A eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ) *präkompakt* (oder *total beschränkt*), falls es zu jeder τ-Nullumgebung U endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in A$ gibt mit

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + U)\,.$$

Offensichtlich ist jede kompakte Menge in (E, τ) auch präkompakt. In metrisierbaren lokalkonvexen Hausdorffräumen stimmen die beiden Präkompaktheitsbegriffe überein (vergl. Aufgabe 16.6).

16.26. Satz. *In einem lokalkonvexen Hausdorffraum ist für jede präkompakte Teilmenge K von E auch deren konvexe Hülle $H = \operatorname{conv}(A)$ präkompakt.*

Beweis. Sei U eine beliebige τ-Nullumgebung. Dann gibt es eine offene, absolutkonvexe τ-Nullumgebung V mit $V + V \subseteq U$. Da K präkompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + V).$$

Die Menge

$$S := \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0, \infty)^n \,;\, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1\} \tag{16.4}$$

ist kompakt und konvex in $\mathbb{R}^n$. Wegen der Stetigkeit der reell linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to E \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 1$$

ist $\varphi(S) = \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ kompakt und konvex in E und es ist $\varphi(S) \subseteq H$. Es gibt also endlich viele $y_1, \ldots, y_m \in \varphi(S)$ mit

$$\varphi(S) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} (y_k + V)\,.$$

Wegen $x_1, \ldots, x_n \in \varphi(S)$ und der Konvexität von $\varphi(S) + V$ folgt

$$K \subseteq H \subseteq \varphi(S) + V \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} (y_k + V + V) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} (y_k + U)\,.$$

Also ist H präkompakt. □

16.27. Satz. *Sei A eine kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ), für die auch die abgeschlossene konvexe Hülle $B := \overline{\operatorname{conv} A}$ kompakt sei. Dann gilt:*

$$B_e \subseteq A_e \subseteq A\,.$$

In vollständigen, metrisierbaren lokalkonvexen Hausdorffräumen ist die Kompaktheitsforderung für B stets erfüllt (vergl. Teil (b) von Aufgabe 16.6).

Beweis. Wegen $B_e \cap A \subseteq A_e$ genügt es, $B_e \subseteq A$ zu zeigen.

Annahme: Es gibt einen Punkt $x_0 \in B_e \setminus A$. Nach Satz 16.4 gibt es eine Nullumgebung W in (E, τ) mit $(A+W) \cap (x_0 + W) = \emptyset$. Da τ eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen, abgeschlossenen Nullumgebungen besitzt, gibt es eine absolutkonvexe, abgeschlossene Nullumgebung $U \subseteq W$. Es folgt

$$(A+U) \cap (x_0 + U) = \emptyset. \tag{16.5}$$

Wegen der Kompaktheit von A gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in A$ mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n (x_j + U)$. Mit

$$K_j := \overline{\operatorname{conv}\big((x_j+U) \cap A\big)} \subseteq (x_j + U) \cap B \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

gilt: K_j ist kompakt, da B nach Voraussetzung kompakt ist. Daher ist auch die Menge $X := K_1 \times \cdots \times K_n \times S$ kompakt in $E^n \times \mathbb{R}^n$ mit S wie in (16.4). Die Abbildung

$$T : E^n \times \mathbb{R}^n \to E, \qquad (u_1, \ldots, u_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$$

ist stetig und linear. Also ist $A \subseteq T(X)$ und $T(X)$ ist kompakte und konvexe Teilmenge von B. Da B die abgeschlossene konvexe Hülle von A ist, folgt $T(X) = B$. Insbesondere gibt es $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S$ und $u_j \in K_j \subseteq (x_j + U) \cap B$, $j = 1, \ldots, n$, mit $x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$. Da x_0 ein Extremalpunkt von B ist, ist dies nur möglich, wenn $x_0 = u_{j_0}$ für ein $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Wegen $x_0 = u_{j_0} \in x_{j_0} + U$ steht dies im Widerspruch zu (16.5). Also war die Annahme falsch und es folgt die Behauptung. □

16.28. Satz. *Für die Einheitskugel B' des Dualraums von $(C(K), \|\cdot\|_K)$, K ein kompakter Hausdorffraum, gilt:*

$$B'_e = \{\lambda \delta_t \,;\, t \in K, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1\}$$

Beweis. **(i)** Die Abbildung

$$\delta : K \to \big(C(K)', \sigma(C(K)', C(K))\big) \qquad t \mapsto \delta_t,$$

ist nach dem Beweis zu Lemma 13.9 stetig[1]. Insbesondere ist also $\delta(K) = \{\delta_t \,;\, t \in K\}$ eine $\sigma(C(K)', C(K))$-kompakte Teilmenge der nach dem Satz 12.10 von Banach-Alaoglu ebenfalls $\sigma(C(K)', C(K))$-kompakten Menge B'. Ferner ist

$$\delta(K)_\circ = \{f \in C(K) \,;\, \forall t \in K \; |\delta_t(f)| = |f(t)| \leq 1\} = B_{C(K)}\,.$$

Mit dem Bipolarensatz 16.11 und Beispiel 16.9 folgt also

$$B' = (B_{C(K)})^\circ = (\delta(K)_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{absconv}(\delta(K))}^{w^*} = \overline{\operatorname{conv}(C)}^{w^*}.$$

Hierbei bezeichne $\overline{A}^{w^*}$ die Abschließung einer Menge $A \subset C(K)'$ in der schwach*-Topologie $\sigma(C(K)', C(K))$. Nach Satz 16.27 gilt also $B'_e \subseteq C_e \subseteq C$.Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß jeder Punkt aus C ein Extremalpunkt von B' ist.

(ii) *Wir zeigen zunächst $\delta(K) \subset B'_e$.* Sei also $t \in K$ beliebig und seien $x', y' \in B'$ und $\alpha \in (0,1)$ mit

$$\delta_t = \alpha x' + (1-\alpha) y'. \tag{16.6}$$

Zu zeigen ist $x' = y'$. In einem ersten Schritt beweisen wir:

(a) *Für alle $f \in C(K)$ mit $f(t) = 1 = \|f\|_K$ gilt $x'(f) = 1 = y'(f)$.* Wegen (16.6) gilt nämlich für solche Funktionen f:

$$1 = \delta_t(f) = \alpha x'(f) + (1-\alpha) y'(f).$$

[1] Im Beweis zu Lemma 13.9 wurde diese Stetigkeitsaussage im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gezeigt. Der Beweis der Stetigkeitsaussage überträgt sich aber in nahe liegender Weise auch auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Wegen $|x'(f)| \leq 1$ und $|y'(f)| \leq 1$ ist dies nur möglich, wenn $x'(f) = y'(f) = 1$ ist.

(b) *Für alle $0 \leq f \in C(K)$ mit $f(t) = 0$ gilt $x'(f) = y'(f) = 0$.* Um dies zu zeigen betrachten wir die durch

$$g(s) := 1 - \frac{f(s)}{\|f\|_K}, \qquad (s \in K)$$

definierte Funktion. Für diese gilt $g(t) = 1 = \|g\|_K$ und daher nach (a):

$$x'(1) - \frac{x'(f)}{\|f\|} = x'(g) = 1 = y'(g) = y'(1) - \frac{y'(f)}{\|f\|}.$$

Wegen $x'(1) = y'(1) = 1$ (nach (a)) folgt hieraus $x'(f) = y'(f) = 0$.

(c) Sei nun $f \in C(K)$ beliebig. Dann gilt

$$f - f(t) = g_1 - g_2 + i(g_3 - g_4)$$

mit $0 \leq g_j \in C(K)$, $g_j(t) = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} &g_1(s) := \max\{\operatorname{Re}(f(s) - f(t)), 0\}, \quad g_2(s) = \max\{-\operatorname{Re}(f(s) - f(t)), 0\}, \\ &g_3(s) := \max\{\operatorname{Im}(f(s) - f(t)), 0\}, \quad g_4(s) = \max\{-\operatorname{Im}(f(s) - f(t)), 0\}, \qquad (s \in K). \end{aligned}$$

Nach (b) folgt $x'(g_j) = 0 = y'(g_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, und damit nach (a):

$$x'(f) = x'(f - f(t)) + f(t)x'(1) = f(t)$$

und ebenso $y'(f) = f(t)$. Also gilt $x' = y' = \delta_t$.

(iii) Seien nun $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig mit $|\lambda| = 1$ und sei $t \in K$ beliebig. Sind $x', y' \in B'$ und $\alpha \in (0, 1)$ mit $\lambda\delta_t = \alpha x' + (1 - \alpha)y'$, so folgt $\delta_t = \alpha\overline{\lambda}x' + (1 - \alpha)\overline{\lambda}y'$ und daher nach (ii): $\delta_t = \overline{\lambda}x' = (1 - \alpha)\overline{\lambda}y'$ und hieraus $\lambda\delta_t = x' = y'$. Damit ist gezeigt, daß alle Punkte aus C Extremalpunkte von B' sind. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 16.

16.1. Aufgabe. Zeigen Sie: Ist K eine kompakte und A eine zu K disjunkte abgeschlossene Teilmenge eines separierten topologischen Vektorraums (E, τ), so gibt es disjunkte offene Mengen $V, W \subset E$ mit $K \subseteq V$, $A \subseteq W$ und $V \cap W = \emptyset$.

16.2. Aufgabe. Zeigen Sie, daß für ein lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ auf einem lokalkonvexen Hausdorffraum (E, τ) folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist stetig.

(b) Es gibt eine konvexe Nullumgebung U mit $f(U) \subseteq U_1(0) = \{\lambda \in \mathbb{K}\,;\, |\lambda| \leq 1\}$.

16.3. Aufgabe. Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie, daß $\langle E, E' \rangle$ ein Dualsystem ist.

16.4. Aufgabe. Sei $\mathcal{B}$ die Familie aller beschränkten Teilmengen eines lokalkompakten Hausdorffraums (E, τ). Zeigen Sie:

(a) Eine Menge B in E ist genau dann τ-beschränkt, wenn es zu jeder τ-Nullumgebung U ein $c > 0$ gibt mit $A \subseteq cU$.

(b) $A \subseteq B \in \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathcal{B}$. Insbesondere sind also beliebige Durchschnitte von beschränkten Mengen beschränkt.

(c) $A, B \in \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad A \pm B \in \mathcal{B}$.

(d) Endliche Vereinigungen von beschränkten Mengen sind beschränkt.

(e) Für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}$ ist auch die abgeschlossene, absolutkonvexe Hülle wieder beschränkt.

(f) Jede kompakte Teilmenge $K \subset E$ ist beschränkt.

(g) Eine Menge $A \subset E$ ist genau dann beschränkt, wenn für jede τ–stetige Halbnorm p gilt: $\sup_{a \in A} p(a) < \infty$.
(h) Eine Menge $B \subset E$ ist genau dann beschränkt, wenn für jede Halbnorm p_α eines die Topologie τ definierenden Halbnormensystems $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ gilt: $\sup_{b \in B} p_\alpha(b) < \infty$.
(i) Ist (F, τ_F) ein weiterer lokalkonvexer Hausdorffraum und ist $T : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung so ist für alle $B \in \mathcal{B}$ die Menge $T(B)$ in (F, τ_F) beschränkt.

16.5. Aufgabe. Bestimmen Sie alle extremalen Teilmengen von

$$K := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}.$$

16.6. Aufgabe. Sei (E, τ) ein metrisierbarer lokalkonvexer Hausdorffraum und sei d eine die Topologie τ erzeugende Metrik auf E. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge A von E ist genau dann τ-präkompakt, wenn sie in dem metrischen Raum (E, d) präkompakt ist.
(b) Ist (E, τ) vollständig, so ist für jede kompakte Teilmenge K von (E, τ) auch die Menge $\overline{\operatorname{conv}(K)}$ kompakt.

16.7. Aufgabe. Seien K_1 und K_2 zwei absolutkonvexe und kompakte Teilmengen eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ). Zeigen Sie, daß dann auch die absolutkonvexe Hülle $\operatorname{absconv}(K_1 \cup K_2)$ von $K_1 \cup K_2$ wieder τ-kompakt ist.

KAPITEL 17

Topologien auf dem Dualraum

17.1. Satz. *Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum, $\mathcal{B}$ und $\mathfrak{S}$ eine Familie von τ-beschränkten Teilmengen mit den drei folgenden Eigenschaften:*

(a) $\forall A, B \in \mathfrak{S} \quad \exists C \in \mathfrak{S}: \quad A \cup B \subseteq C$.

(b) $\forall A \in \mathfrak{S}\,,\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \exists B \in \mathfrak{S}: \quad \lambda A \subseteq B$.

(c) $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ *liegt dicht in* (E, τ).

Dann ist $\mathfrak{U}_{\mathfrak{S}} := \{B^\circ\,;\, B \in \mathfrak{S}\}$ Nullumgebungsbasis einer separierten, lokalkonvexen Topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$ auf E'. Ein die Topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$ definierendes, separierendes Halbnormensystem ist gegeben durch $\{p_A\,;\, A \in \mathfrak{S}\}$ mit

$$p_A(x') := \sup_{a \in A} |x'(a)| \qquad (x' \in E')$$

für alle $A \in \mathfrak{S}$. $\tau_{\mathfrak{S}}$ heißt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus $\mathfrak{S}$ oder kurz die $\mathfrak{S}$-Topologie auf E'.

Beweis. Nach Aufgabe 16.4(b) gilt $0 \leq p_A(x') < \infty$ für alle $x' \in E'$, $A \in \mathfrak{S}$ und man rechnet unmittelbar nach, daß alle p_A, $A \in \mathfrak{S}$, Halbnormen auf E' sind. Ist $x' \in E'$ mit $p_A(x') = 0$ für alle $A \in \mathfrak{S}$, so verschwindet x' auf der dichten Teilmenge $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ von E und daher (wegen der Stetigkeit von x') auf ganz E. Damit folgt, daß das Halbnormensystem $(p_A)_{A \in \mathfrak{S}}$ separierend ist und daher gemäß Lemma 11.14 eine lokalkonvexe Topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$ definiert, für die eine Nullumgebungsbasis gegeben ist durch

$$\mathfrak{V} := \Big\{\rho \bigcap_{j=1}^{n} \{x' \in E'\,;\, \rho > 0,\, p_{A_j}(x') \leq 1\}\,;\, n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}\Big\}.$$

Wegen

$$\{x' \in E'\,;\, p_A(x') \leq 1\} = \{x' \in E'\,;\, \forall a \in A:\ |x'(a)| \leq 1\} = A^\circ$$

für alle $A \in \mathfrak{S}$ folgt

$$\mathfrak{V} = \Big\{\rho \bigcap_{j=1}^{n} A_j^\circ\,;\, \rho > 0,\, n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}\Big\}.$$

Sind nun $\rho > 0$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}$ beliebig, so gibt es nach Voraussetzung (a) ein $B \in \mathfrak{S}$ mit $\bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq B$ und nach Voraussetzung (b) ein $C \in \mathfrak{S}$ mit $\frac{1}{\rho} B \subseteq C$ und daher mit $\frac{1}{\rho} \bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq C$. Mit Lemma 16.8 folgt

$$C^\circ \subseteq \rho\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^\circ = \rho \bigcap_{j=1}^{n} A_j^\circ.$$

Dies zeigt, daß $\mathfrak{U}_{\mathfrak{S}}$ eine Umgebungsbasis für $\tau_{\mathfrak{S}}$ ist. □

17.2. Beispiele. Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Die folgenden Mengenfamilien $\mathfrak{S}$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 17.1:

(a) die Familie $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$ aller endlichen Teilmengen von E. Die zugehörige $\mathfrak{S}$-Topologie stimmt mit der schwach-$*$-Topologie $\sigma(E', E)$ überein. Statt $(E', \sigma(E', E))$ schreiben wir auch E'_σ.

(b) die Familie $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}$ aller kompakten Teilmengen von E. Die zugehörige Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von E bezeichnen wir mit $\gamma(E', E)$. Statt $(E', \gamma(E', E))$ schreiben wir auch E'_γ.
(c) die Familie $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}$ aller präkompakten Teilmengen von E. Die zugehörige Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen präkompakten Teilmengen von E bezeichnen wir mit $c(E', E)$. Statt $(E', c(E', E))$ schreiben wir auch E'_c.
(d) die Familie $\mathfrak{S} = \mathcal{B}$ aller beschränkten Teilmengen von E. Die zugehörige Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Teilmengen von E bezeichnen wir mit $b(E', E)$ und nennen sie auch die *starke Topologie auf* E'. Statt $(E', b(E', E))$ schreiben wir auch E'_b und nennen E'_b den starken Dualraum von (E, τ).

17.3. Bemerkung. Sind $\mathfrak{S}_j$, $j = 1, 2$, zwei Familien von beschränkten Mengen in einem lokalkonvexen Hausdorffraum (E, τ), die den Voraussetzungen zu Satz 17.1 genügen, und gilt $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$, so ist $\tau_{\mathfrak{S}_1}$ gröber als $\tau_{\mathfrak{S}_2}$, d.h. $\tau_{\mathfrak{S}_1} \subseteq \tau_{\mathfrak{S}_2}$. Insbesondere folgt:

$$\sigma(E', E) \subseteq \gamma(E', E) \subseteq c(E', E) \subseteq b(E', E).$$

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so stimmen auf E' die Normtopologie und die starke Topologie überein. (Aufgabe 17.2).

17.4. Lemma. *Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Sei $H \subseteq rU^\circ$ für eine τ-Nullumgebung U und ein $r > 0$. Dann ist H beschränkt in E'_b.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für alle Nullumgebungen U in (E, τ) die Polare U° in E'_b beschränkt ist. Sei also U eine beliebige Nullumgebung in (E, τ) und V eine beliebige Nullumgebung in E'_b. Nach Definition der starken Topologie auf E' und Satz 17.1 gibt es also eine τ-beschränkte Menge $A \subset E$ mit $A^\circ \subseteq V$. Da A beschränkt ist, gibt es ein $\rho > 0$ mit $A \subseteq \rho U$. Mit Lemma 16.8 folgt $U^\circ \subseteq \rho A^\circ \subseteq \rho V$. Damit ist die starke Beschränktheit von U° gezeigt. □

17.5. Satz. *Sei (E, τ) ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum. Dann ist E'_b vollständig und es gibt in E' eine Folge von bezüglich $b(E', E)$ beschränkten, abgeschlossenen und absolutkonvexen Mengen $(B_n)_{n=1}^\infty$ mit*

$$B_n \subseteq B_{n+1} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ und mit } \quad E' = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$$

Beweis. Nach Aufgabe 12.2 besitzt (E, τ) eine abzählbare Nullumgebungsbasis $(U_n)_{n=1}^\infty$ mit

$$U_n \supseteq U_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und} \quad \bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$$

(letzteres nach Satz 11.12, da (E, τ) als metrisierbarer lokalkonvexer Raum insbesondere separiert ist). Durch Übergang zu den Polaren folgt

$$E' = \{0\}^\circ \supseteq U_{n+1}^\circ \supseteq U_n^\circ \supseteq \ldots \supseteq U_2^\circ \supseteq U_1^\circ.$$

Nach Satz 16.10 ist $B_n := U_n^\circ$ für alle $n \in \mathbb{N}$ absolutkonvex und $\sigma(E', E)$-abgeschlossen, also auch $b(E', E)$-abgeschlossen, und nach Lemma 17.4 ist B_n auch $b(E', E)$-beschränkt. Ist nun $x' \in E'$ beliebig, so ist $\{x'\}^\circ = \{x \in E\,;\, |x'(x)| \leq 1\}$ eine τ-Nullumgebung. Da $(U_n)_{n=1}^\infty$ eine τ-Nullumgebungsbasis in E ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subseteq \{x'\}^\circ$. Durch Übergang zu den Polaren folgt:

$$x' \in \big(\{x'\}^\circ\big)^\circ \subseteq U_n^\circ.$$

Damit ist gezeigt, daß $E' = \bigcup_{n=1}^\infty U_n^\circ$ gilt.

Zu zeigen bleibt noch die Vollständigkeit von E'_b. Sei also $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein beliebiges Cauchy-Netz in E'_b, d.h. für alle τ-beschränkten Mengen B in E und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\alpha_0 \in A$, so daß für alle $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ gilt $p_B(x'_\alpha - x'_\beta) < \varepsilon$. Hierbei ist $(p_B)_{B\in\mathcal{B}}$ das die Topologie $b(E', E)$ gemäß Satz 17.1 definierende Halbnormensystem mit

$$p_B(x') := \sup_{x\in B} |x'(x)| \qquad (x' \in E')$$

für alle τ-beschränkten Mengen B in E. Für beliebige $x \in E$ ist $\{x\}$ τ-beschränkt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $\alpha_0 \in A$ mit

$$\forall \alpha, \beta \geq \alpha_0 : \qquad |x'_\alpha(x) - x'_\beta(x)| = p_{\{x\}}(x'_\alpha - x'_\beta) < \varepsilon.$$

Das Netz $(x'_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ ist also ein Cauchy-Netz in $\mathbb{K}$ und somit (wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$) konvergent gegen ein $x_0^\#(x) \in \mathbb{K}$. Nach den Grenzwertrechenregeln ist die Abbildung $x_0^\# : x \mapsto x_0^\#(x)$ linear, d.h. $x_0^\# \in E^\#$. Zu zeigen bleibt: $x_0^\# \in E'$ und $x'_\alpha \to x_0^\#$ in E'_b.

Annahme: $x_0^\#$ ist unstetig. Nach Satz 16.14 (angewendet auf die Menge $H = \{x_0^\#\}$) gilt dann für jedes $n \in \mathbb{N}$: $x_0^\# \notin \left(\frac{1}{n}U_n\right)^\circ$, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in U_n : \qquad |x_0^\#(x_n)| > n. \tag{17.1}$$

Ist V eine beliebige τ-Nullumgebung in E, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $U_{n_0} \subseteq V$ (da $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullumgebungsbasis in (E, τ) ist). Für alle $n \geq n_0$ folgt dann $x_n \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq V$. Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist also konvergent gegen 0 in (E, τ) und daher insbesondere beschränkt in (E, τ), d.h. $B_0 := \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$. Daher gibt es ein $\alpha_0 \in A$ mit

$$\forall \alpha, \beta \geq \alpha_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \qquad |x'_\alpha(x_n) - x'_\beta(x_n)| \leq p_{B_0}(x'_\alpha - x'_\beta) \leq 1.$$

Gehen wir hierin zum Limes bezüglich β über, so erhalten wir insbesondere:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad |x'_{\alpha_0}(x_n) - x_0^\#(x_n)| \leq 1$$

und somit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad |x_0^\#(x_n)| \leq 1 + |x'_{\alpha_0}(x_n)| \leq 1 + p_{B_0}(x'_{\alpha_0})$$

im Widerspruch zu (17.1). Also war die Annahme falsch, d.h. es ist $x_0^\# \in E'$.

Sei nun $B \in \mathcal{B}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es ein $\alpha_0 \in A$ mit

$$\forall \alpha, \beta \geq \alpha_0 \quad \forall x \in B : \qquad |x'_\alpha(x) - x'_b(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Grenzübergang bezüglich β liefert:

$$\forall \alpha \geq \alpha_0 \quad \forall x \in B : \qquad |x'_\alpha(x) - x_0^\#(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

und es folgt

$$\forall \alpha \geq \alpha_0 : \qquad p_B(x'_\alpha - x_0^\#) \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

d.h. $x'_\alpha \to x_0^\#$ bezüglich $b(E', E)$. □

17.6. Lemma. *Eine absolutkonvexe Teilmenge A eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ) ist genau dann eine τ-Nullumgebung, wenn* $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$.

Beweis. Ist A eine Nullumgebung in (E, τ), so ist $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ wegen $0 \in \operatorname{int}(A)$.

Hat umgekehrt A einen inneren Punkt x_0, so sind die Mengen $A - x_0$ und $x_0 - A$ Nullumgebungen bezüglich τ. Da A absolutkonvex ist gilt

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(x_0 + A) + \frac{1}{2}(A - x_0).$$

Damit folgt, daß auch A eine τ-Nullumgebung ist. □

Insbesondere folgt mit diesem Lemma: Ist F Untervektorraum eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ) mit $\operatorname{int} F \neq \emptyset$, so ist schon $F = E$.

17.7. Definition. Ein topologischer Vektorraum heißt *lokalbeschränkt*, falls er eine beschränkte Nullumgebung besitzt.

Insbesondere ist also jeder normierte $\mathbb{K}$-Vektorraum lokalbeschränkt. Umgekehrt gilt:

17.8. Satz. *Jeder lokalbeschränkte lokalkonvexe Hausdorffraum (E, τ) ist normierbar, d.h. es gibt eine Norm $\|\cdot\|$ auf E, deren zugehörige Normtopologie mit τ übereinstimmt.*

Beweis. Hat (E, τ) eine beschränkte Nullumgebung B_0, so gibt es auch eine abgeschlossene, absolutkonvexe τ-Nullumgebung B mit $B \subseteq B_0$. Insbesondere ist auch B beschränkt. Für alle x in E definieren wir

$$\|x\| := \inf\{\rho > 0\,;\, x \in \rho B\}.$$

$\|\cdot\|$ ist als Minkowskifunktional zu der abgeschlossenen absolutkonvexen Nullumgebung B eine Halbnorm auf E. Sei nun $x \in E$ mit $\|x\| = 0$, d.h. mit $x \in \frac{1}{n}B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei U eine beliebige τ-Nullumgebung in E. Da B beschränkt ist, gibt es ein $r_U > 0$ mit $B \subseteq r_U U$. Es folgt für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$: $x \in \frac{1}{n}B \subseteq \frac{r_U}{n}U \subseteq U$. Also ist x in allen τ-Nullumgebungen enthalten. Da (E, τ) separiert ist, folgt hieraus $x = 0$. Damit ist gezeigt , daß $\|\cdot\|$ eine Norm ist. Da deren Einheitskugel eine τ-Nullumgebung ist, ist die zugehörige Normtopologie $\tau_{\|\cdot\|}$ gröber als τ. Ist umgekehrt U eine beliebige τ-Nullumgebung, so folgt $\frac{1}{r_U}B \subseteq U$, d.h. U ist auch eine $\|\cdot\|$-Nullumgebung. Die beiden Topologien stimmen also überein. □

17.9. Satz. *Sei (E, τ) ein metrisierbarer lokalkonvexer Hausdorffraum. Dann gilt: Entweder ist E'_b nicht metrisierbar oder E'_b ist schon ein Banachraum.*

Beweis. Nach Satz 17.5 ist E'_b vollständig und es gibt eine Folge von in E'_b abgeschlossenen, absolutkonvexen und beschränkten Teilmengen von E' mit $E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Ist also E'_b metrisierbar vermöge einer Metrik d, deren Topologie τ_d mit $b(E', E)$ übereinstimmt, so ist (E, d) ein vollständiger metrischer Raum. Nach dem Satz von Baire (bzw. Folgerung 3.9) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(B_{n_0}) \neq \emptyset$. Nach Lemma 17.6 ist B_{n_0} daher eine beschränkte Nullumgebung in E'_b. Wegen Satz 17.8 ist E'_b normierbar, wegen der Vollständigkeit von E'_b also sogar ein Banachraum bezüglich einer die Topologie $b(E', E)$ erzeugenden Norm. □

17.10. Definition. Eine Teilmenge T eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ) heißt eine *Tonne*, falls T abgeschlossen, absolutkonvex und absorbant ist. (E, τ) heißt *tonneliert*, falls in (E, τ) jede Tonne eine τ-Nullumgebung ist.

Insbesondere ist in lokalkonvexen Hausdorffräumen jede abgeschlossene, absolutkonvexe Nullumgebung eine Tonne.

17.11. Lemma. *Jeder vollständige metrisierbare lokalkonvexe Hausdorffraum ist tonneliert.*

Beweis. Ist T eine Tonne in (E, T), so ist $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT$. Nach Folgerung 3.9 ist $\operatorname{int}(nT) \neq \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$ also auch $\operatorname{int}(T) \neq \emptyset$. Mit Lemma 17.6 folgt: T ist eine τ-Nullumgebung. □

Vollständige, metrisierbare Räume werden auch *Frécheträume* genannt[1].

[1]nach Maurice René Fréchet, (1878–1973).

17.12. Satz (Satz von Mackey auf dem Dualraum). *Für eine Teilmenge B' des Dualraums E' eines tonnelierten, lokalkonvexen Hausdorffraums (E,τ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *B' ist stark beschränkt (also in E'_b beschränkt).*
(b) *Es gibt eine abgeschlossene Nullumgebung U in (E,τ) mit $B' \subseteq U^\circ$.*
(c) *B' ist gleichstetig.*
(d) *B' ist beschränkt in E'_σ.*
(e) *B' ist beschränkt in E'_γ.*
(f) *B' ist beschränkt in E'_c.*

Beweis. Die Implikationen (a)$\Longrightarrow$(f)$\Longrightarrow$(e)$\Longrightarrow$(d) gelten nach Bemerkung 17.3, die Äquivalenz von (b) und (c) gilt nach Satz 16.14 und die Aussage (b)$\Longrightarrow$(a) gilt nach Lemma 17.4. Zu zeigen ist also nur die Implikation (d)$\Longrightarrow$(b).

Sei also B' eine beliebige in E'_σ beschränkte Menge. Dann ist $(B')_\circ$ abgeschlossen und absolutkonvex in $(E,\sigma(E,E'))$ nach Lemma 16.10 und nach Satz 16.6 auch in (E,τ) abgeschlossen. Ist $x \in E$ beliebig, so folgt wegen der $\sigma(E',E)$-Beschränktheit von B':

$$C := \sup_{b' \in B'} |b'(x)| < \infty\,.$$

Daher ist $x \in \lambda(B')_\circ$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \geq C$. $(B')_\circ$ ist also absorbant und erfüllt alle Eigenschaften einer Tonne. Da (E,τ) ein tonnelierter Raum ist, ist $(B')_\circ$ eine τ-Nullumgebung und wegen $((B')_\circ)^\circ = B$ (nach dem Bipolarensatz 16.11) folgt (b). □

17.13. Satz. *In einem metrisierbaren lokalkonvexen Hausdorffraum (E,τ) sind die Aussagen (a)-(c) in Satz 17.12 äquivalent.*

Beweis. Die Äquivalenz von (b) und (c) und die Implikation (b)$\Longrightarrow$(a) folgen wie im Beweis zu Satz 17.12. Zu zeigen ist also nur (a)$\Longrightarrow$(b). Sei also B' eine beliebige in E'_b beschränkte Teilmenge von E'. Da (E,τ) metrisierbar ist, besitzt (E,τ) nach Aufgabe 12.2 eine abzählbare Nullumgebungsbasis $(U_n)_{n=1}^\infty$ von abgeschlossenen, absolutkonvexen Nullumgebungen mit

$$U_n \supseteq U_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \quad \bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}\,.$$

Annahme: Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $B' \subseteq rU_n^\circ$ für ein $r > 0$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_n$ mit

$$\sup_{b' \in'} |b'(x_n)| > n. \tag{17.2}$$

Die Menge $A := \{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ ist dann eine beschränkte Teilmenge von (E,τ). Insbesondere ist A° eine Nullumgebung in E'_b. Da B' nach Voraussetzung in E'_b beschränkt ist, gibt es ein $\rho > 0$ mit $B' \subseteq \rho A^\circ$. Damit folgt

$$\forall b' \in B' \quad \forall n \in \mathbb{N}: \qquad |b'(x_n)| \leq \rho$$

im Widerspruch zu (17.2). Also war die Annahme falsch. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $r > 0$ mit $B' \subseteq rU_n^\circ = \left(\frac{1}{r}U_n\right)^\circ$ und es folgt (b). □

17.14. Satz. *Sei (E,τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Auf jeder gleichstetigen Teilmenge $H \subset E'$ stimmen die von den Topologien $\sigma(E',E)$, $\gamma(E',E)$ und $c(E',E)$ induzierten Relativtopologien überein.*

Beweis. Wegen Bemerkung 17.3 genügt es zu zeigen, daß für alle $x' \in H$ jede Umgebung von x' in der von $c(E',E)$ induzierten Topologie auch eine Umgebung von x' in der von $\sigma(E', E)$ induzierten Topologie ist. Ist W eine Umgebung von $x'_0 \in H$ in der Relativtopologie von $c(E', E)$, so gibt es eine präkompakte Menge $K \subset E$ mit $(x'_0 + K^\circ) \cap H \subseteq W$.

Wegen der Gleichstetigkeit von H gibt es eine τ-Nullumgebung V in E mit $H(V) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K}\,;\ |\lambda| \leq \frac{1}{3}\}$. Da K präkompakt ist, findet man endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + V).$$

Dann ist

$$U := \left\{ x' \in E'\,;\ |x'(x_j)| \leq \frac{1}{3} \text{ für } j = 1, \ldots, n \right\}$$

eine Nullumgebung in E'_σ und $(x'_0 + U) \cap H$ ist eine Umgebung von x'_0 in der von $\sigma(E', E)$ auf H induzierten Relativtopologie. Sei nun $x' \in (x'_0 + U) \cap H$ beliebig. Ist $x \in K$ beliebig, so folgt $x \in x_k + V$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ und

$$\begin{aligned} |x'(x) - x'_0(x)| &\leq |x'(x - x_k)| + |x'(x_k) - x'_0(x_k)| + |x'_0(x_k - x)| \\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1. \end{aligned}$$

Es folgt $x' - x'_0 \in K^\circ$ und somit $(x'_0 + U) \cap H \subseteq (x'_0 + K^\circ) \cap H \subseteq W$. Also ist W auch in der von $\sigma(E', E)$ auf H induzierten Relativtopologie eine Umgebung von x'_0. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 17.

17.1. Aufgabe. Zeigen Sie, daß die Mengensysteme der Beispiele 17.2 tatsächlich die Bedingungen zu Satz 17.1 erfüllen.

17.2. Aufgabe. Zeigen Sie, daß auf dem Dualraum eines normierten Raums die starke Topologie und die Normtopologie übereinstimmen.

KAPITEL 18

Der biduale Raum, Reflexivität

Ist (E,τ) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, so heißt $E'' := (E'_b)'$ der *biduale Raum* zu (E,τ). Mit der Identifikation aus Satz 16.2 und nach Bemerkung 17.3 folgt

$$E = (E'_\sigma)' \subseteq (E'_b)' = E'',$$

Wobei die Einbettung $J : E \to E''$, $x \mapsto J_x$ gegeben ist durch $J_x(x') := x'(x)$ für alle $x \in E$, $x' \in E'$.

Gemäß Satz 17.1 und den anschließenden Beispielen können wir auf E'' wieder verschiedene $\mathfrak{S}$-Topologien betrachten.

Die von $\sigma(E'', E')$ vermöge der obigen Einbettung auf E induzierte Relativtopologie stimmt mit $\sigma(E, E')$ überein. Insbesondere ist die kanonische Einbettung

$$J : (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E'))$$

stetig.

Bei normierten Räumen haben wir auch die kanonische Normtopologie auf E'' zur Verfügung.

18.1. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist die kanonische Einbettung $J : E \to E''$ eine Isometrie, d.h. es gilt*

$$\forall x \in E : \qquad \|x\|_E = \|J_x\|_{E''} := \sup_{x' \in B_{E'}} |x'(x)|\,,$$

wobei $B_{E'}$ die abgeschlossene Einheitskugel von E' bezeichne.

Beweis. Für alle $x \in E$ gilt $\|J_x\|_{E''} = \sup_{x' \in B_{E'}} |J_x(x')| = \sup_{x' \in B_{E'}} |x'(x)| \leq \|x\|_E$. Nach Hahn-Banach (vergl. Aufgabe 6.1) gilt in der letzten Ungleichung sogar das Gleichheitszeichen. $\square$

Allgemeiner gilt:

18.2. Satz. *Ist (E,τ) ein metrisierbarer oder ein tonnelierter lokalkonvexer Hausdorffraum, so induziert $(E'_b)'_b$ auf E die Ausgangstopologie τ.*

Beweis. Eine Nullumgebungsbasis für $(E'_b)'_b$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{U}''_b := \{(B')^\circ\,;\, B' \text{ beschränkt in } E'_b\},$$

wobei die Polare bezüglich $\langle E', E''\rangle$ gebildet ist. Nach den Sätzen 17.12 und 17.13 gibt es zu jeder in E'_b beschränkten Menge B' eine abgeschlossene, absolutkonvexe Nullumgebung U in (E,τ) mit $B' \subseteq U^\circ$ (Polare bezüglich $\langle E, E'\rangle$) und daher mit $(B')^\circ \supseteq (U^\circ)^\circ$. Da die Polaren von τ-Nullumgebungen in E'_b beschränkt sind folgt, daß auch

$$\mathfrak{V} := \{(U^\circ)^\circ\,;\, U \text{ abgeschlossene, absolutkonvexe Nullumgebung in } (E,\tau)\}$$

eine Nullumgeungsbasis in $(E'_b)'_b$ ist. Eine Nullumgebungsbasis für die von $b(E'', E'_b)$ auf E induzierte Topologie ist dann gegeben durch

$$\mathfrak{V}_b := \{(U^\circ)^\circ \cap E\,;\, U \text{ abgeschlossene, absolutkonvexe Nullumgebung in } (E,\tau)\}$$

Für abgeschlossene, absolutkonvexe τ-Nullumgebungen U folgt aber nach dem Bipolarensatz 16.11: $(U^\circ)^\circ \cap E = (U^\circ)_\circ = U$. $\mathfrak{V}_b$ ist also auch eine τ-Nullumgebungsbasis. Daher stimmen τ und die von $b(E'', E'_b)$ auf E induzierte Topologie überein. $\square$

18.3. Folgerung. *Ist (E,τ) ein metrisierbarer oder tonnelierter lokalkonvexer topologischer Vektorraum und ist E'_b normierbar, so ist auch (E,τ) normierbar.*

Beweis. Ist E'_b normierbar, so ist nach Aufgabe 17.2 auch $(E'_b)'_b$ normierbar. Da τ mit der von $b(E'', E'_b)$ induzierten Topologie übereinstimmt, ist auch (E,τ) normierbar. $\square$

18.4. Folgerung. *Ist (E,τ) ein metrisierbarer, nicht normierbarer lokalkonvexer topologischer Vektorraum, so ist E'_b nicht metrisierbar.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 17.9 und Folgerung 18.3. $\square$

Insbesondere sind die starken Dualräume der metrisierbaren lokalkonvexen Hausdorffräume

- $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \infty$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen,
- $\mathcal{O}(\Omega)$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ offen,
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

nicht metrisierbar, da die Ausgangsräume nicht normierbar sind. (Beweis in den Übungen).

18.5. Definition. Ein lokalkonvexer Hausdorffraum (E,τ) heißt

- *semireflexiv*, falls $E'' = (E'_b)' = E$ als $\mathbb{K}$-Vektorräume (mit der Identifikation aus Satz 18.1).
- *reflexiv*, falls $(E'_b)'_b = (E,\tau)$ als topologische Vektorräume.

Mit diesen Definitionen und Satz 18.2 folgt unmittelbar:

18.6. Folgerung. *Ein tonnelierter oder metrisierbarer lokalkonvexer Hausdorffraum, der semireflexiv ist, ist schon reflexiv.*

Ohne Beweis geben wir eine Reihe von Beispielen an:
Reflexive lokalkonvexe Hausdorffräume:

- alle endlich dimensionalen lokalkonvexen Hausdorffräume,
- $\ell^p(I)$, I eine nicht leere Menge, $1 < p < \infty$,
- $L^p(\Omega)$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $1 < p < \infty$,
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,
- $\mathcal{O}(\Omega)$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ offen,
- $C^\infty(\Omega)$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen

und ihre Dualräume, versehen mit der starken Topologie.
Nicht reflexive lokalkonvexe Hausdorffräume:

- $c_0(I)$, $\ell^1(I)$, $\ell^\infty(I)$ für unendliche Indexmengen.
- $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen,
- $C(K)$, K ein nicht endlicher kompakter Hausdorffraum,
- $C^k(\Omega)$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$,
- $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein unendlich dimensionaler Hilbertraum,

und ihre Dualräume versehen mit der starken Topologie.

18.7. Satz. *Der starke Dualraum E'_b eines semireflexiven lokalkonvexen Hausdorffraums (E,τ) ist tonneliert.*

BEWEIS. Sei also $E = E''$ und sei $T' \subseteq E'_b$ eine Tonne. Nach Satz 16.6 ist T' dann auch bezüglich $\sigma(E', E'') = \sigma(E', E)$ abgeschlossen und nach dem Bipolarensatz 16.11 folgt $(T'_\circ)^\circ = T'$. Sei $x' \in E'$ beliebig. Da T' absorbant ist, gibt es ein $r > 0$ mit $x' \in T'$. Für alle $x \in T'_\circ$ gilt dann $|x'(x)| \leq r$. Die Menge $T'_\circ$ ist also $\sigma(E, E')$-beschränkt und damit nach dem Satz 16.20 von Mackey auch τ-beschränkt. Daher ist $T' = (T'_\circ)^\circ$ eine $b(E', E)$–Nullumgebung. E'_b ist also tonneliert. □

18.8. SATZ. *Ein lokalkonvexer Hausdorffraum (E, τ) ist genau dann semireflexiv, wenn jede beschränkte, abgeschlossene, absolutkonvexe Teilmenge von E schon $\sigma(E, E')$-kompakt ist.*

BEWEIS. Sei zunächst (E, τ) semireflexiv und sei B eine beliebige abgeschlossene, absolutkonvexe, beschränkte Teilmenge von (E, τ). Nach dem Bipolarensatz 16.11 folgt $B = (B^\circ)_\circ$ und B° ist eine $b(E', E)$-Nullumgebung. Nach dem Satz 16.16 von Alaoglu-Bourbaki ist $B = (B^\circ)_\circ$ bezüglich $\sigma(E'', E') = \sigma(E, E')$ kompakt.

Sei umgekehrt jede beschränkte, abgeschlossene, absolutkonvexe Teilmenge von E kompakt bezüglich $\sigma(E, E')$. Sei $x'' \in E''$ beliebig. Zu zeigen ist: Es gibt ein $x \in E$ mit $x''(x') = x'(x)$ für alle $x' \in E'$. Die Menge $U' := \{x''\}_\circ$ (gebildet bezüglich $\langle E', E''\rangle$) ist dann eine Nullumgebung in E'_b. Nach Definition von $b(E', E)$ gibt es daher eine beschränkte Menge $B \subset E$ mit $B^\circ \subseteq U'$. Nun gilt $((B^\circ)_\circ)^\circ = B^\circ$ (nach Folgerung 16.12) und mit B ist auch $A := (B^\circ)_\circ$ beschränkt (nach dem Bipolarensatz 16.11 und Aufgabe 16.4(e)). Nach Voraussetzung ist A daher $\sigma(E, E')$-kompakt und somit ist wegen der Stetigkeit der kanonischen Einbettung $J : (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E'_b))$ die Menge $J(A)$ ebenfalls $\sigma(E'', E'_b)$-kompakt und insbesondere $\sigma(E'', E'_b)$-abgeschlossen und absolutkonvex. $J(A)$ enthält also die $\sigma(E'', E'_b)$-abgeschlossene Hülle der Bipolaren (bezüglich des Dualsystems $\langle E'', E'\rangle$) von $J(B)$. Es folgt $x'' \in (U')_\circ \subseteq (J(B)^\circ)_\circ \subseteq J(A) \subset J(E)$. E ist also semireflexiv. □

18.9. SATZ. *Für einen lokalkonvexen Hausdorffraum (E, τ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *(E, τ) ist tonneliert und jede beschränkte, τ-abgeschlossene, absolutkonvexe Teilmenge von E ist $\sigma(E, E')$-kompakt.*
(b) *(E, τ) ist tonneliert und jede bezüglich $\sigma(E, E')$ abgeschlossene, beschränkte, absolutkonvexe Teilmenge von E ist $\sigma(E, E')$-kompakt.*
(c) *(E, τ) ist reflexiv, d.h. $(E, \tau) = (E'_b)'_b$.*

BEWEIS. (b)$\Longrightarrow$(a) ist klar wegen Satz 16.6.

(a)$\Longrightarrow$(b) Sei (a) erfüllt und sei B eine beliebige bezüglich $\sigma(E, E')$ abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E. Nach dem Satz 16.20 von Mackey ist B dann auch τ-beschränkt und die abgeschlossene, absolutkonvexe Hülle ist ebenfalls τ-beschränkt (nach Aufgabe 16.4(e)) und damit nach Voraussetzung $\sigma(E, E')$-kompakt.

(a)$\Longrightarrow$(c) ist klar nach Folgerung 18.6 und Satz 18.8.

(c)$\Longrightarrow$(a) Sei (E, τ) reflexiv, dann ist auch E'_b reflexiv und und $E = (E'_b)'_b$ ist als starker Dualraum des reflexiven Raums E'_b tonneliert (nach Satz 18.7). Dies zeigt zusammen mit Satz 18.8, daß (a) erfüllt ist. □

18.10. DEFINITION. Ein lokalkonvexer Hausdorffraum (E, τ) heißt *Montel-Raum* (kurz (M)-Raum), falls (E, τ) tonneliert ist und falls jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von E kompakt ist.

Ein normierter Raum ist also nach Folgerung 1.16 genau dann ein Montelraum, wenn er endlich dimensional ist.

Beispiele für Montel-Räume sind:

- $C^\infty(\Omega)$, Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
- $\mathcal{O}(\Omega)$, Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^N$.
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ versehen mit der Produkttopologie.

Beweis als Übung.

18.11. Satz. *Sei (E,τ) ein Montel-Raum. Dann gilt:*

(a) *(E,τ) ist reflexiv.*
(b) *E'_b ist wieder ein Montel-Raum.*

Beweis. (a) Ist (E,τ) ein (M)-Raum, so ist (E,τ) tonneliert und jede beschränkte, abgeschlossene, absolutkonvexe Teimenge ist τ-kompakt, also auch $\sigma(E,E')$-kompakt. Nach Satz 18.9 ist (E,τ) reflexiv.

(b) (i) Als starker Dualraum des nach (a) reflexiven Raums (E,τ) ist E'_b nach Satz 18.7 tonneliert.

(ii) Wir zeigen zunächst $E'_b = E'_\gamma$. Da $\gamma(E',E)$ gröber als die starke Topologie ist, genügt es zu zeigen, daß jede Nullumgebung in E'_b auch eine Nullumgebung in E'_γ ist. Ist U' eine beliebige Nullumgebung in E'_b, so gibt es eine beschränkte Teilmenge B von E mit (nach Folgerung 16.12) $((B^\circ)_\circ)^\circ = B^\circ \subseteq U'$. Da $A := (B^\circ)_\circ$ als abgeschlossene, absolutkonvexe Hülle von B wieder beschänkt ist, ist A nach Voraussetzung kompakt. U' ist also auch eine $\gamma(E',E)$-Nullumgebung in E'.

(iii) Zu zeigen bleibt noch, daß jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von E'_b kompakt ist. Sei also B' eine beliebige abgeschlossene beschränkte Teilmenge von E'_b. Dann ist $(B')^\circ$ eine Nullumgebung in $(E'_b)'_b = (E,\tau)$. Als Polare einer τ-Nullumgebung ist $((B')^\circ)_\circ$ nach Satz 16.14 gleichstetig. Nach dem Satz 16.16 ist $((B')^\circ)_\circ$ bezüglich $\sigma(E',E'_b)') = \sigma(E',E)$ kompakt. Da nach Satz 17.14 auf gleichstetigen Mengen die Topologien $\sigma(E',E)$ und $\gamma(E',E)$ übereinstimmen, ist $((B')^\circ)_\circ$ auch bezüglich $\gamma(E',E) = b(E',E)$ kompakt[1]. Als abgeschlossene Teilmenge von $((B')^\circ)_\circ$ ist B' daher ebenfalls bezüglich $b(E',E)$ kompakt. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 18.

18.1. Aufgabe. Zeigen Sie, daß der Raum $X := \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$, versehen mit der Produkttopologie ein Montelraum ist. Zeigen Sie, daß der Dualraum von X identifiziert werden kann mit dem Raum F aller finiten Folgen

$$F := \{\varphi = (\varphi_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}\,;\, \varphi_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}_0\}$$

vermöge der Dualität $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times F \to \mathbb{K}$, die gegeben ist durch

$$\langle x,\varphi\rangle := \sum_{n=0}^\infty x_n\varphi_n \qquad (x = (x_n)_{n=0}^\infty \in X, \quad \varphi = (\varphi_n)_{n=0}^\infty \in F).$$

[1] Da (E,τ) ein Montelraum ist, stimmen $\gamma(E',E)$ und $b(E',E)$ überein.

KAPITEL 19

Kleiner Exkurs in die Maßtheorie

Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung des Dualraums des Banachraums $\mathcal{C}(K)$ der stetigen Funktionen auf einem kompakten topologischen Hausdorffraum K. Hierzu und auch für den Beweis des Spektralsatzes für normale Operatoren benötigen wir einige Hilfsmittel aus der Maß- und Integrationstheorie.

Im folgenden sei stets X eine nicht leere Menge und $\mathcal{P}(X) := \{A; A \subseteq X\}$ die Potenzmenge von X. Wir betrachten *Mengenfunktionen* also Abbildungen μ, die auf einer Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{P}(X)$ definiert sind und ihre Werte in $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ oder einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ annehmen. μ heißt *additiv* (oder auch *endlich additiv*), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{S}$ und $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Für jede endliche Familie $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{S}$ mit $A := \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{S}$ gilt

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

Eine Mengenfunktion μ heißt *abzählbar additiv* oder auch *σ–additiv*, falls (i) gilt und:

(ii)$'$ für jede abzählbar unendliche Familie $\{A_j; j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{S}$ mit $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{S}$ ist

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

19.1. Definition. $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Algebra* (*Boolesche Algebra*) von Teilmengen von X, falls gilt:

(a) $\emptyset \in \Sigma$,

(b) für alle $A \in \Sigma$ ist auch $X \setminus A \in \Sigma$,

(c) die endliche Vereinigung von Mengen aus Σ ist wieder ein Element von Σ.

Eine Algebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *σ–Algebra*, falls für jede Folge $(A_j)_{j=1}^\infty$ von Elementen aus Σ auch gilt $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \Sigma$.

Insbesondere ist also $\mathcal{P}(X)$ selbst eine σ–Algebra.

19.2. Bemerkungen. **(a)** Ist $(\Sigma_i)_{i\in I}$ eine Familie von Algebren (bzw. σ–Algebren) in $\mathcal{P}(X)$, so ist auch $\bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ eine Mengenalgebra (bzw. eine σ–Algebra).
(b) Ist $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$, so gibt es wenigstens eine Algebra (bzw. Σ–Algebra) von Teilmengen von X, die $\mathcal{S}$ enthält (nämlich $\mathcal{P}(X)$). Wir setzen

$$\Sigma(\mathcal{S}) := \bigcap\{\Sigma; \Sigma \text{ ist Algebra mit } \mathcal{S} \subseteq \Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)\}$$

und

$$\Sigma_0(\mathcal{S}) := \bigcap\{\Sigma; \Sigma \text{ ist } \sigma\text{–Algebra mit } \mathcal{S} \subseteq \Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)\}.$$

Nach (a) ist $\Sigma(\mathcal{S})$ eine Algebra und $\Sigma_0(\mathcal{S})$ eine σ–Algebra in $\mathcal{P}(X)$, offensichtlich die kleinste, die $\mathcal{S}$ enthält. Wir nennen $\Sigma(\mathcal{S})$ (bzw. $\Sigma_0(\mathcal{S})$) die von $\mathcal{S}$ erzeugte Boolesche Algebra (bzw. σ–Algebra).

19.3. Definition. Sei μ eine auf einer Algebra Σ von Teilmengen von X definierte Mengenfunktion. Für jedes $A \in \Sigma$ definieren wir die *totale Variation von μ auf A* durch

$$v(\mu, A) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j)\|; n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(A) \cap \Sigma \text{ paarweise disjunkt} \right\} .$$

Im skalarwertigen Fall sind hierbei die Normstriche natürlich durch die Betragsstriche zu ersetzen.

Eine Mengenfunktion μ heißt

- *von beschränkter Variation auf* $A \in \Sigma$, falls $v(\mu, A) < \infty$,
- *von beschränkter Variation*, falls $v(\mu, X) < \infty$,
- *beschränkt*, falls $\sup_{A \in \Sigma} \|\mu(A)\| < \infty$,
- *nicht negativ*, falls μ skalarwertig ist und $\mu(\Sigma) \subseteq [0, \infty]$ gilt. Wir schreiben dann $\mu \geq 0$.

19.4. Lemma. *Sei μ eine auf einer Algebra Σ von Teilmengen von X definierte additive Mengenfunktion.*

(a) *Für alle $A \in \Sigma$ gilt $\|\mu(A)\| \leq v(\mu, A)$.*
(b) *Ist $\mu \geq 0$, so gilt: $\mu(A) = v(\mu, A)$.*
(c) *$v(\mu, \cdot)$ ist die kleinste additive nicht negative Mengenfunktion auf Σ mit der Eigenschaft (a).*
(d) *Für alle $\mathbb{K}$–wertigen additiven Mengenfunktionen λ, μ auf Σ und alle $A \in \Sigma, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$v(\alpha\mu, A) = |\alpha| v(\mu, A)$$

sowie

$$v(\lambda + \mu, A) \leq v(\lambda, A) + v(\mu, A).$$

Beweis. Die Aussagen (a), (b) und (d) rechnet man unmittelbar nach. Zum Beweis von (c) zeigen wir zunächst die Additivität von $v(\mu, \cdot)$. Seien $B, C \in \Sigma$ beliebig mit $B \cap C = \emptyset$. Seien ferner $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen von $B \cup C$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j)\| &= \sum_{j=1}^{n} \|\mu((A_j \cap B) \cup (A_j \cap C))\| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j \cap B) + \mu(A_j \cap C)\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j \cap B)\| + \sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j \cap C)\| \\
&\leq v(\mu, B) + v(\mu, C)\,.
\end{aligned}$$

Durch Übergang zum Supremum auf der linken Seite erhalten wir

$$v(\mu, B \cup C) \leq v(\mu, B) + v(\mu, C).$$

Ist also $v(\mu, B \cup C) = \infty$, so folgt hieraus $v(\mu, B \cup C) = v(\mu, B) + v(\mu, C)$. Sei nun $v(\mu, B \cup C) < \infty$. Dann sind auch $v(\mu, B)$ und $v(\mu, C)$ endlich. Nach Definition der totalen Variation gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele paarweise disjunkte Mengen

$B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{P}(B) \cap \Sigma$ und endlich viele paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{P}(C) \cap \Sigma$ mit

$$v(\mu, B) \leq \sum_{j=1}^{k} \|\mu(B_j)\| + \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } v(\mu, C) \leq \sum_{i=1}^{m} \|\mu(C_i)\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} v(\mu, B \cup C) &\leq v(\mu, B) + v(\mu, C) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} \|\mu(B_j)\| + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m} \|\mu(C_i)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq v(\mu, B \cup C) + \varepsilon . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muß $v(\mu, B \cup C) = v(\mu, B) + v(\mu, C)$ gelten. Mit vollständiger Induktion folgt die Additivität von $v(\mu, \cdot)$.

Sei nun $\lambda \geq 0$ eine beliebige nicht negative, additive Mengenfunktion auf X mit $\|\mu(A)\| \leq \lambda(A)$ für alle $A \in \Sigma$ und sei $A \in \Sigma$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für jede endliche Familie $A_1, \ldots, A_n$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{P}(A) \cap \Sigma$:

$$\lambda(A) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda(A_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j)\|$$

und wir erhalten $\lambda(A) \geq v(\mu, A)$. Damit folgt auch die behauptete Minimalitätseigenschaft. $\square$

19.5. Lemma. *Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Mengenalgebra und $\mu : \Sigma \to \mathbb{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine additive, beschränkte, skalarwertige Mengenfunktion. Dann ist auch $v(\mu, \cdot)$ beschränkt und es gilt:*

$$M := \sup_{A \in \Sigma} |\mu(A)| \leq v(\mu, X) \leq 4 \sup_{A \in \Sigma} |\mu(A)| .$$

Beweis. Die linke Ungleichung folgt unmittelbar aus Lemma 19.4 (a). Wir beweisen die rechte Ungleichung zunächst im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sind beliebige paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ gegeben, so folgt

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| = \sum_{j}{}^{+} \mu(A_j) - \sum_{j}{}^{-} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j}{}^{+} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j}{}^{-} A_j\right),$$

wobei $\sum_j{}^+$ bzw. $\bigcup_j{}^+$ ($\sum_j{}^-$, $\bigcup_j{}^-$) die Summe bzw. Vereinigung über alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mu(A_j) \geq 0$ (bzw. mit $\mu(A_j) < 0$) bezeichne. Durch Übergang zum Supremum erhalten wir

$$v(\mu, X) \leq \sup_{A, B \in \Sigma} (\mu(A) - \mu(B)) \leq 2M.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ beachten wir, daß dann die reellwertigen Mengenfunktionen $A \mapsto \operatorname{Re} \mu(A)$ und $A \mapsto \operatorname{Im} \mu(A)$ ebenfalls additiv und beschränkt sind. Mit Lemma 19.4(d) erhalten wir also aus dem reellen Fall:

$$v(\mu, X) \leq v(\operatorname{Re} \mu, X) + v(\operatorname{Im} \mu, X) \leq 4M$$

und damit die Behauptung. $\square$

19.6. Folgerung. *Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Mengenalgebra und sei $\mu : \Sigma \to E$ eine beschränkte, additive Mengenfunktion mit Werten in einem Banachraum E. Dann ist für* *jede stetige Linearform $x' \in E'$ die additive, skalarwertige Mengenfunktion $x' \circ \mu$ von beschränkter Variation und es gilt:*

$$v(x' \circ \mu, X) \leq 4\|x'\| \cdot \sup_{A \in \Sigma} \|\mu(A)\| .$$

19.7. Definition. Sei $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, additive, reellwertige Mengenfunktion auf einer Mengenalgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißen die durch

$$\begin{aligned} \mu^+(A) &:= \frac{1}{2}(v(\mu, A) + \mu(A)) \text{ für } A \in \Sigma \text{ und} \\ \mu^-(A) &:= \frac{1}{2}(v(\mu, A) - \mu(A)) \text{ für } A \in \Sigma \end{aligned}$$

definierten Mengenfunktionen $\mu^+, \mu^- : \Sigma \to \mathbb{R}$ die *obere* und *untere Variation von μ.*

19.8. Satz (Jordan–Zerlegung). *Sei $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, additive, reellwertige Mengenfunktion auf einer Mengenalgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

(a) *Für alle $A \in \Sigma$ gilt:*

$$\mu^+(A) = \sup_{B \in \Sigma \cap \mathcal{P}(A)} \mu(B) \quad \text{und} \quad \mu^-(A) = -\inf_{B \in \Sigma \cap \mathcal{P}(A)} \mu(B) .$$

(b) *μ^+ und μ^- sind additive, nicht negative Mengenfunktionen und es gilt für alle $A \in \Sigma$:*

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) , \quad v(\mu, A) = \mu^+(A) + \mu^-(A) .$$

Beweis. **(a)** Sei $A \in \Sigma$ beliebig und sei B eine beliebige Teilmenge von A aus Σ. Da μ additiv ist, gilt $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$. Es folgt

$$\begin{aligned} 2\mu(B) &= \mu(B) + \mu(A) - \mu(A \setminus B) \leq \mu(A) + |\mu(B)| + |\mu(A \setminus B)| \\ &\leq \mu(A) + v(\mu, A) = 2\mu^+(A) . \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\sup_{B \in \Sigma \cap \mathcal{P}(A)} \mu(B) \leq \mu^+(A) . \tag{19.1}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $v(\mu, \cdot)$ nach Lemma 19.5 beschränkt ist, gibt es endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ von A mit

$$A = \bigcup_{j=1}^n A_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| > v(\mu, A) - \varepsilon .$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu Lemma 19.5 erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2\mu^+(A) - \varepsilon &= v(\mu, A) + \mu(A) - \varepsilon < \sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| + \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \\ &\leq 2 \sum_j{}^{+} \mu(A_j) = 2\mu\Big(\bigcup_j{}^{+} A_j \Big) \\ &\leq 2 \sup_{B \in \Sigma \cap \mathcal{P}(A)} \mu(B) . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus - zusammen mit (19.1) - die linke Gleichung aus (a). Die rechte folgt hieraus wegen $\mu^- = (-\mu)^+$.

(b) folgt mit Definition 19.7 und Lemma 19.4(c). □

19.9. Definition. Ein *Maß* ist eine auf einer σ–Algebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ definierte abzählbar additive Mengenfunktion mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ oder $\mathbb{C}$. Ein *Maßraum* (X, Σ, μ) ist ein Tripel, bestehend aus einer Menge X, einer σ–Algebra Σ von Teilmengen von X und einem auf Σ definierten Maß μ. Ein Maßraum (X, Σ, μ) heißt

- *endlich*, falls $\pm\infty \notin \mu(\Sigma)$, d.h. falls das Maß μ reell– oder komplex–wertig ist;
- *positiv*, falls $\mu \geq 0$.

19.10. Lemma. *Sei (X, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Dann ist das Maß μ beschränkt und daher nach Lemma 19.5 von beschränkter Variation.*

Beweis. Sei zunächst μ reellwertig vorausgesetzt. Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß μ nicht beschränkt ist, d.h. es gilt $\sup_{A\in\Sigma} \mu(A) = \infty$ oder $\inf_{A\in\Sigma} \mu(A) = -\infty$. Indem wir notfalls μ durch $-\mu$ ersetzen, können wir erreichen, daß der erste dieser beiden Fälle vorliegt. Wir nennen nun $B \in \Sigma$ *unbeschränkt*, falls gilt $\sup_{A\in\Sigma} \mu(A \cap B) = \infty$. Andernfalls heiße B beschränkt. Folgende Fälle sind möglich:

(a) Jede unbeschränkte Menge aus Σ enthält eine unbeschränkte Menge von beliebig großem Maß.
(b) Es gibt eine unbeschränkte Menge $B \in \Sigma$, so daß ein $N > 0$ existiert mit $\mu(A) < N$ für alle unbeschränkten $A \in \Sigma \cap \mathcal{P}(B)$.

Im Fall (a) finden wir induktiv eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von unbeschränkten Mengen aus Σ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subseteq A_n \quad \text{und} \quad \mu(A_n) \geq n\,.$$

Wegen der σ–Additivität von μ folgt hieraus

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$$

im Widerspruch dazu, daß μ nach Voraussetzung den Wert ∞ nicht annimmt. Also kann Fall (a) nicht eintreten.

Zu Fall (b): Da B nach Voraussetzung unbeschränkt ist, gibt es eine Teilmenge $A_1 \in \Sigma$ von B mit $\mu(A_1) \geq N$. A_1 muß also beschränkt sein. Ebenso findet man eine beschränkte Teilmenge $A_2 \in \Sigma$ von $B \setminus A_1$ mit $\mu(A_2) \geq N$. Dann muß $(B \setminus A_1) \setminus A_2$ unbeschränkt sein. Induktiv findet man so eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von paarweise disjunkten Mengen $A_n \in \Sigma \cap \mathcal{P}(B)$ mit $\mu(A_n) \geq N$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da Σ eine σ–Algebra und μ eine σ–additive Mengenfunktion ist, folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$$

im Widerspruch zu $\infty \notin \mu(\Sigma)$. Also kann auch der zweite Fall nicht eintreten. Unsere Annahme war daher falsch und es folgt die Beschränktheit von μ.

Im komplexwertigen Fall beachtet man, daß die Mengenfunktionen $\operatorname{Re}\mu$ und $\operatorname{Im}\mu$ reellwertige, abzählbar additive Mengenfunktionen und daher nach dem bisher Gezeigten beschränkt sind. Also muß μ auch in diesem Fall beschränkt sein. □

19.11. Folgerung. *Sei E ein Banachraum über $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und sei $\mu : \Sigma \to E$ eine E–wertige, abzählbar additive Mengenfunktion auf einer σ–Algebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist μ beschränkt.*

Beweis. Für alle $x' \in E'$ ist $x' \circ \mu$ ein $\mathbb{K}$–wertiges Maß auf Σ. Nach Lemma 19.10 gilt daher

$$\forall x' \in E' : \sup_{A\in\Sigma} |x'(\mu(A))| < \infty\,.$$

$\mu(\Sigma)$ ist also schwach– und daher auch normbeschränkt. □

19.12. Definition. Sei λ eine auf einer Mengenalgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ definierte Mengenfunktion. Eine Menge $A \in \Sigma$ heiße *λ–Menge*, falls für alle $M \in \Sigma$ gilt: $\lambda(M) = \lambda(M \cap A) + \lambda(M \setminus A)$. Die Menge aller λ–Mengen in Σ werde mit Σ_λ bezeichnet.

19.13. Lemma. *Sei λ eine auf einer Mengenalgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ definierte Mengenfunktion mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Dann ist Σ_λ eine Unteralgebra von Σ, auf der λ additiv ist. Ferner gilt: Sind $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_\lambda$ paarweise disjunkt, so ist für alle $M \in \Sigma$*

$$\lambda\left(M \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(M \cap A_j)\,. \tag{19.2}$$

Beweis. **(a)** Offensichtlich gilt $\emptyset, X \in \Sigma_\lambda$ und für alle $A \in \Sigma_\lambda$ ist auch $X \setminus A \in \Sigma_\lambda$. Wir zeigen nun:

$$\forall A, B \in \Sigma_\lambda : A \cap B \in \Sigma_\lambda\,. \tag{19.3}$$

Seien also $A, B \in \Sigma_\lambda$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für alle $M \in \Sigma$

$$\lambda(M \cap B) = \lambda((M \cap B) \cap A) + \lambda((M \cap B) \cap (X \setminus A)) \text{ und} \tag{19.4}$$

$$\lambda(M) = \lambda(M \cap B) + \lambda(M \cap (X \setminus B)) \tag{19.5}$$

sowie

$$\begin{aligned} \lambda(M \cap (X \setminus (A \cap B))) &= \lambda(M \cap (X \setminus (A \cap B)) \cap B) \\ &\quad + \lambda(M \cap (X \setminus (A \cap B)) \cap (X \setminus B))\,. \end{aligned}$$

Wegen $(X \setminus (A \cap B)) \cap B = B \setminus A$ und $(X \setminus (A \cap B)) \cap (X \setminus B) = X \setminus B$ folgt hieraus

$$\lambda(M \cap (X \setminus (A \cap B))) = \lambda(M \cap B \cap (X \setminus A)) + \lambda(M \cap (X \setminus B))\,.$$

Zusammen mit (19.4) und (19.5) folgt

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \lambda(M \cap A \cap B) + \lambda(M \cap B \cap (X \setminus A)) + \lambda(M \cap (X \setminus B)) \\ &= \lambda(M \cap (A \cap B)) + \lambda(M \cap (X \setminus (A \cap B)))\,. \end{aligned}$$

Damit folgt (19.3). Aus dem bisher Gezeigten folgt nun leicht, daß für endlich viele Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_\lambda$ auch gilt

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = X \setminus \bigcap_{j=1}^{n} (X \setminus A_j) \in \Sigma_\lambda\,.$$

Damit ist gezeigt, daß Σ_λ eine Unteralgebra von Σ ist.

(b) Seien nun $A_1, A_2 \in \Sigma_\lambda$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und sei $M \in \Sigma$ beliebig. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \lambda(M \cap (A_1 \cup A_2)) &= \lambda((M \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) + \lambda((M \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus A_1) \\ &= \lambda(M \cap A_1) + \lambda(M \cap A_2)\,. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion erhält man hieraus die Aussage (19.2) und aus (19.2) folgt mit $M := X$ die Additivität von λ auf Σ_λ. $\square$

19.14. Definition. Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ–Algebra. Eine nicht negative Mengenfunktion $\lambda : \Sigma \to [0, +\infty]$ heißt *äußeres Maß*, falls gilt:

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$.
(ii) Sind $A, B \in \Sigma$ mit $A \subseteq B$, so ist $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.
(iii) Für jede Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ gilt $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n)$.

19.15. Satz (Carathéodory). *Sei $\lambda : \Sigma \to [0, +\infty]$ ein äußeres Maß auf einer σ–Algebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist auch Σ_λ eine σ–Algebra und λ ist auf Σ_λ σ–additiv.*

Beweis. Wegen Lemma 19.13 genügt es zu zeigen, daß für jede Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ von paarweise disjunkten Mengen aus Σ_λ auch die Menge $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ wieder eine λ–Menge ist und daß gilt: $\lambda(A) = \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n)$.

Wir zeigen zunächst $A \in \Sigma_\lambda$. Sei also $M \in \Sigma$ beliebig. Nach Lemma 19.13 gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\lambda(M) &= \lambda\left(M \cap \bigcup_{n=1}^k A_n\right) + \lambda\left(M \cap \left(X \setminus \bigcup_{n=1}^k A_n\right)\right)\\ &= \sum_{n=1}^k \lambda(M \cap A_n) + \lambda\left(M \cap \left(X \setminus \bigcup_{n=1}^k A_n\right)\right)\\ &\geq \sum_{n=1}^k \lambda(M \cap A_n) + \lambda(M \cap (X \setminus A)).\end{aligned}$$

Damit folgt für $k \to \infty$ unter Verwendung von Eigenschaft (iii) des äußeren Maßes:

$$\begin{aligned}\lambda(M \cap A) + \lambda(M \setminus A) \geq \lambda(M) &\geq \sum_{n=1}^\infty \lambda(M \cap A_n) + \lambda(M \cap (X \setminus A))\\ &\geq \lambda(M \cap A) + \lambda(M \setminus A).\end{aligned}$$

Also ist $A \in \Sigma_\lambda$. Wählen wir speziell $M = A$, so folgt $\lambda(A) = \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n)$, d.h. λ ist auf Σ_λ abzählbar additiv. □

19.16. Lemma. *Sei μ eine auf einer Mengenalgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht negative, abzählbar additive Mengenfunktion. Wir definieren eine Mengenfunktion $\hat{\mu} : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch*

$$\hat{\mu}(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \mu(B_n);\ \{B_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma, A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty B_n\right\}$$

für alle Teilmengen A von X. Dann ist $\hat{\mu}$ ein äußeres Maß und $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)_{\hat{\mu}}$. Für alle $A \in \Sigma$ gilt $\hat{\mu}(A) = \mu(A)$. $\hat{\mu}$ ist also eine Fortsetzung von μ.

Beweis. **(a)** Offensichtlich sind für $\hat{\mu}$ die Bedingungen (i) und (ii) aus der Definition 19.14 des äußeren Maßes erfüllt. Wir zeigen, daß auch (iii) gilt.

Sei also $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge aus $\mathcal{P}(X)$ und sei $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu A_n gibt es nach Definition von $\hat{\mu}$ eine Folge $(B_{n,m})_{m=1}^\infty$ in Σ mit $A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^\infty B_{n,m}$ und

$$\sum_{m=1}^\infty \mu(B_{n,m}) \leq \hat{\mu}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Wegen $A \subseteq \bigcup_{n,m=1}^\infty B_{n,m}$ folgt

$$\hat{\mu}(A) \leq \sum_{n,m=1}^\infty \mu(B_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^\infty (\hat{\mu}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) \leq \sum_{n=1}^\infty \hat{\mu}(A_n) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt, daß auch (iii) in Definition 19.14 erfüllt ist. $\hat{\mu}$ ist also ein äußeres Maß.

(b) Wir zeigen nun, daß $\hat{\mu}$ und μ auf Σ übereinstimmen. Sei also $A \in \Sigma$ beliebig. Aus der Definition von $\hat{\mu}$ erhalten wir (mit $B_1 = A$ und $B_n = \emptyset$ für $n > 1$): $\hat{\mu}(A) \leq \mu(A)$. Sei nun $(B_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge aus Σ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Die durch $A_1 := B_1$ und

$$A_n := B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \quad \text{für } n > 1$$

definierte Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ von paarweise disjunkten Mengen aus Σ erfüllt nach Konstruktion $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Wegen der abzählbaren Additivität von μ auf Σ folgt

$$\mu(A) \;=\; \mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A\cap A_n) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n)\,.$$

Nach Definition von $\hat\mu$ folgt also $\mu(A) \le \hat\mu(A)$ und damit insgesamt $\hat\mu(A) = \mu(A)$.

(c) Zu zeigen ist noch $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)_{\hat\mu}$. Sei also $A \in \Sigma$ beliebig vorgegeben und sei $M \subseteq X$ beliebig. Da $\hat\mu$ ein äußeres Maß ist, folgt $\hat\mu(M) \le \hat\mu(M\cap A) + \hat\mu(M\setminus A)$. Es genügt also zu zeigen:

$$\hat\mu(M) \ge \hat\mu(M\cap A) + \hat\mu(M\setminus A)\,. \tag{19.6}$$

Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Definition von $\hat\mu$ eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ in Σ mit $M \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ und $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \le \hat\mu(M) + \varepsilon$. Wegen $M\cap A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty (A\cap A_n)$ und $M\setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty (A_n \setminus A)$ folgt:

$$\hat\mu(M) + \varepsilon \ge \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty (\mu(A_n\cap A) + \mu(A_n\setminus A)) \ge \hat\mu(M\cap A) + \hat\mu(M\setminus A)\,.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (19.6). □

19.17. Definition. Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Mengenalgebra. Eine Mengenfunktion $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ heißt *σ–endlich*, falls es eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ in Σ gibt mit $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ und $v(\mu, A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ein Maßraum (X, Σ, μ) heißt *σ–endlich*, falls das Maß μ σ–endlich ist.

19.18. Satz (Hahn–Erweiterung). *Sei $\mu : \Sigma \to [0,\infty]$ eine nicht negative, σ–additive Mengenfunktion auf einer Mengenalgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann hat μ eine σ–additive Fortsetzung $\tilde\mu : \Sigma_0 \to [0,\infty]$ auf die von Σ erzeugte σ–Algebra Σ_0. Ist μ σ–endlich, so ist diese Erweiterung eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nach Lemma 19.16 ist $\tilde\mu := \hat\mu|_{\Sigma_0}$ eine nicht negative Fortsetzung von μ, welche nach dem Satz von Carathéodory abzählbar additiv ist. Wir müssen also nur noch die Eindeutigkeitsaussage beweisen. Sei also $\lambda : \Sigma_0 \to [0,\infty]$ eine weitere nicht negative, abzählbar additive Fortsetzung von μ und sei μ σ–endlich. Dann gibt es eine Folge $(B_n)_{n=1}^\infty$ in Σ mit $X = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ und $\mu(B_n) < \infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wie im Beweis zu Lemma 19.16 findet man dann eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ von paarweise disjunkten Mengen aus Σ mit $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ und $A_n \subseteq B_n$. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $A_m \subseteq B_m$ gilt

$$\lambda(A_m) = \mu(A_m) \le \mu(B_m) < \infty\,. \tag{19.7}$$

Sei nun $A \in \Sigma_0$ beliebig. Für jede Folge $(C_n)_{n=1}^\infty$ aus Σ mit $A\cap A_m \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ gilt

$$\lambda(A\cap A_m) \le \sum_{n=1}^\infty \lambda(C_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(C_n)\,.$$

Daher folgt

$$\lambda(A\cap A_m) \le \hat\mu(A\cap A_m) \le \hat\mu(A_m) = \mu(A_m) < \infty\,. \tag{19.8}$$

Ebenso sieht man

$$\lambda(A_m\setminus A) \le \hat\mu(A_m\setminus A) \le \hat\mu(A_m) = \mu(A_m) < \infty\,. \tag{19.9}$$

Wegen $\lambda(A_m\cap A) + \lambda(A_m\setminus A) = \lambda(A_m) = \hat\mu(A_m) = \hat\mu(A_m\cap A) + \hat\mu(A_m\setminus A)$ und (19.7), (19.8) und (19.9) folgt also für alle $m\in\mathbb{N}$: $\lambda(A_m\cap A) = \hat\mu(A_m\cap A)$ und daher wegen der abzählbaren Additivität von λ und $\hat{\mu}$

$$\lambda(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(A_m \cap A) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_m \cap A) = \hat{\mu}(A)\,.$$

Damit ist auch die Eindeutigkeitsaussage bewiesen. □

Wir wollen uns nun dem Fall zuwenden, daß X ein topologischer Hausdorffraum ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}(X)$ die von den abgeschlossenen Teilmengen von X erzeugte σ–Algebra. Die Elemente von $\mathcal{B}(X)$ nennen wir *Borelmengen.* Ist $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Mengenalgebra, so heißt eine auf Σ definierte Mengenfunktion μ regulär, falls für jedes $A \in \Sigma$ gilt:

(19.10) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B, D \in \Sigma$ mit $\overline{B} \subseteq A \subseteq \mathrm{int} D \quad \forall C \in \Sigma \cap \mathcal{P}(D \setminus B): \qquad \|\mu(C)\| < \varepsilon\,.$

19.19. Bemerkung. Ist μ skalarwertig und additiv, $\mu(\Sigma) \subseteq \mathbb{K}$, so gilt nach Lemma 19.5 für alle $B, D \in \Sigma$:

$$M := \sup_{C \in \Sigma \cap \mathcal{P}(D \setminus B)} |\mu(C)| \leq v(\mu, D \setminus B) \leq 4M\,.$$

In diesem Falle kann also (19.10) ersetzt werden durch die äquivalente Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B, D \in \Sigma \text{ mit } \overline{B} \subseteq A \subseteq \mathrm{int} D: \quad v(\mu, D \setminus B) < \varepsilon\,.$$

Insbesondere ist in diesem Fall die Regularität von μ äquivalent zu der von $v(\mu, \cdot)$. Ist $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ regulär, so folgt auch die Regularität von μ^+ und μ^- mit

$$\mu^+(A) = \frac{1}{2}(v(\mu, A) + \mu(A)), \quad \mu^-(A) = \frac{1}{2}(v(\mu, A) - \mu(A)) \text{ für alle } A \in \Sigma\,.$$

19.20. Satz (Alexandroff). *Sei X ein kompakter topologischer Hausdorffraum und sei $\mu : \Sigma \to \mathbb{K}$ eine auf einer Mengenalgebra Σ von Teilmengen von X definierte beschränkte, additive, reguläre, skalarwertige Mengenfunktion. Dann ist μ schon abzählbar additiv.*

Beweis. Da μ beschränkt ist, ist nach Lemma 19.5 auch $v(\mu, \cdot)$ beschränkt. Wir zeigen zunächst

(a) $v(\mu, \cdot)$ *ist abzählbar additiv.*

Sei also $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge von paarweise disjunkten Mengen aus Σ mit $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. Da μ regulär ist, gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ Mengen $B_n, D_n \in \Sigma$ sowie $B, D \in \Sigma$ mit $\overline{B} \subseteq A \subseteq \mathrm{int} D$ und $\overline{B_n} \subseteq A_n \subseteq \mathrm{int} D_n$ sowie $v(\mu, D \setminus B) < \varepsilon$ und $v(\mu, D_n \setminus B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit X ist auch $\overline{B}$ kompakt. Wegen $\overline{B} \subseteq A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} D_n$ gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\overline{B} \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} \mathrm{int} D_n$. Es folgt nun

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, A_n) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, D_n) - \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{m} v(\mu, D_n) - \varepsilon \geq v(\mu, B) - \varepsilon \\ &\geq v(\mu, A) - 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir also $v(\mu, A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, A_n)$. Wegen

$$\sum_{n=1}^{m} v(\mu, A_n) \leq v\Big(\mu, \bigcup_{n=1}^{m} A_n\Big) \leq v(\mu, A)$$

folgt auch $\sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, A_n) \leq v(\mu, A)$ und damit die abzählbare Additivität von $v(\mu, \cdot)$.

(b) Wir zeigen nun, daß auch μ abzählbar additiv ist. Ist $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ und A wie im Beweisteil (a), so folgt wegen (a) für $m \to \infty$:

$$\Big|\mu(A) - \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)\Big| = \Big|\mu\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\Big)\Big| \leq v\Big(\mu, \bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=m+1}^{\infty} v(\mu, A_n) \to 0$$

und damit die Behauptung. □

19.21. Satz. *Sei X ein kompakter topologischer Hausdorffraum und sei $\mu : \Sigma \to \mathbb{K}$ eine auf einer Mengenalgebra Σ von Teilmengen von X definierte beschränkte, additive, reguläre Mengenfunktion. Dann besitzt μ eine eindeutig bestimmte abzählbar additive, reguläre Erweiterung auf die von Σ erzeugte σ–Algebra Σ_0 .*

Beweis. Da μ genau dann regulär ist, wenn die obere und die untere Variation (des Real– und des Imaginärteiles) von μ regulär sind, genügt es, den Fall $\mu \geq 0$ zu betrachten. Nach dem Satz von Alexandroff ist μ schon abzählbar additiv und hat daher nach Satz 19.18 eine eindeutig bestimmte abzählbar additive, nicht negative Fortsetzung auf Σ_0 (nämlich $\hat{\mu}|_{\Sigma_0}$). Zu zeigen ist also nur noch, daß $\hat{\mu}$ auf Σ_0 regulär ist. Seien also $A \in \Sigma_0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Definition von $\hat{\mu}$ gibt es dann eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ von (o.B.d.A.) paarweise disjunkten Teilmengen von Σ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ und

$$\hat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n \setminus A\right) = \sum_{n=1}^\infty \hat{\mu}(A_n) - \hat{\mu}(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) - \hat{\mu}(A) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Wegen der Regularität von μ gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu A_n eine Menge $D_n \in \Sigma$ mit $A_n \subseteq \operatorname{int} D_n$ und $\mu(D_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Mit $D := \bigcup_{n=1}^\infty D_n \in \Sigma_0$ gilt dann $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \operatorname{int} D_n \subseteq \operatorname{int} D$ und $D \setminus \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty (D_n \setminus A_n)$. Es folgt also

$$\hat{\mu}(D \setminus A) \leq \hat{\mu}\left(D \setminus \bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) + \hat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n \setminus A\right) < \sum_{n=1}^\infty \mu(D_n \setminus A_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

Indem wir die analoge Betrachtung für $X \setminus A$ statt A ausführen, finden wir auch $D_0 \in \Sigma_0$ mit $X \setminus A \subseteq \operatorname{int} D_0$ und $\hat{\mu}(D_0 \setminus (X \setminus A)) < \varepsilon$. Mit $B := X \setminus D_0 \in \Sigma_0$ folgt dann $\overline{B} \subseteq X \setminus \operatorname{int} D_0 \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A$ und $\hat{\mu}(A \setminus B) = \hat{\mu}(D_0 \setminus (X \setminus A)) < \varepsilon$. Insgesamt folgt also $v(\hat{\mu}, D \setminus B) = \hat{\mu}(D \setminus B) < 2\varepsilon$. Also ist μ regulär. □

Wir wollen uns nun der Integration zuwenden. Sei X eine Menge und $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Algebra von Teilmengen von X. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ heißt Σ*–meßbar*, falls $f^{-1}(A) \in \Sigma$ für alle Borelmengen A in $\mathbb{K}$ gilt. Für $A \in \Sigma$ bezeichne χ_A die charakteristische Funktion von A. Die Menge

$$\mathcal{T}(X, \Sigma) := LH\,\{\chi_A; A \in \Sigma\}$$

der Σ–meßbaren Treppenfunktionen ist eine Unteralgebra der Banachalgebra $\ell^\infty(X)$ aller beschränkten Funktionen auf X. Der Abschluß $B(X, \Sigma)$ von $\mathcal{T}(X, \Sigma)$ in $\ell^\infty(X)$ ist dann eine Banachalgebra mit der von $\ell^\infty(X)$ induzierten Supremumsnorm $\|\cdot\|_X$. Man zeigt leicht, daß die Menge aller beschränkten Σ–meßbaren Funktionen in $B(X, \Sigma)$ dicht liegt.

Für eine Funktion $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j} \in \mathcal{T}(X, \Sigma)$ und eine additive Mengenfunktion μ auf Σ mit Werten in $\mathbb{K}$ oder in einem Banachraum E definieren wir

$$\int_A f\, d\mu := \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j \cap A) \quad \text{für } A \in \Sigma\,. \tag{19.11}$$

19.22. Lemma. *Unter den angegebenen Voraussetzungen und mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

(a) *Die Zuordnung $f \mapsto \int_A f\, d\mu$ ist wohldefiniert (also unabhängig von der speziellen Darstellung von $f \in \mathcal{T}(X, \Sigma)$) und linear.*
(b) *Sind f und μ nicht negativ, so ist $\int_A f\, d\mu \geq 0$. In diesem Fall macht die Definition* (19.11) *auch Sinn, falls $\infty \in \mu(\Sigma)$.*

(c) *Ist μ eine beschränkte, $\mathbb{K}$–wertige, additive Mengenfunktion auf Σ, so gilt für alle $f \in \mathcal{T}(X,\Sigma), A \in \Sigma$:*

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| \le v(\mu, A) \|f\|_X \, .$$

Also ist $f \mapsto \int_A f \, d\mu$ stetig und besitzt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einer stetigen, linearen Abbildung $\int_A \cdot \, d\mu : B(X,\Sigma) \to \mathbb{K}$.

(d) *Ist μ wie in (c) und ist $A \in \Sigma, f \in B(X,\Sigma)$ mit $f = 0$ auf $X \setminus A$, so ist $\int_X f \, d\mu = \int_A f \, d\mu$.*

Beweis. Die Aussagen (a), (b) und (d) weist man durch direktes Nachrechnen leicht nach.

Zu (c): Sei also $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j} \in \mathcal{T}(X,\Sigma)$ beliebig vorgegeben. Dann besitzt f auch eine Darstellung der Form $f = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{B_k}$ mit paarweise disjunkten Mengen $B_1, \ldots, B_m \in \Sigma$ und $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$. Unter Verwendung von (a) folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_A f \, d\mu \right| &= \left| \sum_{k=1}^m b_k \mu(B_k \cap A) \right| \le \max_{1 \le k \le m} |b_k| \sum_{k=1}^m |\mu(B_k \cap A)| \\ &\le v(\mu, A) \|f\|_X \, . \end{aligned}$$

□

19.23. Folgerung. *Sei $\mu : \Sigma \to E$ eine beschränkte, additive Mengenfunktion auf einer Mengenalgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit Werten in einem Banachraum E. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{T}(X,\Sigma), A \in \Sigma$:*

$$\left\| \int_A f \, d\mu \right\| \le 4 \|f\|_X \sup_{B \in \Sigma \cap \mathcal{P}(A)} \|\mu(B)\| \, .$$

Die lineare Abbildung $\int_A \cdot \, d\mu : \mathcal{T}(X,\Sigma) \to E$ ist also stetig und besitzt daher eine eindeutig bestimmte stetige, lineare Fortsetzung $\int_A \cdot d\mu : B(X,\Sigma) \to E$.

Beweis. Sei $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j} \in \mathcal{T}(X,\Sigma)$ beliebig. Für alle $x' \in E'$ gilt:

$$\begin{aligned} x'\left(\int_A f \, d\mu \right) &= x'\left(\sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j \cap A) \right) = \sum_{j=1}^n a_j x'\left(\mu(A_j \cap A)\right) \\ &= \int_A f \, d(x' \circ \mu) \, . \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 19.22 und Lemma 19.5 erhalten wir hiermit:

$$\begin{aligned} \left\| \int_A f \, d\mu \right\| &= \sup_{x' \in E', \|x'\| \le 1} \left| x'\left(\int_A f \, d\mu \right) \right| = \sup_{x' \in E', \|x'\| \le 1} \left| \int_A f \, d(x' \circ \mu) \right| \\ &\le \|f\|_X \sup_{x' \in E', \|x'\| \le 1} v(x' \circ \mu, A) \\ &\le 4 \|f\|_X \sup_{B \in \Sigma \cap \mathcal{P}(A)} \sup_{x' \in E', \|x'\| \le 1} |x'(\mu(B))| \\ &\le 4 \|f\|_X \sup_{B \in \Sigma \cap \mathcal{P}(A)} \|\mu(B)\| \, . \end{aligned}$$

□

Sei Σ eine Algebra von Teilmengen einer nicht leeren Menge X. Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathrm{ba}(X,\Sigma)$ die Menge aller beschränkten, additiven, $\mathbb{K}$–wertigen Mengenfunktionen auf Σ. Mit den punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit

Skalaren ist $\mathrm{ba}(X,\Sigma)$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Man rechnet leicht nach, daß $\mathrm{ba}(X,\Sigma)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\Sigma)$ ist. Nach Lemma 19.4 und Lemma 19.5 ist $v(\cdot,X)$ eine zu der von $\|\cdot\|_{\ell^\infty(\Sigma)}$ auf $\mathrm{ba}(X,\Sigma)$ induzierten Norm äquivalente Norm. Wir halten fest:

19.24. Lemma. $(\mathrm{ba}(X,\Sigma),v(\cdot,X))$ *ist ein Banachraum.*

19.25. Satz. $(\mathrm{ba}(X,\Sigma),v(\cdot,X))$ *ist isometrisch isomorph zu* $B(X,\Sigma)'$. *Der isometrische Isomorphismus* $\mu\mapsto x'_\mu$ *ist gegeben durch*

$$x'_\mu(f) := \int_X f\,d\mu \quad \text{für } f\in B(X,\Sigma)\,.$$

Beweis. Nach Lemma 19.22 ist für alle $\mu\in\mathrm{ba}(X,\Sigma)$ die oben definierte Linearform x'_μ in $B(X,\Sigma)'$ und erfüllt

$$\|x'_\mu\| \le v(\mu,X)\,. \tag{19.12}$$

Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig. Nach Definition von $v(\mu,X)$ gibt es endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1,\dots,A_n\in\Sigma$ mit

$$\sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| > v(\mu,X)-\varepsilon\,.$$

Zu A_j gibt es $a_j\in\mathbb{K}$ mit $|a_j|=1$ und $a_j\mu(A_j)=|\mu(A_j)|$. Für die Treppenfunktion $f:=\sum_{j=1}^n a_j\chi_{A_j}\in\mathcal{T}(X,\Sigma)$ gilt dann $\|f\|=1$. Es folgt

$$\|x'_\mu\| \;\ge\; |x'_\mu(f)| = \left|\int_X f\,d\mu\right| = \left|\sum_{j=1}^n a_j\mu(A_j)\right| = \sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| \ge v(\mu,X)-\varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt zusammen mit (19.12), daß $\|x'_\mu\|=v(\mu,X)$ für alle $\mu\in\mathrm{ba}(X,\Sigma)$ gilt. Die Abbildung $\mu\mapsto x'_\mu$ ist also eine Isometrie, von der man leicht nachweist, daß sie linear ist.

Zu zeigen bleibt noch die Surjektivität von $\mu\mapsto x'_\mu$. Sei also $x'\in B(X,\Sigma)$ beliebig vorgegeben. Durch

$$\mu(A) := x'(\chi_A) \quad \text{für } A\in\Sigma$$

wird dann eine (wegen der Linearität von x' offensichtlich additive) Mengenfunktion $\mu:\Sigma\to\mathbb{K}$ erklärt. Wegen $|\mu(A)|=|x'(\chi_A)|\le\|x'\|$ für alle $A\in\Sigma$ ist μ auch beschränkt, also $\mu\in\mathrm{ba}(X,\Sigma)$. Aus der Linearität des Integrals und der Linearform x' folgt ferner, daß $x'(f)=\int_X f\,d\mu = x'_\mu(f)$ für alle $f\in\mathcal{T}(X,\Sigma)$. Wegen der Stetigkeit der Funktionale x' und x'_μ und der Dichtheit von $\mathcal{T}(X,\Sigma)$ in $B(X,\Sigma)$ folgt $x'=x'_\mu$. Die Abbildung $\mu\mapsto x'_\mu$ ist also auch surjektiv. $\square$

19.26. Folgerung. $\ell^\infty(X)'$ *ist isometrisch isomorph zum Raum* $\mathrm{ba}(X,\mathcal{P}(X))$ *der auf ganz* $\mathcal{P}(X)$ *definierten beschränkten, additiven Mengenfunktionen.*

Beweis. Mit einem Kompaktheitsargument zeigt man leicht, daß $\mathcal{T}(X,\mathcal{P}(X))$ dicht in $\ell^\infty(X)$ liegt. Es gilt daher $B(X,\mathcal{P}(X))=\ell^\infty(X)$. Mit Satz 19.25 folgt die Behauptung. $\square$

Sei nun wieder X ein topologischer Raum und bezeichne $\mathcal{B}_0$ die von den abgeschlossenen Teilmengen von X erzeugte Mengenalgebra. Der Raum

$$\mathrm{rba}(X) := \{\mu\in\mathrm{ba}(X,\mathcal{B}_0);\ \mu \text{ ist regulär}\}$$

ist offensichtlich ein Untervektorraum von $\mathrm{ba}(X, \mathcal{B}_0)$ und wird daher durch $\|\mu\| := v(\mu, X)$ für $\mu \in \mathrm{rba}(X)$ zu einem normierten Raum. Durch

$$\mu \leq \lambda :\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{B}_0 : \mu(A) \leq \lambda(A)$$

für $\mu, \lambda \in \mathrm{rba}(X)$ wird $\mathrm{rba}(X)$ teilweise geordnet. Auch der Dualraum $C_b(X)'$ der C^*–Algebra $C_b(X)$ aller beschränkten, stetigen Funktionen auf X ist teilweise geordnet vermöge:

$$x' \leq y' :\Longleftrightarrow \forall 0 \leq f \in C_b(X) : x'(f) \leq y'(f)$$

für $x', y' \in C_b(X)'$. Wir werden zeigen, daß für einen normalen topologischen Raum X der Raum $C_b(X)'$ isometrisch und ordnungsisomorph zu $\mathrm{rba}(X)$ ist. Hierzu benötigen wir das folgende Lemma, das sich in etwas allgemeinerem Rahmen beweisen läßt.

19.27. Lemma. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $C_b(X)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $B(X, \mathcal{B}_0)$.*

Beweis. Da sowohl $B(X, \mathcal{B}_0)$ als auch $C_b(X)$ abgeschlossene Unteralgebren von $\ell^\infty(X)$ sind, genügt es zu zeigen, daß sich jede Funktion $f \in C_b(X)$ gleichmäßig auf X durch Treppenfunktionen aus $\mathcal{T}(X, \mathcal{B}_0)$ approximieren läßt.

Sei also $f : X \to \mathbb{K}$ eine beliebige stetige, beschränkte Funktion auf X. Dann gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine endliche offene Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_n\}$ von $f(X)$ mit $\mathrm{diam}(U_j) := \sup_{x,y \in U_j} |x - y| < \varepsilon$ für $j = 1, \ldots, n$. Wir setzen $A_1 := U_1$ und $A_j := U_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} U_i$ für $2 \leq j \leq n$. Ist $A_j \neq \emptyset$, so sei a_j ein beliebiger Punkt aus U_j, ist $A_j = \emptyset$, so setzen wir $a_j = 0$, $1 \leq j \leq n$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(U_j)$ offen in X, also $f^{-1}(U_j) \in \mathcal{B}_0$. Dann gilt auch $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_0$, mit $B_j := f^{-1}(A_j)$ für $j = 1, \ldots, n$, denn für $2 \leq j \leq n$ ist $B_j = f^{-1}(U_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} f^{-1}(U_i)$. Also ist $f_0 := \sum_{j=1}^n a_j \chi_{B_j} \in \mathcal{T}(X, \mathcal{B}_0)$ und nach Konstruktion von f_0 folgt $\|f - f_0\|_X \leq \varepsilon$. $\square$

Mit Lemma 19.22 folgt:

19.28. Folgerung. *Sei X ein topologischer Raum und sei $\mu \in \mathrm{rba}(X)$. Dann sind alle Funktionen aus $C_b(X)$ bezüglich μ integrierbar und es gilt*

$$\forall f \in C_b(X) : \quad \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \|f\|_X v(\mu, X) \, .$$

Es folgt der angekündigte Satz über die Darstellung des Dualraums von $C_b(X)'$ für normale topologische Räume X.

19.29. Satz. *Sei X ein normaler topologischer Raum. Dann gibt es einen linearen, isometrischen und ordnungserhaltenden Isomorphismus $\mu \mapsto x'_\mu$ von $\mathrm{rba}(X)$ auf $C_b(X)'$. Dieser ist gegeben durch:*

$$x'_\mu(f) := \int_X f \, d\mu \quad \text{für } f \in C_b(X) \, .$$

Beweis. Nach Folgerung 19.28 ist durch $\mu \mapsto x'_\mu$ eine (offensichtlich lineare) stetige Abbildung von $\mathrm{rba}(X)$ nach $C_b(X)'$ gegeben mit

$$\|x'_\mu\| \leq \|\mu\| = v(\mu, X) \, . \tag{19.13}$$

Zu zeigen ist also noch:

1.) $\forall \mu \in \mathrm{rba}(X) : \|\mu\| \leq \|x'_\mu\|$. Wegen (19.13) ist $\mu \mapsto x'_\mu$ dann eine lineare Isometrie und insbesondere auch injektiv.

2.) Die Abbildung $\mu \mapsto x'_\mu$ ist ordnungserhaltend, d.h. es gilt

$$\forall \mu \in \mathrm{rba}(X) : \mu \geq 0 \Longleftrightarrow x'_\mu \geq 0 \, .$$

3.) Die Abbildung $\mu \mapsto x'_\mu$ ist surjektiv.

Zu 1.) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Definition von $v(\mu, X)$ gibt es endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0$ mit

$$v(\mu, X) - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| \leq v(\mu, X)\,. \tag{19.14}$$

Zu A_j gibt es $a_j \in \mathbb{K}$ mit $|a_j| = 1$ und $a_j\mu(A_j) = |\mu(A_j)|$. Es folgt

$$\left| v(\mu, X) - \int_X \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} d\mu \right| = \left| v(\mu, X) - \sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| \right| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{19.15}$$

Da μ regulär ist, gibt es zu jedem A_j Mengen $B_j, D_j \in \mathcal{B}_0$ mit $\overline{B_j} \subseteq A_j \subseteq \mathrm{int} D_j$ und $v(\mu, D_j \setminus B_j) < \frac{\varepsilon}{3n}$. Da X normal ist, gibt es für $j = 1, \dots, n$ paarweise disjunkte offene Mengen $C_j \subseteq D_j$ mit $\overline{B_j} \subseteq C_j$. Nach dem Urysohnschen Lemma existieren Funktionen $f_1, \dots, f_n \in C_b(X)$ mit $0 \leq f_j \leq 1$ auf X, $f_j \equiv 1$ auf $\overline{B_j}$ und $f_j \equiv 0$ auf $X \setminus C_j$. Dann ist $f_0 := \sum_{j=1}^{n} a_j f_j$ eine stetige beschränkte Funktion auf X mit $\|f_0\|_X = 1$. Mit Hilfe von (19.15) und Lemma 19.22 schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\left|v(\mu, X) - x'_\mu(f_0)\right| &\leq \left| v(\mu, X) - \int_X \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} d\mu \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \int_X \chi_{A_j} - f_j \, d\mu \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \left| \int_{C_j \setminus B_j} \chi_{A_j} - f_j \, d\mu \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{n} \|\chi_{A_j} - f_j\|_X v(\mu, C_j \setminus B_j) < \frac{\varepsilon}{3} + 2n\frac{\varepsilon}{3n} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also $v(\mu, X) - \varepsilon < \|x'_\mu\| \leq v(\mu, X)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muß $\|x'_\mu\| = v(\mu, X)$ gelten.

Zu 2.) Die Implikation $\Longrightarrow$ folgt aus Lemma 19.22 (b). Für die Rückrichtung müssen wir zeigen, daß aus $x'_\mu \geq 0$ auch $\mu \geq 0$ folgt. Sei also $\mu \in \mathrm{rba}(X)$ gegeben mit $x'_\mu \geq 0$, d.h. mit $\int_X f \, d\mu \geq 0$ für alle $0 \leq f \in C_b(X)$.

Annahme: μ ist nicht positiv, d.h. es gibt eine Menge $A \in \mathcal{B}_0$ mit $c := \mu(A) \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}_+$. Dann ist $\varepsilon := \inf_{t \geq 0} |c - t| > 0$. Da μ regulär ist, gibt es Mengen $B, D \in \mathcal{B}_0$ mit $\overline{B} \subseteq A \subseteq \mathrm{int} D$ und $v(\mu, D \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es eine stetige Funktion f auf X mit $0 \leq f \leq 1$ auf X, $f \equiv 1$ auf $\overline{B}$ und $f \equiv 0$ auf $X \setminus D$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_X f \, d\mu - c \right| &= \left| \int_X f - \chi_A \, d\mu \right| = \left| \int_{D \setminus B} f - \chi_A \, d\mu \right| \\
&\leq \|f - \chi_A\|_X \cdot v(\mu, D \setminus B) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Zu 3.) Sei also $x' \in C_b(X)'$ beliebig. Da $C_b(X)$ nach Lemma 19.27 ein abgeschlossener Unterraum von $B(X, \mathcal{B}_0)$ ist, gibt es nach dem Satz von Hahn–Banach ein $y' \in B(X, \mathcal{B}_0)'$ mit $y'|_{C_b(X)} = x'$. Nach Satz 19.25 gibt es zu y' genau ein $\lambda \in \mathrm{ba}(X, \mathcal{B}_0)$ derart, daß für alle $f \in B(X, \mathcal{B}_0)$ gilt: $y'(f) = \int_X f \, d\lambda$. Indem wir λ zerlegen in $\lambda = \mathrm{Re}\,\lambda + i\,\mathrm{Im}\,\lambda$ und $\mathrm{Re}\,\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \mathrm{Im}\,\lambda = \lambda_3 - \lambda_4$ mit $\lambda_j \geq 0$ für $j = 1, \dots, 4$ nach Satz 19.8, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\lambda \geq 0$ ist. Es genügt also zu zeigen, daß es zu jedem $0 \leq \lambda \in \mathrm{ba}(X, \mathcal{B}_0)$ genau ein $\mu \in \mathrm{rba}(X)$ gibt mit $\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\lambda$ für alle $f \in C_b(X)$.

Sei also $0 \leq \lambda \in \mathrm{ba}(X, \mathcal{B}_0)$ beliebig. Wir definieren zunächst Mengenfunktionen μ_1, μ_2 durch

$$\begin{aligned}\mu_1(C) &:= \inf\{\lambda(D); C \subseteq D, D \text{ offen}\} \quad \text{für abgeschlossenes } C \subseteq X\,,\\ \mu_2(A) &:= \sup\{\mu_1(C); C \subseteq A, C \text{ abgeschlossen}\} \quad \text{für alle } A \subseteq X\,.\end{aligned}$$

Wegen $\lambda \geq 0$ sind auch die Werte von μ_1 und μ_2 nicht negativ. Ferner sind die Mengenfunktionen μ_1, μ_2 *isoton*, d.h. für alle B_1, B_2 im Definitionsbereich von μ_j mit $B_1 \subseteq B_2$ gilt $\mu_j(B_1) \leq \mu_j(B_2)$, $j = 1, 2$, und es gilt $\mu_2(\emptyset) = 0$. Wir zeigen nun

(a) *Jede abgeschlossene Teilmenge von X ist eine μ_2–Menge, also in $\mathcal{P}(X)_{\mu_2}$.*

Sei D_1 offen und C_1 abgeschlossen in X. Dann gilt für jede offene Obermenge D von $C_1 \setminus D_1$: Es ist $C_1 \subseteq D_1 \cup D$ und daher

$$\mu_1(C_1) \leq \lambda(D_1 \cup D) \leq \lambda(D_1) + \lambda(D)\,.$$

Durch Übergang zum Infimum über alle offenen Obermengen von $C_1 \setminus D_1$ folgt also

$$\mu_1(C_1) \leq \lambda(D_1) + \mu_1(C_1 \setminus D_1)\,. \tag{19.16}$$

Seien nun C, C_1 beliebige abgeschlossene Teilmengen von X und sei D_1 eine beliebige offene Obermenge von $C_1 \cap C$. Dann ist $C_1 \setminus D_1$ eine abgeschlossene Teilmenge von $C_1 \setminus C$ und es folgt mit (19.16):

$$\mu_1(C_1) \leq \lambda(D_1) + \mu_2(C_1 \setminus C)\,.$$

Durch Übergang zum Infimum bezüglich aller offenen Obermengen D_1 von $C \cap C_1$ folgt also

$$\mu_1(C_1) \leq \mu_1(C \cap C_1) + \mu_2(C_1 \setminus C) \tag{19.17}$$

für alle abgeschlossenen Mengen $C, C_1 \subseteq X$. Sei nun $A \in \mathcal{P}(X)$ beliebig. Indem wir in (19.17) das Supremum über alle abgeschlossenen Teilmengen $C_1 \subseteq A$ bilden, erhalten wir für alle abgeschlossenen $C \subseteq X$ unter Verwendung der Isotonie von μ_2 (wegen $C_1 \setminus C \subseteq A \setminus C$):

$$\mu_2(A) \leq \mu_2(A \cap C) + \mu_2(A \setminus C)\,. \tag{19.18}$$

Sind $C_1, C_2 \subseteq X$ beliebige abgeschlossene Mengen mit $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, so gibt es, da X normal ist, offene Mengen $D_1, D_2 \subseteq X$ mit $C_j \subseteq D_j$, $j = 1, 2$, und $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Für jede offene Obermenge D von $C_1 \cup C_2$ folgt dann

$$\lambda(D \cap D_1) + \lambda(D \cap D_2) = \lambda(D \cap (D_1 \cup D_2)) \leq \lambda(D)$$

und hieraus durch Übergang zum Infimum bezüglich D

$$\mu_1(C_1) + \mu_1(C_2) \leq \mu_1(C_1 \cup C_2)\,. \tag{19.19}$$

Sei nun $A \in \mathcal{P}(X)$ beliebig und $C \subseteq X$ abgeschlossen. Bilden wir in (19.19) das Supremum über alle abgeschlossenen Mengen $C_1 \subseteq A \cap C$ und $C_2 \subseteq A \setminus C$, so folgt

$$\mu_2(A \cap C) + \mu_2(A \setminus C) \leq \mu_2(A)\,.$$

Da auch die umgekehrte Ungleichung (19.18) gilt, ist $C \in \mathcal{P}(X)_{\mu_2}$.

(b) Sei nun $\mu := \mu_2|_{\mathcal{P}(X)_{\mu_2}}$. Nach Lemma 19.13 ist $\mathcal{P}(X)_{\mu_2}$ eine Mengenalgebra auf der μ additiv und nach Konstruktion nicht negativ ist. *Wir zeigen, daß μ auch regulär ist.* Wegen (a) und der Definition von μ, μ_1, μ_2 gilt

$$\forall C = \overline{C} \subseteq X: \quad \mu_1(C) = \mu_2(C) = \mu(C)\,.$$

Für beliebige Mengen $A \in \mathcal{P}(X)_{\mu_2}$ gilt also

$$\mu(A) = \sup_{C = \overline{C} \subseteq A} \mu(C) \quad \text{und} \quad \mu(X \setminus A) = \sup_{B = \overline{B} \subseteq X \setminus A} \mu(B)\,. \tag{19.20}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(X) - \mu(X \setminus A) = \mu(X) + \inf_{B=\overline{B}\subseteq X\setminus A} -\mu(B) \\ &= \inf_{B=\overline{B}\subseteq X\setminus A} \mu(X \setminus B) = \inf_{A\subseteq D, D\text{offen}} \mu(D)\,.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man mit (19.20) die Regularität von μ.

(c) Wegen $\mu \geq 0$ und $\mu(X) = \lambda(X) < \infty$ ist μ auch beschränkt, also $\mu \in \mathrm{rba}(X)$ (nach Einschränkung auf $\mathcal{B}_0$). *Zu zeigen bleibt also nur noch*

$$\forall f \in C_b(X): \quad \int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\lambda\,. \tag{19.21}$$

Sei also $f \in C_b(X)$ beliebig. Da wir f zerlegen können in der Form $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ mit $f_j \geq 0$ für $j = 1, \ldots, 4$, genügt es, den Fall $f \geq 0$ zu betrachten. Wegen der Linearität des Integrals können wir weiter auch $0 \leq f \leq 1$ auf X annehmen (andernfalls betrachte man statt f die Funkion $f/\|f\|_X$).

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es endlich viele paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_0$ mit $X = \bigcup_{j=1}^n B_j$ und $\mathrm{diam}(f(B_j)) \leq \frac{\varepsilon}{1+\|\mu\|}$. (Man vergleiche hierzu die Approximation im Beweis zu Lemma 19.27.) Wählen wir beliebige Punkte $a_j \in f(B_j)$ für $j = 1, \ldots, n$, so folgt $\|f - \sum_{j=1}^n a_j\chi_{B_j}\|_X < \frac{\varepsilon}{1+\|\mu\|}$ und daher auch $\left|\int_X \left(f - \sum_{j=1}^n a_j\chi_{B_j}\right)\,d\mu\right| < \varepsilon$. Es folgt

$$0 \leq \int_X f\,d\mu \leq \sum_{j=1}^n a_j\mu(B_j) + \varepsilon\,. \tag{19.22}$$

Wegen der Regularität von μ gibt es abgeschlossene Mengen $C_j \subseteq B_j$ und offene Mengen $D_j \supset B_j$ mit $\mu(D_j\setminus C_j) < \frac{\varepsilon}{2n}$ für $j = 1, \ldots, n$. Da X normal ist, gibt es paarweise disjunkte offene Mengen $G_1, \ldots, G_n$ mit $C_j \subseteq G_j \subseteq D_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Wegen der Stetigkeit von f kann $G_1, \ldots, G_n$ zusätzlich so gewählt werden, daß

$$\sup_{t\in G_j} |f(t) - a_j| < \frac{2\varepsilon}{\|\mu\| + 1}\,.$$

Wir erhalten:

$$|\mu(B_j) - \mu(G_j)| \;=\; |\mu(B_j \setminus G_j) - \mu(G_j \setminus B_j)| \leq 2\mu(D_j \setminus C_j) < 2\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{n}$$

und daher

$$\left|\int_X \Big(\sum_{j=1}^n a_j\chi_{B_j} - \sum_{j=1}^n a_j\chi_{G_j}\Big)d\mu\right| \leq \sum_{j=1}^n a_j\,|\mu(B_j) - \mu(G_j)| < \varepsilon\,. \tag{19.23}$$

Ferner gilt mit $f_0 := \sum_{j=1}^n \max\left\{0, \left(a_j - \frac{2\varepsilon}{\|\mu\|+1}\right)\chi_{G_j}\right\}$:

$$\left|\int_X \sum_{j=1}^n a_j\chi_{G_j}\,d\mu - \int_X f_0\,d\mu\right| \leq \frac{2\varepsilon}{\|\mu\| + 1}\|\mu\| < 2\varepsilon \tag{19.24}$$

sowie

$$\forall t \in X: \quad 0 \leq f_0(t) \leq f(t) \leq 1\,. \tag{19.25}$$

Beachten wir, daß μ und μ_1 auf allen abgeschlossenen Teilmengen von X übereinstimmen, so erhalten wir wegen der Regularität von μ und nach Definition von μ_1 für $j = 1, \ldots, n$:

$$\mu(G_j) = \sup_{C=\overline{C}\subseteq G_j} \mu(C) = \sup_{C=\overline{C}\subseteq G_j} \mu_1(C) \leq \lambda(G_j)\,.$$

Hiermit folgt unter Verwendung von (19.25)

$$\int_X f_0\,d\mu \le \int_X f_0\,d\lambda \le \int_X f\,d\lambda\,.$$

Zusammen mit (19.22), (19.23) und (19.24) erhalten wir hieraus $\int_X f\,d\mu \le \int_X f\,d\lambda + 4\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\int_X f\,d\mu \le \int_X f\,d\lambda\,. \tag{19.26}$$

Nun hat mit f auch die Funktion $1-f$ die Eigenschaft

$$0 \le 1-f \le 1 \quad \text{auf } X\,.$$

Wenden wir also (19.26) auf $1-f$ an, so folgt

$$\mu(X) - \int_X f\,d\mu = \int_X 1-f\,d\mu \le \int_X 1-f\,d\lambda \le \lambda(X) - \int_X f\,d\lambda\,.$$

Wegen $\mu(X) = \lambda(X)$ und (19.26) folgt nun

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\lambda$$

und damit die Behauptung. □

Ist X ein topologischer Raum und bezeichnet $\mathcal{B}$ die σ–Algebra der Borelmengen, so bezeichnen wir mit $\operatorname{rca}(X,\mathcal{B})$ oder kürzer mit $\operatorname{rca}(X)$ die Menge aller regulären, abzählbar additiven $\mathbb{K}$–wertigen Mengenfunktionen auf $\mathcal{B}$. Nach Lemma 19.10 ist jedes $\mu \in \operatorname{rca}(X)$ schon beschränkt und von beschränkter Variation. Versehen mit der durch $\|\mu\| := v(\mu, X)$ für $\mu \in \operatorname{rca}(X)$ definierten Norm ist $\operatorname{rca}(X)$ ein normierter Raum.

19.30. Satz (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Für $\mu \in \operatorname{rca}(X)$ definieren wir*

$$x'_\mu(f) := \int_X f\,d\mu \quad (f \in C(X))\,.$$

Dann ist die Abbildung $\mu \mapsto x'_\mu$ ein ordnungserhaltender isometrischer Isomorphismus von $(\operatorname{rca}(X), v(\cdot, X))$ auf $C(X)'$.

Beweis. Die Beweise zu 1.) und 2.) im Beweis zu Satz 19.29 übertragen sich unmittelbar auf $\operatorname{rca}(X)$. Die durch $\mu \mapsto x'_\mu$ definierte Abbildung ist also eine lineare, ordnungserhaltende Isometrie von $\operatorname{rca}(X)$ nach $C(X)'$.

Zu zeigen ist also nur noch die Surjektivität. Sei also $x' \in C(X)'$ beliebig. Da wegen der Kompaktheit von X die Räume $C_b(X)$ und $C(X)$ übereinstimmen, ist nach Satz 19.29 durch $\mu \mapsto x'_\mu$ ein isometrischer, ordnungserhaltender Isomorphismus von $\operatorname{rba}(X)$ auf $C(X)'$ gegeben. Es gibt also ein $\mu_{x'} \in \operatorname{rba}(X)$ mit $\int_X \cdot\, d\mu_{x'} = x'$ auf $C(X)$. Nach Satz 19.21 gibt es zu $\mu_{x'}$ genau eine, abzählbar additive, reguläre Erweiterung $\lambda_{x'}$ auf die von $\mathcal{B}_0$ erzeugte σ–Algebra $\mathcal{B}$. Da $\mu_{x'}$ und $\lambda_{x'}$ auf $\mathcal{B}_0$ übereinstimmen, folgt $\int_X f\,d\mu_{x'} = \int_X f\,d\lambda_{x'}$ für alle $f \in \mathcal{T}(X,\mathcal{B}_0)$. Da beide Integrale auf $B(X,\mathcal{B}_0)$ stetig fortsetzbar sind, stimmen sie auf $B(X,\mathcal{B}_0)$ überein und damit nach Lemma 19.27 auch auf $C(X) = C_b(X)$. Damit folgt $x' = \int_X \cdot\, d\lambda_{x'}$ auf $C(X)$. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 19.

19.1. Aufgabe. Sei μ eine beschränkte, $\mathbb{K}$-wertige Mengenfunktion auf einer Algebra Σ von Teilmengen einer nicht leeren Menge X. Zeigen Sie, daß für alle $f \in B(X, \Sigma)$ gilt:

$$\Big| \int_X f(x)\, d\mu(x) \Big| \leq \int_X |f(x)|\, dv(\mu, x)\,.$$

19.2. Aufgabe. Sei Σ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ ein positives Maß auf (X, Σ). Zeigen Sie: Ist f eine komplexwertige, integrierbare Funktion auf (X, Σ, μ) mit $\int_E f(t)\, d\mu(t) = 0$ für alle $E \in \Sigma$, dann ist f identisch Null μ-fast überall.

19.3. Aufgabe. Bekanntlich ist $\ell^1(\mathbb{N})$ isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $(\ell^\infty(\mathbb{N}))'$. Zeigen Sie:

(a) $(\ell^\infty(\mathbb{N}))'$ läßt sich darstellen als topologisch direkte Summe

$$(\ell^\infty(\mathbb{N}))' = (c_0(\mathbb{N}))^\perp \oplus \ell^1(\mathbb{N}).$$

(b) Jedes $\mu \in ba(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ läßt sich eindeutig zerlegen in der Form $\mu = \mu_0 + \mu_1$ mit

$$\mu_0 \in sba(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) := \{\nu \in ba(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \mid v(\{n\}) = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

und $\mu_1 \in ca(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Die Abbildung

$$sba(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \times ca(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \longrightarrow ba(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad (\mu_0, \mu_1) \mapsto \mu_0 + \mu_1$$

ist ein topologischer Isomorphismus. Für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ ist $v(\mu_1, A) = \sum_{k \in A} |\mu(\{k\})|$.

KAPITEL 20

Vektorwertige Funktionen

In diesem Kapitel soll eine Einführung in die Theorie vektorwertiger holomorpher Funktionen gegeben werden. Für die vektorwertige Fassung des Integralsatzes und der Integralformel von Cauchy benötigen wir ein Integral für vektorwertige stetige Funktionen. Für unsere Zwecke ist der folgende Satz ausreichend.

20.1. Satz. *Sei (E,τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum, K ein kompakter topologischer Hausdorffraum und sei $f : K \to E$ eine stetige E-wertige Funktion, für die die abgeschlossene, absolutkonvexe Hülle $H := \overline{\operatorname{absconv}(f(K))}$ des Wertebereichs wieder kompakt ist. Dann gibt es zu jedem $\mu \in \operatorname{rca}(X)$ genau ein $I_\mu(f) \in E$ mit*

$$\forall x' \in E' : \qquad x'(I_\mu(f)) = \int_K x'(f(t))\, d\mu(t)\,. \tag{20.1}$$

Wir schreiben daher $I_\mu(f) = \int_K f\, d\mu$. Es gilt

$$\int_K f\, d\mu \in v(\mu, K) \cdot \overline{\operatorname{absconv}(f(K))}. \tag{20.2}$$

Beweis. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus dem Satz von Hahn-Banach. Die Abbildung $u'' : x' \mapsto \int_K x'(f(t))d\mu(t)$ ist offensichtlich linear. Da $f(K)$ kompakt und damit auch beschränkt in (E,τ) ist, folgt wegen

$$|u''(x')| = \Big| \int_K x'(f(t))\, d\mu(t) \Big| \le v(\mu, K) \cdot \sup_{x \in f(K)} |x'(x)|$$

die Stetigkeit von u'' auf E'_b. Hieraus folgt insbesondere

$$u'' \in v(\mu, K) \cdot (f(K)^\circ)^\circ = v(\mu, K) \cdot \overline{\operatorname{absconv}\big(J(f(K))\big)}^{\sigma(E'',E')},$$

wobei $J : E \to E''$ mit $J(x)(x') := x'(x)$ für alle $x \in E$, $x' \in E'$ der kanonische Monomorphismus sei. Da $J : (E,\tau) \to (E'', \sigma(E'',E'))$ stetig ist, und die abgeschlossene, absolutkonvexe Hülle $H = \overline{\operatorname{absconv}(f(K))}$ von $f(K)$ τ-kompakt ist, ist auch $J(H)$ kompakt in $(E'', \sigma(E'',E')$ und somit auch $\sigma(E'',E')$-abgeschlossen und absolutkonvex. Damit folgt

$$u'' \in v(\mu, K) \cdot J(H). \tag{20.3}$$

Insbesondere gibt es genau ein $I_\mu(f) \in E$ mit $J(I_\mu(f)) = u''$. Dieses Element $I_\mu(f)$ erfüllt somit (20.1). Wegen (20.3) gilt auch (20.2). $\square$

20.2. Bemerkung. Ist in der Situation von Satz 20.1 das Maß μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (d.h. $\mu \ge 0$ und $\mu(K) = 1$), so gilt schon

$$\int_K f\, d\mu \in \overline{\operatorname{conv}\big(f(K)\big)}.$$

Zum Beweis sei auf [**21**], Theorem 3.27, verwiesen.

20.3. Bemerkung. Ist (E,τ) ein vollständiger metrisierbarer lokalkonvexer Raum, so ist in ihm die abgeschlossene konvexe (bzw. abgeschlossene absolutkonvexe) Hülle von kompakten Mengen wieder kompakt. Siehe Aufgabe 16.6 und Satz 16.26. Satz 16.26 läßt sich analog auch für absolutkonvexe Hüllen präkompakter Mengen zeigen. Insbesondere ist in diesem Fall die Voraussetzung der Kompaktheit von $H = \overline{\operatorname{absconv}(f(K))}$ in Satz 20.1 automatisch erfüllt.

20.4. Bemerkung. Ist in der Situation von Satz 20.1 $(E,\tau) = (F', \sigma(F',F))$ für einen Banachraum $(F, \|\cdot\|)$ so ist ebenfalls die Voraussetzung der Kompaktheit von $H = \overline{\operatorname{absconv}(f(K))}$ in Satz 20.1 automatisch erfüllt. Damit kann Satz 20.1 auf schwach-$*$ stetige Funktionen mit Werten in dualen Banachräumen angewendet werden.

Dies folgt mit Aufgabe 20.1.

20.5. Bemerkung. Ohne Beweis vermerken wir, daß in Banachräumen $(E, \|\cdot\|)$ die schwach-abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von schwach-kompakten Mengen wieder schwach-kompakt ist. Damit kann Satz 20.1 auch zur Integration schwach-stetiger Funktionen verwendet werden. Den Beweis dieses Satzes von Krein und Šmulian findet man in [**8**].

Der Begriff der holomorphen Funktionen läßt sich auf verschiedene Art und Weise auf den Fall vektorwertiger Funktionen übertragen. Wir beschränken uns dabei auf den für uns ausreichenden Fall holomorpher Funktionen mit Werten in einem komplexen Banachraum. Falls nicht anders vermerkt sei also im folgenden E stets ein Banachraum über $\mathbb{C}$ versehen mit seiner Norm $\|\cdot\|$.

20.6. Definition. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to E$ heißt auf Ω

- *schwach holomorph*, falls für alle $x' \in E'$ die $\mathbb{C}$-wertige Funktion $x' \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto x'(f(z))$, auf Ω holomorph im klassischen Sinn ist.
- *stark holomorph*, falls f auf Ω komplex differenzierbar ist, d.h. falls für alle $w \in \Omega$ der Grenzwert
$$f'(w) := \frac{df}{dz}(w) := \lim_{z\to w} \frac{1}{z-w}(f(z) - f(w))$$
in $(E, \|\cdot\|)$ existiert.

Es stellt sich heraus, daß diese beiden Begriffe übereinstimmen.

20.7. Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für eine Funktion $f : \Omega \to E$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist auf Ω schwach holomorph.*

(b) *f ist stetig und es gilt die Cauchysche Integralformel: Für jedes in Ω nullhomologe*[1] *System Γ von endlich vielen stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Kurven in Ω und alle $z \in \Omega \setminus \operatorname{Spur}(\Gamma)$ gilt*
$$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

(c) *f ist stetig und es gilt der Cauchysche Integralsatz: Für jedes in Ω nullhomologe System Γ von endlich vielen stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Kurven in Ω gilt*
$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

[1]Zur Erinnerung: Eine System Γ von endlich vielen geschlossenen Kurven in Ω heißt in Ω *nullhomolog*, falls für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ die Windungszahl $n(\Gamma, w)$ von Γ bezüglich w verschwindet.

(d) *f ist auf Ω stark holomorph.*

Beweis. (a)$\Longrightarrow$(b): Sei also f auf Ω schwach holomorph. Dann gilt für alle $x' \in E'$ und alle nullhomologen, geschlossenen Kurvensysteme wie in (b):

$$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x'(f(\zeta))}{\zeta - z}\, d\zeta$$

(vergl. Satz 5.10 in [**1**]). Nach Definition des Integrals für stetige Funktionen, genügt es also die Stetigkeit von f zu zeigen.

Sei also $w \in \Omega$ beliebig. Dann gibt es ein $r > 0$ mit

$$D_{2r} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - w| \leq 2r\} \subseteq \Omega\,.$$

Sei $x' \in E'$ beliebig. Mit der Cauchyschen Integralformel angewendet auf die holomorphe $\mathbb{C}$-wertige Funktion $x' \circ f$ folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z - w| < 2r$:

$$\begin{aligned} \frac{x'(f(z) - f(w))}{z - w} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D_{2r}} \frac{1}{z - w}\Big(\frac{x'(f(\zeta))}{\zeta - z} - \frac{x'(f(\zeta))}{\zeta - w}\Big)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D_{2r}} \frac{x'(f(\zeta))}{(\zeta - z)(\zeta - w)}\, d\zeta\,. \end{aligned} \tag{20.4}$$

Es folgt also für alle $x' \in E'$ und alle z mit $0 < |z - w| \leq r$:

$$\Big| x'\Big(\frac{1}{z - w}(f(z) - f(w))\Big)\Big| \leq \frac{1}{r} \max_{\zeta \in \partial D_{2r}} |x'(f(\zeta))|\,.$$

Die Menge

$$\Big\{\frac{1}{z - w}(f(z) - f(w))\,;\, 0 < |z - w| \leq r\Big\}$$

ist also schwach und damit nach dem Satz 16.20 von Mackey auch normbeschränkt. Es gibt daher ein $M > 0$ mit $\|f(z) - f(w)\| \leq |z - w| M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z - w| \leq r$. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so gilt $\|f(z) - f(w)\| < \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < \delta := \min\{r, \varepsilon/M\}$. Die Funktion f ist somit in allen Punkten $w \in \Omega$ stetig.

(b)$\Longrightarrow$(c) zeigt man wie im skalarwertigen Fall (vergl. Folgerung 5.12 und den zugehörigen Beweis in [**1**]).

(c)$\Longrightarrow$(a): Ist (c) erfüllt, so gilt für alle $x' \in E'$ und alle achsenparallelen abgeschlossenen Rechtecke $R \subset \Omega$:

$$\int_{\partial_+ R} x'(f(z))\, dz = 0.$$

Nach dem Satz von Morera (siehe z.B. Satz 3.4 in [**1**]) ist also $x' \circ f$ für alle $x' \in E'$ auf Ω holomorph, d.h. f ist auf Ω schwach holomorph.

(d)$\Longrightarrow$(a) ist offensichtlich.

(b)$\Longrightarrow$(d): Sei nun (b) erfüllt und sei $w \in \Omega$ beliebig. Sei wieder $r > 0$ mit $D_{2r} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - w| \leq 2r\} \subset \Omega$. Wir vermuten aufgrund der skalaren Theorie, daß

$$\eta := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D_{2r}} \frac{1}{(\zeta - w)^2} f(\zeta)\, f\zeta$$

die Ableitung von f in w ist. Unter Verwendung der nach Voraussetzung gültigen Cauchyschen Integralformel gilt (wie in (20.4)) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z-w| \leq r$ für $z \to w$:

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{z-w}(f(z)-f(w))-\eta\Big\| &= \frac{1}{2\pi}\Big\|\int_{\partial_+ D_{2r}}\Big(\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-w)}-\frac{1}{(\zeta-w)^2}\Big)f(\zeta)\,d\zeta\Big\| \\ &= \frac{|z-w|}{2\pi}\Big\|\int_{\partial_+ D_{2r}}\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-w)^2}f(\zeta)\,d\zeta\Big\| \\ &\leq \frac{|z-w|}{2r^2}\max_{\zeta\in\partial D_{2r}}\|f(\zeta)\| \to 0\,.\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Abschätzung aus Aufgabe 20.3 verwendet. Also ist f in w komplex differenzierbar mit $f'(w) = \eta$. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir eine ganze Reihe von für komplexwertige holomorphe Funktionen bekannten Resultaten auf den Fall vektorwertiger Funktionen übertragen.

Statt von stark- oder schwachholomorphen Funktionen sprechen wir wegen Satz 20.7 nur noch von holomorphen Funktionen. Mit $\mathcal{O}(\Omega, E)$ bezeichnen wir die Menge aller auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen mit Werten in einem komplexen Banachraum $(E, \|\cdot\|)$. Mit den punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren ist dies ein Vektorraum. Wie im skalaren Fall rechnet man nach, daß $\mathcal{O}(\Omega, E)$ dann ein bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von Ω abgeschlossener Untervektorraum des Raums aller stetigen E-wertigen Funktionen ist. Insbesondere ist $\mathcal{O}(\Omega, E)$, versehen mit dieser Topologie ein vollständiger metrisierbarer lokalkonvexer Raum.

Die folgende vektorwertige Fassung des Satzes von Liouville ist uns bereits im Beweis zu Satz 7.9 begegnet:

20.8. Satz (von Liouville). *Ist $f : \mathbb{C} \to E$ eine beschränkte holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Werten in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$, so ist f schon konstant.*

Beweis. Sei $x' \in E'$ beliebig. Dann ist die komplexwertige Funktion

$$z \mapsto x'(f(z) - f(0))$$

auf $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt und verschwindet in 0. Nach der klassischen Fassung des Satzes von Liouville ist sie also identisch verschwindend. Damit folgt für alle $z \in \Omega$ und alle $x' \in E'$: $x'(f(z) - f(0)) = 0$. Da E' die Punkte von E trennt, folgt $f(z) = f(0)$ für alle $z \in E$. □

Die folgende Aussage rechnet man unmittelbar nach:

20.9. Lemma (Produktregel). *Seien $(E_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1,2,3$ drei Banachräume, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen sowie $f \in \mathcal{O}(\Omega, E_1)$, $F_j \in \mathcal{O}(\Omega, \mathcal{L}(E_j, E_{j+1}))$, $j = 1,2$. Dann gilt $F_2F_1 \in \mathcal{O}(\Omega, \mathcal{L}(E_1, E_3))$ und $F_1 f \in \mathcal{O}(\Omega, E_2)$, wobei die hierbei auftretenden Funktionen F_2F_1 und $F_1 f$ definiert sind durch $(F_2F_1)(z) := F_2(z) \circ F_1(z)$ und $(F_1 f)(z) := F_1(z)(f(z))$ für alle $z \in \Omega$.*

20.10. Satz (Identitätssatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G, E)$, $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Sei A eine Teilmenge von G, die wenigstens einen Häufungspunkt $z_0 \in G$ in G besitzt, und gelte $f(z) = 0$ für alle $z \in A$. Dann ist schon $f \equiv 0$ auf ganz G.*

Beweis. Nach der klassischen Fassung des Identitätssatzes gilt $x' \circ f \equiv 0$ auf G für alle $x' \in E'$. Da E' die Punkte von E trennt folgt $f \equiv 0$ auf G. □

20.11. Folgerung. *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $(E, \|\cdot\|)$ ein komplexer Banachraum und F ein abgeschlossener Unterraum von E. Sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge von G mit wenigstens einem Häufungspunkt in G. Ist $f \in \mathcal{O}(G, E)$ mit $f(A) \subseteq F$, so gilt schon $f(G) \subseteq F$.*

Beweis. Bezeichnet $\pi : E \to E/F$ den kanonischen Epimorphismus, so ist $\pi \circ f \in \mathcal{O}(G, E/F)$ nach Lemma 20.9. Wegen $(\pi \circ f)(A) = \{0\}$ folgt nach dem Identitätssatz 20.10 schon $\pi \circ f \equiv 0$, d.h. $f(z) \in F$ für alle $z \in G$. □

20.12. Satz (Maximumprinzip). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte und offene Menge und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega, E) \cap C(\overline{\Omega}, E)$, $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann gilt*

$$\|f\|_\Omega := \sup_{z\in\Omega} \|f(z)\| = \|f\|_{\partial\Omega} = \sup_{z\in\partial\Omega} \|f(z)\| .$$

Beweis. *Annahme:* Es gibt ein $w \in \Omega$ mit $\|f(w)\| > \|f\|_{\partial\Omega}$. Nach Hahn-Banach gibt es ein $x' \in E'$ mit $\|x'\| = 1$ und mit

$$x'(f(w)) = \|f(w)\| > \sup_{z\in\partial\Omega} \|f(z)\| \geq \sup_{z\in\partial\Omega} |x'(f(z))|$$

im Widerspruch zum klassischen Maximumprinzip. □

Für Abschätzungszwecke benötigen wir noch folgende Hilfsaussage:

20.13. Lemma. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum, $\mu \in \operatorname{rca}(K)$ und $f \in C(K, E)$. Dann gilt*

$$\Big\| \int_K f\, d\mu \Big\| \leq \int_K \|f(t)\|\, dv(\mu, t) \leq \|f\|_K v(\mu, K).$$

Beweis. Zu $I_\mu(f) := \int_K f\, d\mu$ gibt es nach Hahn-Banach ein $x' \in E'$ mit $\|x'\| = 1$ und mit $\|I_\mu(f)\| = |x'(I_\mu(f))|$. Nach Aufgabe 19.1 folgt

$$\begin{aligned} \|I_\mu(f)\| = |x'(I_\mu(f))| = \Big| \int_K x'(f(t))\, d\mu(t) \Big| &\leq \int_K |x'(f(t))|\, dv(\mu, t) \\ &\leq \int_K \|f(t)\|\, dv(\mu, t) \leq \|f\|_K v(\mu, K). \end{aligned}$$

□

20.14. Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt und bezeichne λ das ebene Lebesguemaß.

$$A^2(\Omega, E) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega, E)\, ;\, \|f(\cdot)\| \in L^2(\Omega, \lambda)\}.$$

Für $f \in A^2(\Omega, E)$ definieren wir

$$\|f\|_2 := \Big(\int_\Omega \|f(z)\|^2\, d\lambda(z) \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Man rechnet leicht nach, daß hierdurch eine Norm auf $A^2(\Omega, E)$ gegeben ist.

Ist speziell E ein Hilbertraum bezüglich eines Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, so ist durch

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega \langle f(z), g(z)\rangle_E\, d\lambda(z) \qquad (f, g \in A^2(\Omega, E))$$

ein Skalarprodukt auf $A^2(\Omega, E)$ gegeben.

20.15. Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt. $(A^2(\Omega, E), \|\cdot\|_2)$ ist ein Banachraum und die kanonische Inklusion $A^2(\Omega, E) \to \mathcal{O}(\Omega, E)$ ist stetig. Insbesondere ist $A^2(\Omega, E)$ ein Hilbertraum, falls E ein Hilbertraum ist.*

Beweis. Sei $w_0 \in \Omega$ beliebig und sei $r > 0$ beliebig mit

$$K_r(w_0) := \{z \in \mathbb{C}\, ;\, |z - w_0| \leq r\} \subset \Omega.$$

Dann gibt es $r_1 > 0, r_2 > 0$ mit $r < r_1 < r_2$ und $K_{r_2}(w_0) \subset \Omega$. Sei $0 \leq \varphi \in C^\infty((0,\infty))$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [r_1, r_2]$ und $\int_{r_1}^{r_2} \varphi(\rho)d\rho = 1$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt für alle $w \in K_r(w_0)$, $\rho \in [r_1, r_2]$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_+ K_\rho(w_0)} \frac{1}{\zeta - w} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta}}{w_0 + \rho e^{i\theta} - w} f(w_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta$$

also auch

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\rho) e^{i\theta}}{w_0 + \rho e^{i\theta} - w} f(w_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta \rho\, d\rho\,.$$

Mit Lemma 20.13 folgt

$$\|f(w)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{K_{r_2}(w_0)\setminus K_{r_1}(w_0)} \left|\frac{\varphi(|\zeta - w_0|)}{\zeta - w}\right| \|f(\zeta)\| d\lambda(\zeta)\,.$$

Wenden wir hierauf die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an, so erhalten wir

$$\sup_{w\in K_r(w_0)} \|f(w)\| \leq \frac{\|\varphi\|_{[r_1,r_2]}}{r_1 - r} \lambda(K_{r_2}(w_0) \setminus K_{r_1}(w_0))^{\frac{1}{2}} \|f\|_2\,.$$

Ist also $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $A^2(\Omega, E)$, so ist $(f_n)_{n=1}^\infty$ auf jeder kompakten Kreisscheibe in Ω eine gleichmäßige Cauchyfolge und somit konvergent in $\mathcal{O}(\Omega, E)$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von Ω gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$. Wegen

$$\int_\Omega \left|\|f_n(z)\| - \|f_m(z)\|\right|^2 d\lambda(z) \leq \int_\Omega \|f_n(z) - f_m(z)\|^2 d\lambda(z)$$

ist auch $(\|f_n(\cdot)\|)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ und damit konvergent im L^2-Sinn gegen eine Funktion $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ Wegen der kompakt gleichmäßigen Konvergenz $\|f_n(\cdot)\| \to \|f(\cdot)\|$ folgt $\|f(z)\| = h(z)$ λ-fast überall und somit $f \in A^2(\Omega, E)$. Zu zeigen ist noch $\|f - f_n\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\|f(\cdot)\| \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ gibt es eine kompakte Teilmenge K von Ω, so daß

$$\left(\int_\Omega \chi_{\Omega\setminus K}(z)^2 \|f(z)\|^2\, d\lambda(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{20.5}$$

Mit $\|f_n(\cdot)\| \to \|f(\cdot)\|$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ gilt auch $\chi_{\Omega\setminus K}\|f_n(\cdot)\| \to \chi_{\Omega\setminus K}\|f(\cdot)\|$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Insbesondere gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1: \qquad \left(\int_\Omega \chi_{\Omega\setminus K}(z)^2 \|f_n(z)\|^2\, d\lambda(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{20.6}$$

Schließlich gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ gegen f auf K ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_2: \qquad \left(\int_\Omega \chi_k(z)^2 \|f_n(z) - f(z)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{20.7}$$

Unter Verwendung von (20.5)-(20.7) folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}: \quad \|f_n - f\|_2 < \varepsilon\,,$$

d.h. $f_n \to f$ in $(A^2(\Omega, E), \|\cdot\|)$. $\square$

Für einen stetigen linearen Operator T auf einem komplexen Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ definieren wir für offene Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ die Abbildung

$$\alpha_T = \alpha_T^\Omega : \mathcal{O}(\Omega, E) \to \mathcal{O}(\Omega, E)$$

durch $(\alpha_T f)(z) := (z-T)f(z)$ für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$, $z \in \Omega$. Man rechnet unmittelbar nach, daß α_T stetig ist. Für beschränkte, offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$ bildet α_T auch den Raum $A^2(\Omega, E)$ stetig in sich ab. Im folgenden Kapitel benötigen wir:

20.16. Lemma. *Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\sigma(T,E) \subset \Omega$. Dann gilt:*

(a) *$\alpha_T : \mathcal{O}(\Omega, E) \to \mathcal{O}(\Omega, E)$ ist injektiv mit abgeschlossenem Bild.*
(b) *Ist Ω beschränkt, so ist auch $\alpha_T : A^2(\Omega, E) \to A^2(\Omega, E)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild.*

Beweis. In beiden Fällen genügt es zu zeigen: Jede Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ für die $(\alpha_T f_n)_{n=1}^\infty$ eine Nullfolge in $\mathcal{O}(\Omega, E)$ bzw. in $A^2(\Omega, W)$ ist, ist schon selbst eine Nullfolge in $\mathcal{O}(\Omega, E)$ bzw. in $A^2(\Omega, W)$.

Zu (a) Sei $\alpha_T f_n$ konvergent gegen 0 in $\mathcal{O}(\Omega, E)$ also gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Ω und sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω. Dann gibt es eine kompakte Menge $H \subset \Omega$ mit $K \cup \sigma(T, \Omega) \subset \operatorname{int} H$. Nach dem Maximumprinzip gilt:

$$\begin{aligned}\sup_{z\in H}\|f_n(z)\| \leq \sup_{z\in\partial H}\|f_n(z)\| &\leq \sup_{z\in\partial H}\|(z-T)^{-1}\|\cdot\|(z-T)f_n(z)\|\\ &\leq \sup_{z\in\partial H}\|(z-T)^{-1}\|\cdot\sup_{z\in H}\|(z-T)f_n(z)\| \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, da $\alpha_T f_n \to 0$ gleichmäßig auf H und da wegen der Stetigkeit der Resolventenfunktion diese auf der kompakten Menge $\partial H \subset \rho(T,E)$ beschränkt ist. Also ist $f_n \to 0$ gleichmäßig auf H und damit auch auf K für $n \to \infty$.

Zu (b) Sei nun Ω beschränkt und sei $\alpha_T f_n \to 0$ in $A^2(\Omega, E)$ für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit der kanonischen Einbettung von $A^2(\Omega, E)$ in $\mathcal{O}(\Omega, E)$ und (a) folgt dann für $n \to \infty$ die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen 0 auf allen kompakten Teilmengen von Ω. Sei nun U eine offene Menge mit $\sigma(T,E) \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$. Dann ist $\overline{\Omega}\setminus U$ eine kompakte Teilmenge der Resolventenmenge $\rho(T,E)$, auf der die Resolventenfunktion $(z-T)^{-1}$ wegen ihrer Stetigkeit beschränkt ist. Es folgt mit $W := \Omega \setminus U$:

$$\begin{aligned}\|f_n\|_2 &\leq \Big(\int_W \|f_n(z)\|^2 d\lambda(z)\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_U \|f_n(z)\|^2 d\lambda(z)\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \Big(\int_W \|(z-T)^{-1}\|^2\cdot\|(z-T)f_n(z)\|^2 d\lambda(z)\Big)^{\frac{1}{2}} + \lambda(U)^{\frac{1}{2}}\sup_{z\in\overline{U}}\|f_n(z)\|\\ &\leq \sup_{z\in\overline{\Omega}\setminus U}\|(z-T)^{-1}\|\cdot\|\alpha_T f_n\|_2 + \lambda(U)^{\frac{1}{2}}\sup_{z\in\overline{U}}\|f_n(z)\| \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 20.

20.1. Aufgabe. Ist $(F, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $K \subset F'$ kompakt bezüglich $\sigma(F', F)$, so ist auch die $\sigma(F', F)$-abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von K wieder $\sigma(F', F)$-kompakt.

20.2. Aufgabe. Seien (E, τ), K und $f : K \to E$ wie in Satz 20.1 und sei $T : (E,\tau) \to (F, \tau_F)$ eine stetige, lineare Abbildung von (E,τ) in einen weiteren lokalkonvexen Hausdorffraum (F, τ_F). Zeigen Sie, daß dann das Integral $\int_K T(f(t))\, d\mu(t)$ existiert und daß gilt:

$$\int_K T(f(t))\, d\mu(t) = T\Big(\int_K f\, d\mu\Big).$$

20.3. Aufgabe. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei Γ ein System von endlich vielen stückweise glatten Kurven. Zeigen Sie: Ist f eine auf $\mathrm{Spur}(\Gamma)$ stetige Funktion mit Werten in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$, so gilt

$$\Big\| \int_\Gamma f(z)\,dz \Big\| \leq L(\Gamma) \max_{z \in \mathrm{Spur}(\Gamma)} \|f(z)\|.$$

Hierbei bezeichne $L(\Gamma)$ die Länge des Kurvensystems Γ.

20.4. Aufgabe. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion $f : \Omega \to E$ mit Werten in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann auf Ω holomorph, wenn für jedes $z \in \Omega$ die Funktion f auf einer Kreisscheibe $D \subseteq \Omega$ mit Mittelpunkt z und mit positivem Radius durch eine in allen Punkten aus D in $(E, \|\cdot\|)$ konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten in E dargestellt werden kann.

(b) Für jedes $z \in \Omega$ ist die Potenzreihe aus (a) sogar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge der größten in Ω enthaltenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z konvergent.

KAPITEL 21

Der analytische Funktionalkalkül

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und K eine kompakte Teilmenge von Ω, so wollen wir im folgenden unter einem K *umlaufenden und in* Ω *verlaufenden Kurvensystem* Γ ein System von endlich vielen stückweise stetig differenzierbaren (oder allgemeiner rektifizierbaren), geschlossenen Kurven verstehen, welches in Ω nullhomolog ist und $n(\Gamma, z) = 1$ für alle $z \in K$ erfüllt.

In diesem Kapitel sei $(E, \|\cdot\|)$ stets ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf E. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, die das Spektrum

$$\sigma(T,E) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, z - T \text{ ist nicht bijektiv}\} = \sigma_{\mathcal{L}(E)}(T)$$

von T bezüglich E als Teilmenge enthält, und ist Γ ein $\sigma(T,E)$ umlaufendes und in Ω verlaufendes Kurvensystem, so definieren wir (angeregt durch die Integralformel von Cauchy) lineare Abbildungen

$$\Phi_T^\Omega : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{L}(E)\,, \qquad \Psi_t^\Omega : \mathcal{O}(\Omega, E) \to E$$

durch

$$\Phi_T^\Omega(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-T)^{-1}\,dz \qquad (f \in \mathcal{O}(\Omega))\,,$$
$$\Psi_T^\Omega(F) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-T)^{-1}F(z)\,dz \qquad (F \in \mathcal{O}(\Omega, E))\,.$$

Wir nennen Φ_T^Ω bzw. Ψ_T^Ω den *analytischen Funktionalkalkül* für skalarwertige bzw. E-wertige holomorphe Funktionen.

21.1. Lemma. *Die Abbildungen* Φ_T^Ω, Ψ_T^Ω *sind wohldefiniert, also unabhängig von der speziellen Wahl des Kurvensystems* Γ *mit den obigen Eigenschaften.*

Beweis. Seien also Γ_1 und Γ_2 zwei in Ω verlaufende und $\sigma(T,E)$ umlaufende Kurvensysteme. Dann ist das Kurvensystem $\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog in $\Omega \setminus \sigma(T,E)$ und mit dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1-\Gamma_2} f(z)(z-T)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(z)(z-T)^{-1}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f(z)(z-T)^{-1}\,dz\,.$$

Ebenso folgt die Wohldefiniertheit von Ψ_T^Ω. □

Die Werte $\Phi_T^\Omega(f)$, $\Psi_T^\Omega(F)$ hängen sogar nur von dem Verhalten von f, F in einer Umgebung von $\sigma(T,E)$ also nur vom *Keim* von f, F auf $\sigma(T,E)$ ab:

21.2. Folgerung. *Seien* $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ *offen mit* $\sigma(T,E) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. *Sind* $f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ *und* $F_j \in \mathcal{O}(\Omega_j, E)$, $j = 1,2$, *holomorphe Funktionen mit* $f_1 \equiv f_2$, $F_1 \equiv F_2$ *auf einer offenen Menge* Ω *mit* $\sigma(T,E) \subset \Omega \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$. *Dann gilt:*

$$\Phi_T^{\Omega_1}(f_1) = \Phi_T^{\Omega_2}(f_2) \quad \textit{und} \quad \Psi_T^{\Omega_1}(F_1) = \Psi_T^{\Omega_2}(F_2)\,.$$

Beweis. Sei Γ ein $\sigma(T,E)$ umlaufendes und in Ω (also auch in Ω_1 und in Ω_2) verlaufendes Kurvensystem. Nach Lemma 21.1 gilt

$$\Phi_T^{\Omega_1}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-T)^{-1}\,dz = \Phi_T^{\Omega_2}(f)$$

und

$$\Psi_T^{\Omega_1}(F) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-T)^{-1}F(z)\,dz = \Psi_T^{\Omega_2}(F)$$

und damit die Behauptung. □

21.3. Satz. *Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\sigma(T,E) \subset \Omega$. Die Abbildungen $\Phi_T^\Omega : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{L}(E)$ und $\Psi_T^\Omega : \mathcal{O}(\Omega, E) \to E$ sind stetig und linear und haben folgende Eigenschaften:*

(a) *Für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[Z]$ gilt*

$$\Phi_T^\Omega(p) = p(T).$$

(b) *Für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $F \in \mathcal{O}(\Omega, E)$ gilt*

$$\Psi_T^\Omega(fF) = \Phi_T^\Omega(f)\Psi_T^\Omega(F).$$

(c) *Für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $x \in E$ sei $f \otimes x : \Omega \to E$ die Funktion $z \mapsto f(z)x$. Mit dieser Bezeichnung gilt:*

$$\Psi_T^\Omega(f \otimes x) = \Phi_T^\Omega(f)x.$$

(d) *$\Phi_T^\Omega : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{L}(E)$ ist ein Algebrenhomomorphismus.*

(e) *Ist auch $(E_1, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum und sind $A \in \mathcal{L}(E, E_1)$, $S \in \mathcal{L}(E_1)$ stetige lineare Operatoren mit $\sigma(S, E_1) \cup \sigma(T, E) \subset \Omega$ und $SA = AT$, so gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $F \in \mathcal{O}(\Omega, E)$:*

$$A\Phi_T^\Omega(f) = \Phi_S^\Omega(f)A \quad \textit{und} \quad A\Psi_T^\Omega(F) = \Psi_S^\Omega(A \circ F).$$

Insbesondere folgt (mit speziell $S = T$), daß Φ_T^Ω seine Werte im Bikommutanten von T annimmt.

Beweis. Die Linearität ergibt sich aus der Linearität des Integrals. Die Stetigkeit folgt unter Verwendung von Aufgabe 20.3 mit den nahe liegenden Abschätzungen

$$\|\Phi_T^\Omega(f)\| \le L(\Gamma) \cdot \sup_{z \in \mathrm{Spur}(\Gamma)} \|(z-T)^{-1}\| \cdot \|f\|_{\mathrm{Spur}(\Gamma)}$$

und

$$\|\Psi_T^\Omega(F)\| \le L(\Gamma) \cdot \sup_{z \in \mathrm{Spur}(\Gamma)} \|(z-T)^{-1}\| \cdot \|F\|_{\mathrm{Spur}(\Gamma)}\,.$$

Zu (a): Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (mit $Z^n(z) := z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$) wegen Folgerung 21.2:

$$\Phi_T^\Omega(Z^n) = \Phi_T^\mathbb{C}(Z^n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_+ U_{\|T\|+1}(0)} z^n (z-T)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_+ U_{\|T\|+1}(0)} \sum_{k=0}^\infty z^{n-k-1}T^k\,dz\,,$$

wobei die Reihe unter dem Integral auf der Kreislinie $\partial U_{\|T\|+1}(0)$ gleichmäßig konvergiert. Wir können daher Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$\Phi_T^\Omega(Z^n) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_+ U_{\|T\|+1}(0)} z^{n-k-1}T^k\,dz = T^n.$$

Wegen der Linearität von Φ_T^Ω folgt (a).

Zu (b): Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt mit $\sigma(T,E) \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$, sei Γ_1 ein in U und damit auch in Ω verlaufendes das Spektrum von T umlaufendes Kurvensystem und sei Γ_2 ein die kompakte Menge $\overline{U}$ und damit auch $\sigma(T,E)$ umlaufendes und in Ω verlaufendes

Kurvensystem. Nach Definition von Φ_T^Ω und Ψ_T^Ω gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $F \in \mathcal{O}(\Omega, E)$ unter Verwendung der ersten Resolventengleichung:

$$\begin{aligned}
\Phi_T^\Omega(f)\Psi_T^\Omega(F) =& \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2} f(z)(z-T)^{-1}\,dz \int_{\Gamma_1}(w-T)^{-1}F(w)\,dw \\
=& \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1}(z-T)^{-1}(w-T)^{-1}f(z)F(w)\,dw\,dz \\
=& \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1}\Big((z-T)^{-1}\frac{f(z)}{w-z}F(z) - \frac{f(z)}{w-z}(w-T)^{-1}F(w)\Big)\,dw\,dz \\
=& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(z-T)^{-1}f(z)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{w-z}F(w)\,dw\Big)\,dz \\
& - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\Big(\int_{\Gamma_2}\frac{f(z)}{w-z}\,dz\Big)(w-T)^{-1}F(w)\,dw\,,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Term die Reihenfolge der Integration vertauscht haben. Nach dem Cauchyschen Integralsatz verschwindet das innere Integral dieses Ausdrucks. Für das innere Integral des ersten Terms nach dem letzten Gleichheitszeichen erhält man nach der Causchyschen Integralformel den Wert $F(z)$. Es folgt also

$$\Phi_T^\Omega(f)\Psi_T^\Omega(F) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(z-T)^{-1}f(z)F(z)\,dz - 0 = \Psi_T^\Omega(fF)$$

und damit die Behauptung in (b).

Zu (c): Dies folgt unmittelbar wegen

$$\Psi_T^\Omega(f\otimes x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-T)^{-1}f(z)x\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-T)^{-1}f(z)\,dz\,x = \Phi_T^\Omega(f)x\,.$$

Zu (d): Für alle $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ und alle $x \in E$ gilt nach (b) und (c):

$$\Phi_T^\Omega(fg)x = \Psi_T^\Omega((fg)\otimes x) = \Psi_T^\Omega(f(g\otimes x)) = \Phi_T^\Omega(f)\Psi_T^\Omega(g\otimes x) = \Phi_T^\Omega(f)\Phi_T^\Omega(g)x\,.$$

Zu (e): Sei Γ ein $\sigma(T,E)\cup\sigma(S,E_1)$ umlaufendes und in Ω verlaufendes Kurvensystem. Für alle $z \in \operatorname{Spur}(\Gamma)$ folgt $A(z-T) = (z-S)A$ und daher

$$\begin{aligned}
A\Phi_T^\Omega(f) =& A\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-T)^{-1}\,dz\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)A(z-T)^{-1}\,dz \\
=& \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-T)^{-1}A\,dz = \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-T)^{-1}\,dz\Big)A = \Phi_T^\Omega(f)A.
\end{aligned}$$

Die Aussage für Ψ_T^Ω zeigt man analog. $\square$

21.4. Satz. *Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\sigma(T,E) \subset \Omega$. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega, E) \xrightarrow{\alpha_T} \mathcal{O}(\Omega, E) \xrightarrow{\Psi_T^\Omega} E \longrightarrow 0$$

exakt. Hierbei sei $\alpha_T : \mathcal{O}(\Omega, E) \to \mathcal{O}(\Omega, E)$ wieder definiert durch $(\alpha_T(F)) := (z-T)F(z)$ für alle $F \in \mathcal{O}(\Omega, E)$.

Beweis. Nach Lemma 20.16 (a) ist α_T injektiv mit abgeschlossenem Bild und wegen

$$\Psi_T^\Omega(1\otimes x) = \Phi_T^\Omega(1)x = x \quad \text{für alle} \quad x \in E$$

ist Ψ_T^Ω surjektiv. Ferner gilt für alle $F \in \mathcal{O}(\Omega, E)$ nach dem Integralsatz von Cauchy:

$$\Psi_T^\Omega(\alpha_T F) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-T)^{-1}\left((z-T)F(z)\right)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(z)\,dz = 0\,,$$

da Γ in Ω nullhomolog ist. Dies zeigt $\operatorname{ran}\alpha_T \subseteq \ker \Psi_T^\Omega$.

Für den Beweis der Exaktheit in der Mitte ist also nur noch $\ker \Psi_T^\Omega \subseteq \operatorname{ran} \alpha_T$ zu zeigen. Sei also $F \in \ker \Psi_T^\Omega$ beliebig, d.h. mit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z-T)^{-1} F(z)\, dz = 0$$

für ein $\sigma(T, E)$ umlaufendes und in Ω verlaufendes Kurvensystem Γ. Sei nun $w \in \Omega$ beliebig. Wegen $F \in \ker \Psi_T^\Omega$ gilt

$$\begin{aligned} F(w) =& \Psi_T^\Omega(1 \otimes F(w)) = \Psi_T^\Omega(1 \otimes F(w) - F) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z-T)^{-1} \left(F(w) - F(z)\right) dz \\ =& \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z-T)^{-1} (w-z) G(w,z)\, dz \end{aligned}$$

mit

$$G(w,z) := \begin{cases} \frac{1}{w-z}\left(F(w) - F(z)\right) & \text{für } z \neq w,\ w, z \in \Omega \\ F'(w) & \text{für } z = w \in \Omega\,. \end{cases}$$

Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist $G(w, \cdot)$ in w holomorph ergänzbar, d.h. $G(w, \cdot)$ ist eine Funktion aus $\mathcal{O}(\Omega, E)$, und mit Satz 21.3 folgt für alle $w \in \Omega$:

$$F(w) = (w-T)\Psi_T^\Omega(G(w, \cdot))\,.$$

Zu zeigen ist noch die Holomorphie der Funktion $H : w \mapsto H(w) := \Psi_T^\Omega(G(w, \cdot))$. Sei hierzu Γ_1 ein beliebiges in Ω nullhomologes System von stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Kurven in Ω. Dann gilt mit (wegen der Stetigkeit des Integranden auf $\operatorname{Spur}\Gamma_1 \times \operatorname{Spur}\Gamma$ erlaubter) Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\Gamma_1} H(w)\, dw = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z-T)^{-1} G(w,z)\, dz\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z-T)^{-1} \int_{\Gamma_1} G(w,z)\, dw\, dz = 0,$$

denn für alle $z \in \operatorname{Spur}\Gamma$ ist die Funktion $G(\cdot, z)$ ebenfalls auf Ω holomorph. $\square$

Als Folgerung erhalten wir:

21.5. Satz. *In der Situation von Satz 21.4 gibt es einen topologischen Isomorphismus*

$$\kappa : E \longrightarrow \tilde{E} := \mathcal{O}(\Omega, E)/\operatorname{ran} \alpha_T\,,$$

so daß für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt:

$$\kappa \Phi_T^\Omega(f) = \tilde{M}_f \kappa\,.$$

Hierbei bezeichne $\tilde{M}_f$ den von dem Operator $M_f \in \mathcal{L}(\mathcal{O}(\Omega, E))$ der Multiplikation mit f auf $\tilde{E}$ induzierten Operator. Insbesondere gilt auch

$$\kappa T = \tilde{M}_{\mathrm{id}} \kappa\,.$$

Bezeichnet man für alle mit T kommutierenden Operatoren $A \in \mathcal{L}(E)$ mit $\tilde{A}$ den von A auf $\tilde{E}$ induzierten Operator

$$F + \operatorname{ran} \alpha_T \mapsto AF + \operatorname{ran} \alpha_T\,,$$

so gilt auch $\kappa A = \tilde{A} \kappa$.

Jeder stetige lineare Operator T auf einem Banachraum E ist also ähnlich zu dem von dem Operator der Multiplikation mit id auf einem Quotienten von $\mathcal{O}(\Omega, E)$ nach einem abgeschlossenen Unterraum induzierten Operator. Man nennt daher auch den Operator $\tilde{M}_{\mathrm{id}}$ des Satzes ein *funktionales Modell* für T.

Beweis. Nach Satz 21.4 ist $\tilde{E}$ topologisch isomorph zu E und $\kappa^{-1} : \tilde{E} \to E$ ist gegeben durch

$$\kappa^{-1}(F + \operatorname{ran}\alpha_T) = \Psi_T^\Omega(F) \qquad (F + \operatorname{ran}\alpha_T \in \tilde{E}).$$

Es folgt mit Satz 21.3 für alle $F + \operatorname{ran}\alpha_T \in \tilde{E}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\kappa^{-1}\tilde{M}_f(F + \operatorname{ran}\alpha_T) =& \kappa^{-1}(fF + \operatorname{ran}\alpha_T) = \Psi_T(fF) = \Phi_T^\Omega(f)\Psi_T^\Omega(F)\\ =& \Phi_T^\Omega(f)\kappa^{-1}(F + \operatorname{ran}\alpha_T)\end{aligned}$$

und für alle $A \in (T)'$:

$$\kappa^{-1}\tilde{A}(F + \operatorname{ran}\alpha_T) = \kappa^{-1}(AF + \operatorname{ran}\alpha_T) = \Psi_T(AF) = A\Psi_T(F) = A\kappa^{-1}(F + \operatorname{ran}\alpha_T)\,.$$

Dies zeigt die angegebenen Vertauschungsrelationen. □

Wir ändern die Konstruktion des funktionalen Modells noch etwas ab, um ganz in der Kategorie der Banachräume zu bleiben.

21.6. Satz. *Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt mit $\sigma(T, E) \subset \Omega$. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow A^2(\Omega, E) \xrightarrow{\alpha_T} A^2(\Omega, E) \xrightarrow{\Psi_T^\Omega} E \longrightarrow 0$$

exakt. Für alle auf Ω beschränkten holomorphen Funktionen f und alle $A \in (T)'$ gilt

$$\kappa\Phi_T^\Omega(f) = \tilde{M}_f\kappa\,, \qquad \kappa T = \tilde{M}_{\mathrm{id}}\kappa\,, \qquad \kappa A = \tilde{A}\kappa\,,$$

wobei die mit ˜ versehenen Operatoren wieder die kanonisch auf $A^2(\Omega, E)/\alpha_T(A^2(\Omega, E))$ induzierten Operatoren seien. Hierbei ist der topologische Isomorphismus

$$\kappa : E \to A^2(\Omega, E)/\alpha_T(A^2(\Omega, E))$$

gegeben durch

$$\kappa^{-1}\left(F + \alpha_T(A^2(\Omega, E))\right) := \Psi_T^\Omega(F)\,, \qquad \left(F + \alpha_T(A^2(\Omega, E)) \in A^2(\Omega, E)/\alpha_T(A^2(\Omega, E))\right).$$

Beweis. Nach Lemma 20.16 (b) ist $\alpha_T : A^2(\Omega, E) \to A^2(\Omega, E)$ injektiv und $\Psi_T^\Omega : A^2(\Omega, E) \to E$ ist wegen $1 \otimes x \in A^2(\Omega, E)$ und $\Psi_T(1 \otimes x) = x$ für alle $x \in E$ surjektiv. Nach dem Beweis zu Satz 21.4 ist $\alpha_T(A^2(\Omega, E)) \subseteq \ker \Psi_T^\Omega | A^2(\Omega, E)$ und $\ker(\Psi_T^\Omega | A^2(\Omega, E)) \subseteq \alpha_T(\mathcal{O}(\Omega, E)) \cap A^2(\Omega, E)$. Um die Exaktheit in der Mitte zu beweisen, genügt es daher $\alpha_T(A^2(\Omega, E)) \supseteq \alpha_T(\mathcal{O}(\Omega, E)) \cap A^2(\Omega, E)$ zu zeigen. Sei also $F \in \mathcal{O}(\Omega, E)$ mit $\alpha_T F \in A^2(\Omega, E)$ beliebig. Wir fixieren hierzu eine beliebige offene Umgebung U von $\sigma(T, A)$ mit $\overline{U} \subset \Omega$. Dann ist F auf $\overline{U}$ stetig und beschränkt und die Resolventenfunktion ist auf der kompakten Teilmenge $\overline{\Omega} \setminus U$ ebenfalls aus Stetigkeitsgründen beschränkt. Es folgt mit $W := \Omega \setminus U$

$$\begin{aligned}\|F\|_2 \leq& \Big(\int_W \|F(z)\|^2 d\lambda(z)\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_U \|F(z)\|^2 d\lambda(z)\Big)^{\frac{1}{2}}\\ \leq& \Big(\int_W \|(z-T)^{-1}\|^2 \cdot \|(z-T)F(z)\|^2 d\lambda(z)\Big)^{\frac{1}{2}} + \lambda(U)^{\frac{1}{2}} \sup_{z \in \overline{U}} \|F(z)\|\\ \leq& \sup_{z \in W} \|(z-T)^{-1}\| \cdot \|\alpha_T F\|_2 + \lambda(U)^{\frac{1}{2}} \sup_{z \in \overline{U}} \|F(z)\| < \infty\end{aligned}$$

und somit $f \in A^2(\Omega, E)$.

Die übrigen Behauptungen zeigt man wie im Beweis zu Satz 21.4. □

21.7. Satz (Spektraler Abbildungssatz). *In der Situation von Satz 21.3 gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:* $\quad \sigma(\Phi_T^\Omega(f)) = f(\sigma(T, E))$.

Beweis. "$\subseteq$": Ist $\mu \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(T, E))$, so ist die Funktion $z \mapsto (\mu - f(z))^{-1}$ auf der offenen Umgebung $\Omega_1 = \Omega \setminus f^{-1}(\{\mu\})$ von $\sigma(T, E)$ holomorph. Mit Folgerung 21.2 und Satz 21.3 folgt

$$\Phi_T^{\Omega_1}\Big(\frac{1}{\mu - f}\Big)(\mu - \Phi_T^{\Omega}(f)) = (\mu - \Phi_T^{\Omega}(f))\Phi_T^{\Omega_1}\Big(\frac{1}{\mu - f}\Big) = (\mu - \Phi_T^{\Omega_1}(f))\Phi_T^{\Omega_1}\Big(\frac{1}{\mu - f}\Big)$$
$$= \Phi_T^{\Omega_1}\Big(\frac{\mu - f}{\mu - f}\Big) = \Phi_T^{\Omega_1}(1) = 1$$

und somit $\mu \in \rho(\Phi_T^{\Omega}(f), E)$.

"$\supseteq$": Sei nun $\lambda \in \sigma(T, E)$ beliebig. Dann ist die durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z} & \text{für } z \in \Omega \setminus \{\lambda\} \\ f'(\lambda) & \text{für } z = \lambda \end{cases}$$

definierte Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ auf Ω holomorph und es folgt

$$\Phi_T^{\Omega}(g)(\lambda - T) = (\lambda - T)\Phi_T^{\Omega}(g) = \Phi_T^{\Omega}((\lambda - \mathrm{id}_\Omega)g) = \Phi_T^{\Omega}(f(\lambda) - f) = f(\lambda) - \Phi_T^{\Omega}(f).$$

Da $\lambda - T$ nicht invertierbar ist, kann auch $f(\lambda) - \Phi_T^{\Omega}(f)$ nicht invertierbar sein, d.h. es gilt $\lambda \in \sigma(\Phi_T^{\Omega}(f), E)$. □

Aufgrund der bisher hergeleiteten Eigenschaften des analytischen Funktionalkalküls Φ_T^{Ω} und Ψ_T^{Ω} schreiben wir im folgenden für $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ bzw. $F \in \mathcal{O}(\Omega, E)$ auch $f(T)$ bzw. $F(T)$ statt $\Phi_T^{\Omega}(f)$ bzw. $\Psi_T^{\Omega}(F)$. Die Aussage des spektralen Abbildungssatzes lautet in dieser Schreibweise: $\sigma(f(T), E) = f(\sigma(T, E))$.

Ist T ein stetiger linearer Operator auf einem unendlich dimensionalen komplexen Banachraum $(E, \|\cdot\|)$, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Lat}\, T$ die Menge aller unter T invarianten abgeschlossenen Unterräume von E. Insbesondere sind also der Nullraum $\{0\}$ und der gesamte Raum E Elemente von $\mathrm{Lat}\, T$. Wir nennen diese die trivialen unter T invarianten Unterräume. Nicht für alle Operatoren gibt es weitere nicht triviale invariante Unterräume. Beispiele von stetigen linearen Operatoren auf gewissen nicht reflexiven Banachräumen wurden von Enflo, Beauzamy und Read angegeben. Für reflexive Banachräume und insbesondere für Hilberträume ist das Problem offen. In diesem Zusammenhang ist der nachfolgende Satz 21.8 von Interesse.

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sei ein komplexer Hilbertraum. Mit M_{id} bezeichnen wir den Operator der Multiplikation mit der Variablen z im Hilbertraum $A^2(\mathbb{D}, \mathcal{H})$, d.h. es ist $(M_{\mathrm{id}} f)(z) = z f(z)$ für alle $f \in A^2(\mathbb{D}, \mathcal{H})$.

21.8. Satz. *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler, unendlich dimensionaler Hilbertraum. Genau dann hat jeder Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nicht triviale invariante Unterräume, wenn für alle $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Lat}\, M_{\mathrm{id}}$ mit $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ und $\dim \mathcal{N}/\mathcal{M} = \infty$ ein invarianter Unterraum $\mathcal{K} \in \mathrm{Lat}\, M_{\mathrm{id}}$ existiert mit $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{N}$.*

Beweis. Wir beachten, daß der von M_{id} auf $\mathcal{N}/\mathcal{M}$ induzierte stetige lineare Operator $\tilde{M}_{\mathrm{id}}$, $F + \mathcal{M} \mapsto M_{\mathrm{id}} F + \mathcal{M}$ ähnlich ist zu dem durch $T_{\mathrm{id}} F := P_{\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}} M_{\mathrm{id}} F$ für alle $F \in \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}$ definierten Operator $T_{\mathrm{id}} \in \mathcal{L}(\mathcal{N} \ominus \mathcal{M})$. Hat also jeder stetige lineare Operator auf einem separablen Hilbertraum einen nicht trivialen, abgeschlossenen, invarianten Unterraum, so hat insbesondere T_{id} und damit auch $\tilde{M}_{\mathrm{id}}$ einen solchen. Es gibt somit einen invarianten Unterraum $\tilde{\mathcal{K}} \in \mathrm{Lat}(\tilde{M}_{\mathrm{id}})$ mit $\{0\} \subsetneq \tilde{\mathcal{K}} \subsetneq \mathcal{N}/\mathcal{M}$. Bezeichnet $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}/\mathcal{M}$ den kanonischen Epimorphismus, so ist $\mathcal{K} := \pi^{-1}\left(\tilde{\mathcal{K}}\right) \in \mathrm{Lat}\, M_{\mathrm{id}}$ mit $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{N}$.

Gibt es umgekehrt für alle $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Lat}\, M_{\mathrm{id}}$ mit $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ und $\dim \mathcal{N}/\mathcal{M} = \infty$ einen invarianten Unterraum $\mathcal{K} \in \mathrm{Lat}\, M_{\mathrm{id}}$ mit $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{N}$ und ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ beliebig, so haben T und $T_0 := \frac{1}{1+\|T\|}T$ die gleichen invarianten Unterräume. Wegen

$$\sigma(T_0, \mathcal{H}) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq \|T_0\|\} \subset \mathbb{D}$$

ist T_0 nach Satz 21.6 ähnlich zu $\tilde{M}_{\mathrm{id}} \in \mathcal{L}\left(A^2(\mathbb{D}, \mathcal{H})/\alpha_{T_0}\left(A^2(\mathbb{D}, \mathcal{H})\right)\right)$ vermöge eines topologischen Isomorphismus $\kappa : \mathcal{H} \to A^2(\mathbb{D}, \mathcal{H})/\alpha_{T_0}(A^2(\mathbb{D}, \mathcal{H}))$. Nach Voraussetzung gibt es einen Unterraum $\tilde{K} \in \mathrm{Lat}(\tilde{M}_{\mathrm{id}})$ mit $\alpha_{T_0}(A^2(\mathbb{D}, \mathcal{H})) \subsetneq \tilde{K} \subsetneq A^2(\mathbb{D}, \mathcal{H})$. Dann ist $\mathcal{K} := \kappa({}^{-1}\tilde{\mathcal{K}}) \in \mathrm{Lat}\, T_0 = \mathrm{Lat}\, T$ ein nicht trivialer, abgeschlossener, invarianter Unterraum für T. $\square$

Analog zum analytischen Funktionalkalkül für stetige lineare Operatoren kann man auch einen analytischen Funktionalkalkül in Banachalgebren konstruieren:

21.9. Satz (Analytischer Funktionalkalkül in Banachalgebren). *Sei $\mathcal{R}$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1 *und sei $x \in \mathcal{R}$. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \subset \Omega$, so definieren wir den analytischen Funktionalkalkül $\Phi_x^\Omega : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{R}$ durch*

$$\Phi_x^\Omega(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z-x)^{-1}\, dz\,, \qquad (f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

Hierbei sei Γ ein $\sigma_{\mathcal{R}}(x)$ umlaufendes und in Ω verlaufendes Kurvensystem. Der so definierte analytische Funktionalkalkül besitzt die folgenden Eigenschaften:

(a) *Φ_x^Ω ist ein stetiger, unitaler Algebrenhomomorphismus. Für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ist der Wert $\Phi_x^\Omega(f)$ unabhängig von der speziellen Wahl von Γ. Sind Ω_1 und Ω_2 offene Umgebungen von $\sigma_{\mathcal{R}}(x)$ und sind $f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, zwei Funktionen, die auf einer Umgebung von $\sigma_{\mathcal{R}}(x)$ übereinstimmen, so gilt $\Phi_x^{\Omega_1}(f_1) = \Phi_x^{\Omega_2}(f_2)$. Der Wert des Funktionalkalküls in einer auf einer Umgebung von $\sigma_{\mathcal{R}}(x)$ holomorphen Funktion f hängt also nur vom Keim von f auf dem Spektrum von x ab.*

(b) *Für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[Z]$ gilt*

$$\Phi_x^\Omega(p) = p(x)\,.$$

(c) *Ist $\Theta : \mathcal{R} \to \mathcal{R}_1$ ein stetiger, unitaler Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{R}$ in eine komplexe Banachalgebra $\mathcal{R}_1$ mit Einselement, so gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:*

$$\Theta\left(\Phi_x^\Omega(f)\right) = \Phi_{\Theta(x)}^\Omega(f)\,.$$

(d) *Es gilt der spektrale Abbildungssatz*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) : \qquad \sigma_{\mathcal{R}}\left(\Phi_x^\Omega(f)\right) = f\left(\sigma_{\mathcal{R}}(x)\right).$$

Den Beweis dieser Aussagen führt man analog wie für stetige lineare Operatoren auf Banachräumen. Vieles kann man auch direkt auf die Operatorensituation zurückführen, wenn man die folgende Identität beachtet:

$$\Phi_x^\Omega(f) = \Phi_{L(x)}^\Omega(f)1 = \Psi_{L(x)}^\Omega(f \otimes 1)\,.$$

Hierbei sei $L(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ der Operator der Multiplikation von links mit $x \in \mathcal{R}$. Die Aussage (c) rechnet man einfach nach.

Übungsaufgaben zu Kapitel 21.

21.1. Aufgabe. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion mit absolutkonvergenter Fourierreihenentwicklung, d.h.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ und } \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Zeigen Sie: Ist h eine auf einer offenen Obermenge von $f([0, 2\pi])$ holomorphe Funktion, so hat auch die Funktion $h \circ f$ eine absolutkonvergente Fourierreihenentwicklung.

21.2. Aufgabe. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume und seien $T \in \mathcal{L}(E)$, $S \in \mathcal{L}(F)$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ stetige, lineare Operatoren mit $AT = SA$ und $\sigma(T, E) \cap \sigma(S, F) = \emptyset$. Zeigen Sie, daß dann schon $A = 0$ gelten muß.

21.3. Aufgabe. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$, dessen Spektrum von der Gestalt $\sigma(T, E) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ ist mit abgeschlossenen, nicht leeren zueinander disjunkten Mengen $\sigma_1, \sigma_2 \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß es dann einen Operator P in der Bikommutantenalgebra von T gibt mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $P \neq 0$, $1 - P \neq 0$.
(b) $P = P^2$.
(c) $\sigma(T|_{P(E)}, P(E)) = \sigma_1$ und $\sigma(T|_{\ker P}, \ker P) = \sigma_2$.

21.4. Aufgabe. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$

(a) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T, E)$ gilt

$$(z - T)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - w} (w - T)^{-1}\, dw\,,$$

wobei Γ ein $\sigma(T, E)$ umlaufendes und in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ verlaufendes Kurvensystem sei.

(b) Ist f eine in einer Umgebung Ω von $\sigma(T, E)$ holomorphe Funktion, so gilt die folgende *verallgemeinerte Cauchysche Integralformel*:

$$\Phi_T^\Omega(f^{(n)}) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z - T)^{-n-1} dz\,.$$

Hierbei sei Γ ein $\sigma(T, E)$ umlaufendes und in Ω verlaufendes Kurvensystem.

21.5. Aufgabe. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ und sei $Q \in \mathcal{L}(E)$ ein mit T kommutierender, quasinilpotenter Operator. Zeigen Sie:

(a) $\sigma(T, E) = \sigma(T + Q, E)$ und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T, E)$ gilt

$$(z - T - Q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - T)^{n+1} Q^n$$

(b) Für alle in einer offenen Umgebung Ω von $\sigma(T, E)$ holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt:

$$f(T + Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(T) Q^n.$$

21.6. Aufgabe. Sei $\mathcal{R}$ eine Banachalgebra. Für $x \in \mathcal{R}$ sei $r(x)$ der Spektralradius von x in $\mathcal{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\forall x \in \mathcal{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $\qquad \|x^{2^{n+1}}\|^{2^{-n-1}} \leq \|x^{2^n}\|^{2^{-n}}$.
(b) Für alle auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen, $\mathcal{R}$-wertigen Funktionen f sind die Funktionen $z \mapsto \log r(f(z))$ und $z \mapsto r(f(z))$ auf Ω subharmonisch.

Hinweis zu (b): Verwenden Sie Teil (a) und Aufgabe 3, Blatt 7 der Übungen zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher sowie Aufgabe 1, Blatt 13 der Übungen zur Funktionentheorie 2 des vergangenen Wintersemesters.

21.7. Aufgabe. Sei $\mathcal{R}$ eine komplexe Banchalgebra mit Einselement und $a \in \mathcal{R}$. Sei G die bekanntlich offene Menge aller invertierbaren Elemente von $\mathcal{R}$. Die Zusammenhangskomponenete G_0 von G, die das Einselement enthält, heißt die *Hauptkomponente* von G.

(a) $\exp(a) \in G_0$.
(b) Liegt 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\rho_{\mathcal{R}}(a)$, so existiert ein $b \in \mathcal{R}$ mit $\exp(b) = a$. Insbesondere liegt a in G_0.

KAPITEL 22

Der Spektralsatz für normale Operatoren

In diesem Kapitel sei stets $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, versehen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator, so gibt es nach Satz 15.13 einen isometrischen $*$-Monomorphismus

$$\Phi : C(\sigma(T,\mathcal{H})) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

mit $\Phi(p) = p(T)$ für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[Z]$, für den auch der spektrale Abbildungssatz gilt. In diesem Kapitel wollen wir diesen Funktionalkalkül für stetige Funktionen auf die größere Algebra $B(\sigma(T,\mathcal{H}),\mathcal{B})$ fortsetzen und eine Integraldarstellung für T herleiten.

22.1. Definition. Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen in Ω. Eine Mengenfunktion

$$E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

heißt (selbstadjungiertes) *Spektralmaß*, falls die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(a) $E(\Omega) = 1$.
(b) $\forall \delta,\eta \in \mathcal{B}: \qquad E(\delta)E(\eta) = E(\delta\cap\eta)$.
(c) $\forall \delta \in \mathcal{B}: \qquad E(\Omega\setminus\delta) = 1 - E(\delta)$.
(d) $\forall \delta \in \mathcal{B}: \qquad E(\delta) = E(\delta)^*$.

Ein Spektralmaß $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *σ-additiv in der starken* bzw. *schwachen Operatortopologie*, falls für alle $x, y \in \mathcal{H}$ die $\mathcal{H}$-wertige Mengenfunktion $\delta \mapsto E(\delta)x$ bzw. die komplexwertige Mengenfunktion $\delta \mapsto \langle E(\delta)x, y\rangle$ σ-additiv ist.

Wegen (b) und (d) sind die Werte eines Spektralmaßes paarweise kommutierende orthogonale Projektionen. Insbesondere ist die Mengenfunktion E normbeschränkt und

$$\sup_{\delta\in\mathcal{B}} \|E(\delta)\| = 1.$$

Natürlich kann man solche Spektralmaße auch auf anderen Mengenalgebren einführen. Die Theorie der Spektralmaße ist ausführlich in [**10**] behandelt.

22.2. Bemerkungen. Sei $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Spektralmaß. Dann gilt:

(a) $\forall \delta,\eta \in \mathcal{B}: \qquad E(\delta\cup\eta) = E(\delta) + E(\eta) - E(\delta)E(\eta)$.
(b) $E(\emptyset) = E(\Omega\setminus\Omega) = 0$.

Beweis. (a) Wegen (c) und (b) in Definition 22.1 gilt für alle $\delta,\eta \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} E(\delta\cup\eta) &= 1 - E(\Omega\setminus(\delta\cup\eta)) = 1 - E((\Omega\setminus\delta)\cap(\Omega\setminus\eta)) = 1 - E(\Omega\setminus\delta)E(\Omega\setminus\eta) \\ &= 1 - (1-E(\delta))(1-E(\eta)) = E(\delta) + E(\eta) - E(\delta)E(\eta)\,. \end{aligned}$$

(b) folgt unmittelbar aus (a) und (c) in Definition 22.1. □

Ist $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Spektralmaß wie in Definition 22.1, so können wir für Treppenfunktionen $f = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{\delta_j} \in \mathcal{T}(\Omega,\mathcal{B})$ ein Integral definieren:

$$\int_\Omega f\,dE := \int_\Omega f(t)\,dE(t) := \sum_{j=1}^n a_jE(\delta_j)\,.$$

Nach Lemma 19.22 und Folgerung 19.23 ist $\int_\Omega \cdot\, dE : \mathcal{T}(\Omega,\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine wohldefinierte stetige lineare Abbildung mit

$$\Big\| \int_\Omega f\, dE \Big\| \le 4\|f\|_\Omega = 4 \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$$

für alle $f \in \mathcal{T}(\Omega,\mathcal{B})$, die stetig auf $B(\Omega,\mathcal{B})$ fortgesetzt werden kann. Es stellt sich heraus, daß diese Fortsetzung sogar ein unitaler $*$-Homomorphismus von der C^*-Algebra $B(\Omega,\mathcal{B})$ in die C^*-Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist:

22.3. Lemma. *Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum und $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Spektralmaß auf Ω. Dann ist $\int_\Omega \cdot\, dE : B(\Omega,\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein unitaler $*$-Homomorphismus von der C^*-Algebra $B(\Omega,\mathcal{B})$ in die C^*-Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Insbesondere gilt*

$$\forall f \in B(\Omega,\mathcal{B}) : \qquad \Big\| \int_\Omega f\, dE \Big\| \le \|f\|_\Omega\,.$$

Insbesondere können wir also alle auf Ω stetigen und beschränkten Funktionen integrieren.

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{T}(\Omega,\mathcal{B})$ beliebig. Dann haben f und g Darstellungen der Form

$$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{\delta_j} \qquad g = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{\eta_k}$$

wobei $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathcal{B}$ bzw. $\eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathcal{B}$ paarweise disjunkt sind. Es folgt

$$fg = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k \chi_{\delta_j \cap \eta_k}$$

und daher

$$\int_\Omega fg\, dE = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k E(\delta_j \cap \eta_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k E(\delta_j) E(\eta_k) = \Big(\int_\Omega f\, dE \Big)\Big(\int_\Omega g\, dE \Big)$$

sowie

$$\Big(\int_\Omega f\, dE \Big)^* = \Big(\sum_{j=1}^n a_j E(\delta_j) \Big)^* = \sum_{j=1}^n \overline{a_j} E(\delta_j) = \int_\Omega \overline{f}\, dE.$$

Wegen der Stetigkeit des Integrals und der Adjungiertenbildung folgt auch für alle f, g aus der Abschließung $B(\Omega,\mathcal{B})$ von $\mathcal{T}(\Omega,\mathcal{B})$:

$$\int_\Omega fg\, dE = \Big(\int_\Omega f\, dE \Big)\Big(\int_\Omega g\, dE \Big) \quad \text{und} \quad \Big(\int_\Omega f\, dE \Big)^* = \int_\Omega \overline{f}\, dE.$$

Da $\int_\Omega \cdot\, dE$ auch linear ist, ist $\int_\Omega \cdot\, dE$ ein $*$-Homomorphismus, der wegen $\int_\Omega 1\, dE = E(\Omega) = 1$ auch unital ist. Der Zusatz folgt nun mit Aufgabe 15.4. $\square$

Bemerkung. Ist $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Spektralmaß auf einem lokalkompakten Hausdorffraum Ω, so ist für alle $x, y \in \mathcal{H}$ durch

$$\delta \mapsto \langle E(\delta)x, y \rangle$$

eine komplexwertige endlich additive und beschränkte Mengenfunktion auf den Borelmengen $\mathcal{B}$ von Ω gegeben. Es gilt dann für alle $x, y \in \mathcal{H}$, $f \in B(\Omega,\mathcal{B})$:

$$\Big\langle \int_\Omega f(t)\, dE(t)x, y \Big\rangle = \int_\Omega f(t)\, d\langle E(t)x, y \rangle$$

Beweis. Für Funktionen aus $\mathcal{T}(\Omega,\mathcal{B})$ rechnet man dies direkt nach. Wegen der Stetigkeit der Integrale und der Dichtheit von $\mathcal{T}(\Omega,\mathcal{B})$ in $B(\Omega,\mathcal{B})$ folgt die Behauptung. $\square$

22.4. Satz. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und $\Phi : C(K) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein unitaler $*$-Homomorphismus. Dann gibt es genau ein in der schwachen Operatortopologie σ-additives Spektralmaß $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf den Borelmengen von K mit $\langle E(\cdot)x, y\rangle \in \mathrm{rca}(K)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und mit*

$$\forall f \in C(K) : \qquad \Phi(f) = \int_K f\, dE . \tag{22.1}$$

Insbesondere läßt sich Φ also nach Lemma 22.3 zu einem stetigen unitalen $*$-Homomorphismus $\Psi : B(K, \mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ fortsetzen. E und Ψ haben weiter die folgenden Eigenschaften:

(a) *E ist auch σ-additiv in der starken Operatortopologie.*
(b) *E und Ψ nehmen ihre Werte in der Bikommutantenalgebra* $(\mathrm{ran}\,\Phi)''$ *von* $\mathrm{ran}\,\Phi$ *an.*
(c) *Für alle $f \in B(K, \mathcal{B})$ und alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:*

$$\Big\| \int_K f(t)\, dE(t)x \Big\|^2 = \int_K |f(t)|^2\, d\langle E(t)x, x\rangle .$$

Beweis. **1.) Eindeutigkeit:** Seien E_1, E_2 zwei Spektralmaße auf K mit (22.1) und mit $\langle E_j(\cdot)x, y\rangle \in \mathrm{rca}(K)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und $j = 1, 2$. Dann gilt für alle $f \in C(K)$, $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\int_K f(t)\, d\langle E_1(t)x, y\rangle &= \Big\langle \int_K f(t)\, dE_1(t)x, y \Big\rangle = \langle \Phi(f)x, y\rangle = \Big\langle \int_K f(t)\, dE_2(t)x, y \Big\rangle \\ &= \int_K f(t)\, d\langle E_2(t)x, y\rangle .\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz 19.30 folgt $\langle E_1(\delta)x, y\rangle = \langle E_2(\delta)x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$, $\delta \in \mathcal{B}$ und hieraus $E_1 = E_2$.

2.) Existenz: (i) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ sind die linearen Funktionale

$$f \mapsto \langle \Phi(f)x, y\rangle$$

stetig auf $C(K)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 19.30 gibt es also für alle $x, y \in \mathcal{H}$ genau ein $\mu_{x,y} \in \mathrm{rca}(K)$ mit $\|\mu_{x,y}\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ und

$$\forall f \in C(K) : \qquad \int_K f\, d\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y\rangle .$$

(ii) In den Übungen wird in etwas allgemeinerem Rahmen gezeigt:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H} : \qquad \mu_{\alpha x + \beta y, z} = \alpha \mu_{x,z} + \beta \mu_{y,z} , \quad \mu_{z, \alpha x + \beta y} = \overline{\alpha} \mu_{z,x} + \overline{\beta} \mu_{z,y} .$$

(iii) Wir zeigen nun:

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad \forall \delta \in \mathcal{B} : \qquad \mu_{x,y}(\delta) = \overline{\mu_{y,x}(\delta)} .$$

Dies folgt aus der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz 19.30 und der Tatsache, daß für alle $f \in C(K)$ und alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\int_K f\, d\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y\rangle = \overline{\langle \Phi(\overline{f})y, x\rangle} = \overline{\int_K \overline{f}\, d\mu_{y,x}} = \int_K f\, d\overline{\mu_{y,x}} .$$

(iv) Sei nun $f \in B(K, \mathcal{B})$ beliebig. Dann ist nach (ii) und (iii) durch

$$B_f(x, y) := \int_K f\, d\mu_{x,y} , \qquad (x, y \in \mathcal{H})$$

eine Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$ gegeben, die wegen

$$|B_f(x,y)| = \Big| \int_K f\, d\mu_{x,y} \Big| \le \|f\|_K \|\mu_{x,y}\| \le \|f\|_K \|x\| \cdot \|y\|$$

beschränkt ist mit $\|B_f\| \le \|f\|_K$. Nach Satz 2.40 gibt es also genau einen linearen Operator $\Psi(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $B_f(x,y) = \langle \Psi(f)x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. In Aufgabe 22.1 wird gezeigt, daß die hierdurch definierte Abbildung $\Psi : B(K,\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ linear ist und auf $C(K)$ mit Φ übereinstimmt. Insbesondere gilt $\Psi(1) = \Phi(1) = 1$.

(v) Wir zeigen nun: Ψ *ist ein unitaler $*$-Homomorphismus.* Für alle $x, \psi \in \mathcal{H}$, $f \in B(K,\mathcal{B})$ gilt nach (iii):

$$\langle \Psi(\overline{f})x, y\rangle = \int_K \overline{f}\, d\mu_{x,y} = \overline{\int_K f\, d\mu_{y,x}} = \overline{\langle \Psi(f)y, x\rangle} = \langle \Psi(f)^* x, y\rangle$$

und somit $\Psi(\overline{f}) = \Psi(f)^*$. Zu zeigen ist noch die Multiplikativität von Ψ. Da Φ muktiplikativ ist, gilt für alle $f, g \in C(K)$:

$$\int_K fg\, d\mu_{x,y} = \langle \Phi(fg)x, y\rangle = \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y\rangle = \int_K f\, d\mu_{\Phi(g)x,y)}\,.$$

Mit $\mu_{x,y}$ ist auch die Mengenfunktion $\delta \mapsto \nu_{g,x,y} := \int_\delta g\, d\mu_{x,y}$ in $\mathrm{rca}(K)$ und es gilt $\int_K h\, d\nu_{g,x,y} = \int_K hg\, d\mu_{x,y}$ für alle $h \in B(K,\mathcal{B})$ (vergl. Aufgabe 22.2). Nach der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz folgt $\nu_{g,x,y} = \mu_{\Phi(g)x,y}$ für alle $g \in C(K)$, $x, y \in \mathcal{H}$. Insbesondere folgt für alle $f \in B(K,\mathcal{B})$, $g \in C(K)$, $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\int_K fg\, d\mu_{x,y} = \int_K f\, d\mu_{\Phi(g)x,y} = \langle \Psi(f)\Phi(g)x, y\rangle = \langle \Phi(g), \Psi(f)^* y\rangle = \int_K g\, d\mu_{x,\Psi(f)^*y}$$

und hieraus (wiederum unter Verwendung von Aufgabe 22.2 und der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz) $\nu_{f,x,y} = \mu_{x,\Psi(f),y}$. Wir erhalten für alle $f, g \in B(K,\mathcal{B})$, $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\langle \Psi(fg)x, y\rangle = \int_K fg\, d\mu_{x,y} = \int_K g\, d\mu_{x,\Psi(f)^*y} = \langle \Psi(g)x, \Psi(f)^* y\rangle = \langle \Psi(f)\Psi(g)x, y\rangle\,.$$

Damit folgt $\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g)$ für alle $f, g \in B(\sigma(T,\mathcal{H}))$.

(vi) Ψ *nimmt seine Werte im Bikommutanten von* $\operatorname{ran}\Phi$ *an.*

Sei also $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ beliebig mit $A\Phi(f) = \Phi(f)A$ für alle $f \in C(K)$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$, $f \in C(K)$:

$$\int_K f\, d\mu_{Ax,y} = \langle \Phi(f)Ax, y\rangle = \langle A\Phi(f)x, y\rangle = \langle \Phi(f)x, A^*y\rangle = \int_K f\, d\mu_{x,A^*y}$$

und somit wegen der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz

$$\forall x, y \in \mathcal{H}: \qquad \mu_{Ax,y} = \mu_{x,A^*y}\,.$$

Es folgt für alle $x, y \in \mathcal{H}$, $f \in B(K,\mathcal{B})$:

$$\langle \Psi(f)Ax, y\rangle = \int_K f\, d\mu_{Ax,y} = \int_K f\, d\mu_{x,A^*y} = \langle \Psi(f)x, A^*y\rangle = \langle A\Psi(f)x, y\rangle$$

und daher $\Psi(f)A = A\Psi(f)$. Also gilt $\Psi(f) \in (\operatorname{ran}\Phi)''$ für alle $f \in B(K,\mathcal{B})$.

(vii) Wir definieren nun:

$$E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), \qquad \delta \mapsto E(\delta) := \Psi(\chi_\delta).$$

Mit (v) und (vi) folgt

$$\forall \delta \in \mathcal{B}: \qquad E(\delta) = E(\delta)^2 = E(\delta)^*.$$

Ferner hat man $E(K) = \Psi(1) = \Phi(1) = 1$. Direkte Rechnung zeigt, daß E ein Spektralmaß ist. Für alle $x, y \in \mathcal{H}$, $\delta \in \mathcal{B}$ gilt

$$\langle E(\delta)x, y\rangle = \langle \Psi(\chi_\delta)x, y\rangle = \int_K \chi_\delta \, d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\delta)\,.$$

Also folgt $\langle E(\cdot)x, y\rangle = \mu_{x,y} \in \mathrm{rca}(K)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Insbesondere ist E σ-additiv in der schwachen Operatortopologie. Damit sind die Existenz des Spektralmaßes und (b) vollständig bewiesen.

Zu (a): Sei $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{B}$. Dann gilt mit $\delta := \bigcup_{n=1}^\infty \delta_n$ für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\Big\| E(\delta)x - \sum_{n=1}^k E(\delta_n)x \Big\|^2 &= \Big\langle \Big(E(\delta) - \sum_{n=1}^k E(\delta_n) \Big)^2 x, x \Big\rangle \\
&= \Big\langle \Big(E(\delta)^2 - 2\sum_{n=1}^k E(\delta)E(\delta_n) + \Big(\sum_{n=1}^k E(\delta_n) \Big)^2 \Big) x, x \Big\rangle \\
&= \Big\langle \Big(E(\delta) - 2\sum_{n=1}^k E(\delta_n) + \sum_{n=1}^k E(\delta_n) \Big) x, x \Big\rangle \\
&= \Big\langle \Big(E(\delta) - \sum_{n=1}^k E(\delta_n) \Big) x, x \Big\rangle \to 0
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$ wegen der σ-Additivität von E in der schwachen Operatortopologie.

Zu (c): Für alle $f \in B(K, \mathcal{B})$ und alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_K f(t)\, dE(t)x \Big\|^2 &= \langle \Psi(f)x, \Psi(f)x\rangle = \langle \Psi(f)^*\Psi(f)x, x\rangle = \langle \Psi(|f|^2)x, x\rangle \\
&= \int_K |f(t)|^2 \, d\langle E(t)x, x\rangle\,.
\end{aligned}$$

Damit ist (c) bewiesen. □

22.5. Satz (Spektralsatz für normale Operatoren). *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator auf einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau ein Spektralmaß*

$$E : \mathcal{B} := \mathcal{B}(\sigma(T, \mathcal{H})) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

auf dem Spektrum von T mit $\langle E(\cdot)x, y\rangle \in \mathrm{rca}(\sigma(T, \mathcal{H}))$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und mit

$$T = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} z \, dE(z). \tag{22.2}$$

Dieses Spektralmaß hat darüberhinaus folgende Eigenschaften:

(a) *E ist σ-additiv in der starken Operatortopologie.*
(b) *E nimmt seine Werte in der Bikommutantenalgebra $(T)''$ von T an.*
(c) *Für jede in der Relativtopologie auf $\sigma(T, \mathcal{H})$ offene, nicht leere Teilmenge ω von $\sigma(T, \mathcal{H})$ ist $E(\omega) \neq 0$.*
(d) *Für alle $\delta \in \mathcal{B}$ ist $E(\delta)\mathcal{H} \in \mathrm{Lat}(T)$ und es gilt $\sigma(T, E(\delta)\mathcal{H}) \subseteq \overline{\delta}$.*
(e) *Die durch*

$$\Psi : B(\sigma(T, \mathcal{H}), \mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})\,, \qquad f \mapsto \Psi(f) := \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\, dE(z),$$

definierte Abbildung ist ein unitaler $*$-Homomorphismus, der den stetigen Funktionalkalkül aus Satz 15.13 fortsetzt und seine Werte in $(T)''$ annimmt.

(f) *Für alle* $f \in C(\sigma(T,\mathcal{H}))$ *gilt*

$$\sigma\Big(\int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\,dE(z),\mathcal{H}\Big) = f(\sigma(T,\mathcal{H})).$$

Beweis. **1.) Eindeutigkeit:** Seien E_1, E_2 zwei Spektralmaße auf K mit $\langle E_j(\cdot)x,y\rangle \in \operatorname{rca}(\sigma(T,\mathcal{H}))$ für alle $x,y \in \mathcal{H}$ und mit

$$T = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} z\,dE_1(z) = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} z\,dE_2(z)\,.$$

Die Abbildungen $f \mapsto \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\,dE_j(z)$ sind nach Lemma 22.3 stetige $*$-Homomorphismen von der C^*-Algebra $B(\sigma(T,\mathcal{H}),\mathcal{B})$ in die C^*-Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Insbesondere folgt

$$T^* = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} \overline{z}\,dE_1(z) = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} \overline{z}\,dE_2(z)$$

und hieraus für alle Polynome p in zwei Variablen

$$p(T,T^*) = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} p(z,\overline{z})\,dE_1(z) = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} p(z,\overline{z})\,dE_2(z)\,.$$

Da nach dem Satz von Stone und Weierstraß die Polynome in z und $\overline{z}$ dicht in $C(\sigma(T,\mathcal{H}))$ liegen, folgt wegen der Stetigkeit von $f \mapsto \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\,dE_j(z)$ für alle $x,y \in \mathcal{H}$ und alle $f \in C(\sigma(T,\mathcal{H}))$:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\langle E_1(z)x,y\rangle &= \Big\langle \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\,dE_1(z)x,y\Big\rangle = \Big\langle \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\,dE_2(z)x,y\Big\rangle \\ &= \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\langle E_2(z)x,y\rangle.\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz folgt also

$$\forall x,y \in \mathcal{H},\quad \forall \delta \in \mathcal{B}:\qquad \langle E_1(\cdot)x,y\rangle = \langle E_2(\cdot)x,y\rangle$$

und hieraus $E_1(\delta) = E_2(\delta)$ für alle $\delta \in \mathcal{B}$.

2.) Existenz: Nach dem Satz 15.13 über den stetigen Funktionalkalkül gibt es einen unitalen, isometrischen $*$-Monomorphismus $\Phi : C(\sigma(T,\mathcal{H})) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\Phi(\mathrm{id}) = T$, der seine Werte im Bikommutanten von T annimmt. Nach Satz 22.4 gibt es dann ein Spektralmaß $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit (a), so daß durch

$$\Psi(f) := \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} f(z)\,dE, \qquad (f \in B(\sigma(T,\mathcal{H}),\mathcal{B}))$$

eine Fortsetzung von Φ auf $B(\sigma(T,\mathcal{H}),\mathcal{B})$ gegeben ist und $\operatorname{ran}\Psi \cup \{E(\delta)\,;\,\delta \in \mathcal{B}\} \subseteq (\operatorname{ran}\Phi)''$ gilt. Insbesondere gilt (22.2).

Sei nun $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein beliebiger mit T kommutierender Operator. Da Φ seine Werte in $(T)''$ annimmt, kommutiert A mit allen $\Phi(f)$, $f \in C(\sigma(T,\mathcal{H}))$. Da Ψ wiederum seine Werte in $(\operatorname{ran}\Phi)''$ annimmt vertauscht A auch mit allen $\Psi(f)$, $f \in B(\sigma(T,\mathcal{H}),\mathcal{B})$ und somit auch allen $E(\delta)$, $\delta \in \mathcal{B}$. Damit sind auch die Aussagen (b) und (e) gezeigt.

Zu (d): Sei $\delta \in \mathcal{B}$ beliebig und $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\delta}$ beliebig. Dann ist durch

$$f(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in \sigma(T,\mathcal{H}) \setminus \delta \\ \frac{1}{\zeta - z} & \text{für } z \in \delta \end{cases}$$

eine Funktion aus $B(\sigma(T,\mathcal{H}),\mathcal{B})$ gegeben. Für alle $x \in E(\delta)\mathcal{H}$ gilt:

$$x = E(\delta)x = \Psi(\chi_\delta)x = \Psi((\zeta - \mathrm{id})f)x = (\zeta - T)\Psi(f)x = \Psi(f)(\zeta - T)x.$$

Also ist $(\zeta - T)|E(\delta)\mathcal{H}$ invertierbar und $((\zeta - T)|E(\delta)\mathcal{H})^{-1} = \Psi(f)|E(\delta)\mathcal{H}$.

Zu (c): Sei nun ω eine in der Relativtopologie auf $\sigma(T,\mathcal{H})$ offene nicht leere Teilmenge von $\sigma(T,\mathcal{H})$. Dann ist $\sigma(T,\mathcal{H})\setminus\omega$ abgeschlossen und nach (d) gilt

$$\sigma(T,E(\delta)\mathcal{H})\subseteq\sigma(T,\mathcal{H})\setminus\omega\neq\sigma(T,\mathcal{H})\,.$$

Also muß $1-E(\omega)=E(\sigma(T,\mathcal{H})\setminus\omega)\neq 1$ und somit $E(\omega)\neq 0$ gelten.

(f) ist klar, da der spektrale Abbildungssatz für den stetigen Funktionalkalkül gilt (nach Satz 15.13). □

Wir bezeichnen mit $\mathbb{H}_+ := \{z\in\mathbb{C}\,;\,\operatorname{Im} z>0\}$ bzw. $\mathbb{H}_- := \{z\in\mathbb{C}\,;\,\operatorname{Im} z<0\}$ die offene obere bzw. offene untere Halbebene in $\mathbb{C}$.

22.6. Folgerung. *Sei $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Dann gilt für alle $0\neq x\in\mathcal{H}$: Die auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ holomorphe Funktion $z\mapsto\langle (T-z)^{-1}x,x\rangle$ bildet $\mathbb{H}_+$ und $\mathbb{H}_-$ jeweils in sich ab.*

Beweis. Als selbstadjungierter Operator ist T normal mit $\sigma(T,\mathcal{H})\subset\mathbb{R}$. Für alle $0\neq x\in\mathcal{H}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ gilt nach dem Spektralsatz 22.5

$$\langle (T-z)^{-1}x,x\rangle=\int_{\sigma(T,\mathcal{H})}\frac{1}{t-z}\,d\langle E(t)x,x\rangle$$

und das skalare Maß $\delta\mapsto\langle E(\delta)x,x\rangle$ ist positiv. Wegen

$$\operatorname{Im}\frac{1}{t-z}=\frac{\operatorname{Im} z}{|t-z|^2}$$

haben also $\operatorname{Im} z$ und $\operatorname{Im}\langle (T-z)^{-1}x,x\rangle$ das gleiche Vorzeichen. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 22.

22.1. Aufgabe. Für einen kompakten Hausdorffraum $K\neq 0$ und einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ betrachten wir eine stetige lineare Abbildung $\Phi:\mathcal{C}(K)\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem Paar $x,y\in\mathcal{H}$ existiert genau ein Maß $\mu_{x,y}\in\operatorname{rca}(K)$ mit

$$\langle\Phi(f)x,y\rangle=\int_K f(t)\,d\mu_{x,y}(t)\qquad\text{für alle } f\in\mathcal{C}(K).$$

(b) Für alle $x,y\in\mathcal{H}$ ist $\|\mu_{x,y}\|\leq\|\Phi\|\|x\|\|y\|$.

(c) Für $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ und $x,y,z\in\mathcal{H}$ gilt:

$$\mu_{\alpha x+\beta y,z}=\alpha\mu_{x,z}+\beta\mu_{y,z}\qquad\text{sowie}\qquad\mu_{z,\alpha x+\beta y}=\overline{\alpha}\mu_{z,x}+\overline{\beta}\mu_{z,y}.$$

(d) Zu jedem $f\in B(K,\mathcal{B})$ existiert genau ein $\Psi(f)\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$\langle\Psi(f)x,y\rangle=\int_K f(t)\,d\mu_{x,y}(t).$$

Die Abbildung $f\mapsto\Psi(f)$ ist eine stetige, lineare und normgleiche Fortsetzung von Φ.

(e) Die Mengenfunktion

$$E:\mathcal{B}\to\mathcal{L}(\mathcal{H}),\quad f\mapsto\Psi(\chi_\delta)$$

ist additiv und beschränkt; sie erfüllt $\langle E(A)x,y\rangle=\mu_{x,y}(A)$ für alle $x,y\in\mathcal{H}$. Ferner gilt $\int_K f\,dE=\Psi(f)$ für alle $f\in B(K,\mathcal{B})$.

22.2. Aufgabe. Sei $\emptyset\neq K$ ein kompakter Hausdorffraum, $\mu\in\operatorname{rca}(K), g\in B(K,\mathcal{B})$. Zeigen Sie:

(a) Die durch
$$\lambda : \mathcal{B} \to \mathbb{K}, \qquad \lambda(\delta) := \int_\delta g\, d\mu \quad \text{für } \delta \in \mathcal{B}$$
definierte Mengenfunktion ist in $\operatorname{rca}(K)$, und es gilt für alle $f \in B(K, \mathcal{B})$
$$\int_K f\, d\lambda = \int_K fg\, d\mu.$$
Wir schreiben für das Maß λ auch g_μ.

(b) Die in (a) definierte Mengenfunktion λ besitzt die totale Variation
$$v(\lambda, \delta) = \int_\delta |g(t)| v(\mu, dt) \qquad (\delta \in \mathcal{B})\,.$$
(Hinweis: Man beweise dies zunächst für Treppenfunktionen.)

22.3. Aufgabe. Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch
$$h(z) := \frac{z - i}{z + i} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$
und sei $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie:

(a) Der Operator $U := h(T)$ ist unitär mit $1 \notin \sigma(U, \mathcal{H})$.

(b) Drücken Sie das Spektralmaß von U durch das von T aus.

(c) Ist umgekehrt $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein unitärer Operator mit $1 \notin \sigma(U, \mathcal{H})$, so gibt es genau einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $h(T) = U$.

22.4. Aufgabe. Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator mit Spektralmaß E. Zeigen Sie:
$$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{Bild}(\lambda - T) = \{0\}.$$
Hinweis: Fixieren Sie ein $x \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{Bild}(\lambda - T)$. Konstruieren Sie induktiv eine Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von abgeschlossenen Quadraten mit $\sigma(T) \subset Q_0$ und für $n \geq 1$
$$\begin{array}{ll} (i) & \operatorname{diam}(Q_{n+1}) = 1/2 \operatorname{diam}(Q_n), \\ (ii) & Q_{n+1} \subset Q_n, \\ (iii) & \|x\|^2 = \|E(Q_0 \cap \sigma(T))x\|^2 \leq 4^n \|E(Q_n \cap \sigma(T))x\|^2. \end{array}$$
Sei λ_0 der eindeutig bestimmte Punkt in $\bigcap_{n=0}^\infty Q_n$. Nach Wahl von x gibt es ein $u \in \mathcal{H}$ mit $(\lambda_0 - T)u = x$. Zeigen Sie sodann
$$\begin{aligned} \|E(Q_n \cap \sigma(T))x\|^2 &= \int_{(\sigma(T) \cap Q_0) \setminus \{\lambda_0\}} |z - \lambda_0|^2 \, d < E(z)u, u > \\ &\leq (\operatorname{diam}(Q_n))^2 < E(Q_n \setminus \{\lambda_0\})u, u > \end{aligned}$$
und folgern Sie, daß $x = 0$ gelten muß

22.5. Aufgabe. Seien T und E wie in Aufgabe 22.4. Zeigen Sie:

(a) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von $\sigma(T)$, so gilt mit $A := \bigcap_{n=1}^\infty A_n$: Es ist $E(A)\mathcal{H} = \bigcap_{n=1}^\infty E(A_n)\mathcal{H}$.

(b) Sei $A \subset \sigma(T)$ abgeschlossen. Dann gilt
$$E(A)\mathcal{H} = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus A} \operatorname{Bild}(\lambda - T) =: \mathcal{E}(A).$$

Hinweis zu b): Zeigen Sie, daß mit $A_n := \{z \in \sigma(T) \mid \operatorname{dist}(z, A) \leq 1/n\}$ für alle $x \in \mathcal{E}(A)$ gilt:

$$(1 - E(A_n))x \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{Bild}(\lambda - T).$$

22.6. Aufgabe. Zeigen Sie:

(a) Ist N ein normaler Operator mit Spektralzerlegung $N = \int z\, dE(z)$, dann ist N genau dann kompakt, wenn $E(\{z \mid |z| > \varepsilon\})$ für alle $\varepsilon > 0$ endlichen Rang hat.
(b) Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und I ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, das einen nichtkompakten Operator enthält. Dann ist $I = \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
(c) Ist $\mathcal{H}$ separabel, dann ist das einzige nichttriviale abgeschlossene, zweiseitige Ideal von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ das Ideal der kompakten Operatoren.

22.7. Aufgabe. Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator. Zeigen Sie:

(a) Ist T invertierbar, so gibt es einen normalen Operator S mit $\exp(S) = T$.
(b) $T^* = UT$ für einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wann ist U hierdurch eindeutig bestimmt?

22.8. Aufgabe. Sei $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ der durch $T(x) := \left(\frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}\right)$ für alle $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definierte selbstadjungierte freie Jacobi-Operator. Berechnen Sie das Spektralmaß von T.

22.9. Aufgabe. Seien $T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$ normale Operatoren mit Spektralmaßen E_j ($j = 1, 2$). Ein Punkt $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *kritischer Eigenwert für* (T_1, T_2), falls λ ein Eigenwert von T_2 ist und die algebraische Dimension von $\mathcal{H}_1/\operatorname{Bild}(\lambda - T_1)$ nicht endlich ist. Zeigen Sie:

(a) Gibt es einen kritischen Eigenwert λ für (T_1, T_2), so gibt es einen unstetigen linearen Operator $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ mit $AT_1 = T_2 A$.
Hinweis: Versuchen Sie es mit
$$Ax := \varphi(x)y \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}_1,$$
wobei $\varphi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ unstetig sei mit $\operatorname{Bild}(\lambda - T_1) \subset \ker \varphi$ und $0 \neq y \in \ker(\lambda - T_2)$ ein fester Eigenvektor zum Eigenwert λ von T_2 sei.
(b) Ist $\operatorname{Bild}(\lambda - T_1)$ von endlicher algebraischer Kodimension in $\mathcal{H}_1$, so ist $\operatorname{Bild}(\lambda - T_1)$ abgeschlossen in $\mathcal{H}_1$.
(c) Hat (T_1, T_2) keine kritischen Eigenwerte, so ist jeder lineare Operator $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ mit $AT_1 = T_2 A$ schon stetig.
Hinweis:
 (i) Zeigen Sie zunächst: $A \operatorname{Bild} E_1(F \cap \sigma(T_1)) \subset \operatorname{Bild} E_2(F \cap \sigma(T_2))$.
 (ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ heiße *Unstetigkeitspunkt für* A, falls für jede Umgebung U von λ eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset U \cap \sigma(T_1)$ existiert, so daß $A|\operatorname{Bild} E_1(F)$ unstetig ist. Zeigen Sie wie folgt, daß die Menge $\Lambda(A)$ aller Unstetigkeitspunkte für A endlich ist: Ist $\Lambda(A)$ nicht endlich, so konstruiere man induktiv eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Mengen $F_n \subset \sigma(T_1)$ und Vektoren $x_n \in \operatorname{Bild} E_1(F_n)$ mit $\|x_n\| \leq 2^{-n}$ und $\|Ax_n\| \geq n$ sowie $F_n \cap \overline{\bigcup_{k=1,k\neq n}^{\infty} F_k} = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was folgt dann für Ax mit $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$?
 (iii) Zeigen Sie nun, daß für den separierenden Raum
$$\mathfrak{S}(A) := \{y \in \mathcal{H}_2 \mid \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1 \text{ mit } x_n \to 0 \text{ und } Ax_n \to y \text{ bei } n \to \infty\}$$
gilt: $\mathfrak{S}(A) \subset \operatorname{Bild} E_2(\Lambda(A))$ und schließlich sogar $\mathfrak{S}(A) = \{0\}$.

22.10. Aufgabe. Zeigen Sie

(a) Es gibt eine Borel-meßbare Funktion $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $\exp(if(z)) \equiv z$ auf $\partial\mathbb{D}$.

(b) Zeigen Sie: Die Menge G der invertierbaren Operatoren $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist wegzusammenhängend.

Hinweis: Betrachten Sie für $T \in G$ die Polarzerlegung und erinnern Sie sich an Aufgabe 21.7.

KAPITEL 23

Der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

Wir betrachten nun lineare Operatoren $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ in einem komplexen Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, für die der Definitionsbereich $D(T)$ ein echter linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ sein kann. Versehen mit dem durch

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle_{\mathcal{H}^2} := \langle x_1,y_1\rangle + \langle x_2,y_2\rangle \qquad \big((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathcal{H}^2\big)$$

gegebenen kanonischen Skalarprodukt ist $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ wieder ein Hilbertraum. Der Graph

$$G(T) := \{(x,Tx)\,;\, x \in D(T)\} \subset \mathcal{H}^2$$

ist dann, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{G(T)} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^2}\big|_{G(T)\times G(T)}$, ein Prä-Hilbertraum. Auf $D(T)$ betrachten wir neben dem von $\mathcal{H}$ induzierten Skalarprodukt noch das durch

$$\langle x,y\rangle_T := \langle (x,Tx),(y,Ty)\rangle_{G(T)} = \langle x,y\rangle + \langle Tx,Ty\rangle \qquad (x,y \in D(T))$$

gegebene Skalarprodukt. Die zugehörige Norm $\|\cdot\|_T$ nennen wir auch die Graphennorm[1]. Offensichtlich sind die Prä-Hilberträume $(D(T),\langle\cdot,\cdot\rangle_T)$ und $(G(T),\langle\cdot,\cdot\rangle_{G(T)})$ zueinander isometrisch isomorph. Wir sagen: T ist *dicht definiert*, falls $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Der Operator T heißt *abgeschlossen*, falls sein Graph $G(T)$ in $\mathcal{H}^2$ abgeschlossen ist.

Wie in Kapitel 5 schreiben wir $S \subseteq T$ für zwei lineare Operatoren $S : \mathcal{H} \supseteq D(S) \to \mathcal{H}$ und $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$, falls $G(S) \subseteq G(T)$, d.h. falls $D(S) \subseteq D(T)$ und $Sx = Tx$ für alle $x \in D(S)$ gilt.

23.1. Definition. Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter linearer Operator. Wir definieren

$$D(T^*) := \{y \in \mathcal{H}\,;\, x \mapsto \langle Tx,y\rangle \text{ ist stetig auf } D(T) \text{ bzgl. } \|\cdot\|\}\,.$$

Offensichtlich ist dies ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$. Da $D(T)$ nach Voraussetzung in $\mathcal{H}$ dicht liegt, hat für alle $y \in D(T^*)$ die Abbildung $x \mapsto \langle Tx,y\rangle$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem stetigen linearen Funktional auf $\mathcal{H}$. Nach dem Satz 2.19 von Riesz gibt es daher genau ein Element $T^*y \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in D(T): \qquad \langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle\,.$$

Man rechnet nach, daß die hierdurch definierte Abbildung $T^* : \mathcal{H} \supseteq D(T^*) \to \mathcal{H}$ wieder ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ ist. Man nennt T^* den zu T *adjungierten Operator*.

23.2. Lemma. *Für jeden dicht definierten linearen Operator T ist der adjungierte Operator T^* abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(y_n, T^*y_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Cauchyfolge in $G(T^*)$. Diese hat einen Grenzwert (y,u) in $\mathcal{H}$. Insbesondere gilt $y_n \to y$ und $Ty_n \to u$ für $n \to \infty$ in $\mathcal{H}$. Für alle $x \in D(T)$ folgt

$$\langle Tx,y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tx,y_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x,T^*y_n\rangle = \langle x,u\rangle\,.$$

[1]Diese ist äquivalent zu der ursprünglich in Definition 5.9 eingeführten Graphennorm.

Also ist $x \mapsto \langle Tx, y\rangle = \langle x, u\rangle$ stetig auf $D(T)$ bezüglich der Norm von $\mathcal{H}$ und somit $y \in D(T^*)$ mit $T^*y = u$. Damit folgt $(y, u) = \lim_{n\to\infty}(y_n, T^*y_n) \in G(T^*)$. Der Graph von T^* ist folglich abgeschlossen. ☐

23.3. Definition. Ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ heißt

- *hermitesch*, falls für alle $x, y \in D(T)$ gilt: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.
- *symmetrisch*, falls T hermitesch und dicht definiert ist. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn T dicht definiert ist und $T \subseteq T^*$ gilt.
- *selbstadjungiert*, falls T dicht definiert ist und $T = T^*$ gilt.

Nach Lemma 23.2 ist also jeder selbstadjungierte Operator abgeschlossen. Jeder symmetrische Operator T ist wenigstens abschließbar, denn er besitzt die abgeschlossene Erweiterung T^*.

Der Operator $V : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit $V(x, y) := (y, -x)$ ist offensichtlich unitär, da er eine bijektive lineare Isometrie von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ auf sich ist. Man berechnet $V^2 = -1$, $V^4 = 1$, $V^3(u, v) = V^{-1}(u, v) = V^*(u, v) = (-v, u)$ für alle $u, v \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

23.4. Lemma. *Für einen dicht definierten linearen Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ gilt:*

$$G(T^*) = V(G(T))^\perp.$$

Ist also T ein abgeschlossener dicht definierter Operator, so folgt (wegen $V^2 = -1$)

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} = V(G(T)) \oplus G(T^*) = G(T) \oplus V(G(T^*)) = G(T) \oplus V^*(G(T^*)). \tag{23.1}$$

Beweis. Dies ergibt sich aus folgenden naheliegenden Äquivalenzen für alle $(u, v) \in \mathcal{H}^2$:

$$\begin{aligned}(u, v) \in G(T^*) &\iff \langle Tx, u\rangle = \langle x, v\rangle \text{ für alle } x \in D(T)\\ &\iff \langle(-Tx, x), (u, v)\rangle = 0 \text{ für alle } x \in D(T)\\ &\iff (u, v) \in V(G(T))^\perp.\end{aligned}$$

☐

23.5. Folgerung. *Ist $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter linearer Operator und $S : \mathcal{H} \supseteq D(S) \to \mathcal{H}$ eine Erweiterung von T, so ist $S^* \subseteq T^*$.*

Beweis. Wegen $V(G(T)) \subseteq V(G(S))$ folgt dies unmittelbar aus Lemma 23.4. ☐

Im folgenden Lemma fassen wir einige elementare Eigenschaften symmetrischer Operatoren zusammen:

23.6. Lemma. *Für symmetrische dicht definierte Operatoren $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ gilt:*

(a) *Ist* $\operatorname{ran} T$ *dicht in $\mathcal{H}$, so ist T injektiv.*
(b) *Ist $T = T^*$ (also T selbstadjungiert) und T injektiv, so ist* $\operatorname{ran} T$ *dicht in $\mathcal{H}$ und $T^{-1} : \mathcal{H} \supseteq \operatorname{ran} T \to \mathcal{H}$ ist ebenfalls selbstadjungiert.*
(c) *Ist $D(T) = \mathcal{H}$, so ist T selbstadjungiert und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
(d) *Ist* $\operatorname{ran} T = \mathcal{H}$, *so ist T^{-1} selbstadjungiert und $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Beweis. (a) Ist $u \in \ker T = \{x \in D(T)\,;\, Tx = 0\}$, so folgt für alle $x \in D(T)$, es ist $\langle u, Tx\rangle = \langle Tu, x\rangle = 0$. Also folgt $\ker T \subseteq (\operatorname{ran} T)^\perp = \{0\}$.

(b) Sei nun $T = T^*$ mit $\ker T = \{0\}$ und sei $y \in (\operatorname{ran} T)^\perp$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in D(T)$: $\langle Tx, y\rangle = 0$. Insbesondere ist $y \in D(T^*) = D(T)$ und $Ty = T^*y = 0$, also $y = 0$. Es folgt $(\operatorname{ran} T)^\perp = \{0\}$ und damit die Dichtheit von $\operatorname{ran} T$ in $\mathcal{H}$. Ferner gilt: Es ist $G(T^{-1}) = \{(Tx, x)\,;\, x \in D(T)\} = W(G(T))$, wobei

$$W : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \qquad (x, y) \mapsto (y, x)$$

ein unitärer linearer Operator ist mit $W^2 = 1$ und $WV = -VW$. Insbesondere ist $T^{-1} : \mathcal{H} \supseteq D(T^{-1}) = \operatorname{ran} T \to \mathcal{H}$ wieder ein dicht definierter abgeschlossener Operator. Mit Lemma 23.4 erhalten wir

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} = G(T^{-1}) \oplus V\big(G((T^{-1})^*)\big)$$

und auch (wegen $T = T^*$)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathcal{H} &= W(G(T)) \oplus W\big(V(G(T))\big) \\ &= W(G(T)) \oplus (-VW(G(T))) = G(T^{-1}) \oplus V\big(-G(T^{-1})\big) \\ &= G(T^{-1}) \oplus V\big(G(T^{-1})\big)\,. \end{aligned}$$

Es folgt $V\big(G((T^{-1})^*)\big) = V\big(G(T^{-1})\big)$ und damit $G((T^{-1})^*) = G(T^{-1})$, d.h. $(T^{-1})^* = T^{-1}$.

(c) Wegen $D(T) = \mathcal{H}$ und $T \subseteq T^*$ muß $T = T^*$ gelten. Insbesondere ist T selbstadjungiert und damit ein abgeschlossener Operator. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist T stetig.

(d) Nach (a) ist T injektiv und es ist $D(T^{-1}) = \mathcal{H}$. Wir zeigen zunächst, daß T^{-1} ein symmetrischer Operator ist. Seien hierzu $x, y \in D(T^{-1}) = \operatorname{ran} T = \mathcal{H}$ beliebig. Dann gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u, v \in D(T)$ mit $Tu = x$ und $Tv = y$. Es folgt unter Ausnutzung der Tatsache, daß T ein symmetrischer Operator ist:

$$\langle T^{-1}x, y\rangle = \langle u, Tv\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle x, T^{-1}y\rangle\,.$$

T^{-1} ist also ein auf ganz $\mathcal{H}$ definierter symmetrischer linearer Operator und daher nach (c) selbstadjungiert. Nach (b) muß dann auch $T = (T^{-1})^{-1} = T$ selbstadjungiert sein. $\square$

23.7. Satz. *Ist $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator, so ist $D(T^*)$ ebenfalls dicht in $\mathcal{H}$ und es gilt $T = T^{**} := (T^*)^*$.*

Beweis. Wir beweisen die Dichtheit von $D(T^*)$ in $\mathcal{H}$, indem wir $D(T^*)^\perp = \{0\}$ zeigen. Sei also $u \in D(T^*)^\perp$ beliebig. Dann gilt $\langle u, y\rangle = 0$ für alle $y \in D(T^*)$ und daher

$$0 = \langle (0,u), (-T^*y, y)\rangle = \langle (0,u), V(y, T^*y))\rangle.$$

Also ist $(0,u) \in V(G(T^*))^\perp$. Wegen $V(G(T^*))^\perp = G(T)$ (nach Lemma 23.4) ist dies nur möglich, wenn $u = 0$ ist. Also ist $D(T^*)$ dicht in $\mathcal{H}$ und somit $T^{**} = (T^*)^*$ definiert. Da auch T^* abgeschlossen ist, folgt mit (23.1) in Lemma 23.4

$$V(G(T^*)) \oplus G(T^{**}) = \mathcal{H} \times \mathcal{H} = V(G(T^*)) \oplus G(T).$$

Es folgt $G(T^{**}) = G(T)$ und somit $T = T^{**}$. $\square$

23.8. Satz. *Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter, abgeschlossener linearer Operator.*

(a) *Der Operator $Q := 1 + T^*T$ ist auf seinem Definitionsbereich $D(Q) = D(T^*T) = \{x \in D(T)\,;\, Tx \in D(T^*)\}$ injektiv mit $\operatorname{ran} Q = \mathcal{H}$.*
(b) *Es gibt einen Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|B\| \le 1$, so daß gilt:*
   (i) *$\|B\| \le 1$ und B ist ein positiver Operator.*
   (ii) *Es ist $A := TB \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|A\| \le 1$.*
   (iii) *$BQ \subseteq QB = 1$.*
(c) *T^*T ist selbstadjungiert.*
(d) *Der Graph $G(T\big|D(T^*T)) = \{(x, Tx)\,;\, x \in D(T^*T)\}$ der Einschränkung von T auf $D(T^*T)$ liegt dicht in $G(T)$.*

Beweis. Für alle $x \in D(Q)$ gilt (wegen $Tx \in D(T^*)$):

$$\|x\|^2 \le \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \langle x, x\rangle + \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, Qx\rangle \le \|x\| \cdot \|Qx\|.$$

Insbesondere ist Q injektiv. Da T abgeschlossen und dicht definiert ist, gibt es nach (23.1) zu jedem $u \in \mathcal{H}$ genau ein $Au \in D(T^*)$ und genau ein $Bu \in D(T)$ mit

$$(0,u) = (-TBu, Bu) + (Au, T^*Au)\,. \tag{23.2}$$

Da die Vektoren auf der rechten Seite von (23.2) zueinander orthogonal sind, folgt mit Pythagoras

$$\|u\|^2 = \|(0,u)\|^2 = \|(-TBu,Bu)\|^2 + \|(Au,T^*Au)\|^2 \geq \|Au\|^2 + \|Bu\|^2$$

für alle $u \in \mathcal{H}$. Insbesondere hat man also $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|A\| \leq 1$ und $\|B\| \leq 1$. Aus (23.2) erhält man für die erste Komponente $TBu = Au$ und hieraus $T^*TBu = T^*Au$ und für die zweite Komponente

$$u = Bu + T^*Au = Bu + T^*TBu = QBu$$

für alle $u \in \mathcal{H}$. B ist daher injektiv mit $\operatorname{ran} B \subseteq D(Q)$ und Q ist surjektiv. Ist $v \in D(Q)$ beliebig, so ist $Qv = QBQv$ und wegen der Injektivität von Q somit $v = BQv \in \operatorname{ran} B$. Es ist also sogar $\operatorname{ran} B = D(Q)$ und $BQ \subseteq QB = 1$. Ist $u \in \mathcal{H}$ beliebig, so gibt es wegen der Surjektivität von Q ein $v \in D(Q)$ mit $Qv = u$. Es folgt

$$\langle Bu, u\rangle = \langle BQv, Qv\rangle = \langle v, Qv\rangle = \langle v, v\rangle + \langle Tv, Tv\rangle \geq 0.$$

B ist also ein positiver Operator und daher insbesondere selbstadjungiert. Nach Lemma 23.6 (b) ist daher auch Q und somit auch $T^*T = Q - 1$ selbstadjungiert. Damit sind die Aussagen (a)-(c) bewiesen.

Zu (d): Da T ein abgeschlossener Operator ist, ist $G(T)$ abgeschlossen in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Sei $(u, Tu) \in G(T) \ominus G(T|D(T^*T))$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in D(T^*T) = D(Q)$:

$$0 = \langle (u,Tu),(x,Tx)\rangle = \langle u,x\rangle + \langle Tu,Tx\rangle = \langle u, Qx\rangle.$$

Wegen $\operatorname{ran} Q = \mathcal{H}$ folgt $u = 0$. Also ist $G(T) \ominus G(T|D(T^*T)) = \{(0,0)\}$, d.h. $G(T|D(T^*T))$ liegt dicht in $G(T)$. ☐

23.9. Definition. Ein symmetrischer Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ heißt *maximal symmetrisch*, , falls T keine echte symmetrische Erweiterung besitzt, d.h. falls für alle symmetrischen Operatoren $S : \mathcal{H} \supseteq D(S) \to \mathcal{H}$ mit $T \subseteq S$ schon $S = T$ gilt.

23.10. Lemma. *Jeder selbstadjungierte Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ist maximal symmetrisch.*

Beweis. Sei $T \subseteq S$ und $S : \mathcal{H} \supseteq D(S) \to \mathcal{H}$ symmetrisch, d.h. mit $S \subseteq S^*$. Wegen $S \subseteq S^* \subseteq T^* = T \subseteq S$ (nach Folgerung 23.5) folgt $S = T$. ☐

23.11. Lemma. *Für einen hermiteschen (nicht notwendig dicht definierten) Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ gilt:*

(a) $\forall x \in D(T): \quad \|Tx \pm ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \|x\|_T^2$.
(b) *T ist genau dann abgeschlossen, wenn* $\operatorname{ran} T$ *abgeschlossen ist.*
(c) *$T + i$ und $T - i$ sind injektiv.*
(d) *Ist* $\operatorname{ran}(T + i) = \mathcal{H}$ *oder* $\operatorname{ran}(T - i) = \mathcal{H}$*, so hat T keine echte hermitesche Erweiterung (ist also maximal symmetrisch, falls $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt).*

Beweis. (a) Da T hermitesch ist gilt für alle $x \in D(T)$:

$$\|Tx \pm ix\|^2 = \|Tx\|^2 \pm i\langle x, Tx\rangle \mp i\langle Tx, x\rangle + \|x\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2.$$

(b) Da $(D(T), \|\cdot\|_T)$ isometrisch isomorph zu $(G(T), \|\cdot\|_{G(T)})$ ist, ist T genau dann abgeschlossen, wenn $(D(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig ist. Wegen (a) ist dies genau dann der Fall, wenn $\operatorname{ran} T$ vollständig, also abgeschlossen in $\mathcal{H}$ ist.

(c) folgt unmittelbar aus (a).

(d) Sei $\operatorname{ran}(T+i) = \mathcal{H}$ und sei $T \subseteq S$ für einen hermiteschen Operator S. Dann folgt $\mathcal{H} = \operatorname{ran}(T+i) \subseteq \operatorname{ran}(S+i) \subseteq \mathcal{H}$ und somit $\operatorname{ran}(S+i) = \mathcal{H}$. Da $x \mapsto Sx + ix$ nach (a) eine bijektive Isometrie von $(D(S), \|\cdot\|_S)$ auf $\operatorname{ran} S = \mathcal{H}$ ist und $T \subseteq S$, gilt, ist dies nur möglich, falls $S = T$. Die entsprechende Aussage für $T - i$ folgt analog. $\square$

Die gebrochen lineare Transformation

$$z \mapsto h(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

bildet $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ bijektiv auf $\partial\mathbb{D}$ ab. Insbesondere gilt $\overline{h(t)} = \frac{1}{h(t)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit dem stetigen Funktionalkalkül 15.13 folgt $h(T)^* = \overline{h}(T) = h(T)^{-1}$, d.h. $h(T)$ ist ein unitärer Operator. Jeden unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $h(\infty) = 1 \notin \sigma(U, \mathcal{H})$ kann man auf diese Art erhalten. (vergl. Aufgabe 22.3)

Sei nun $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein hermitescher Operator. Wegen Lemma 23.11 (a) ist durch

$$U(Tx + ix) := Tx - ix\,, \qquad (x \in D(T))$$

eine lineare Isometrie

$$U : \mathcal{H} \supseteq D(U) := \operatorname{ran}(T+i) \to \mathcal{H}$$

gegeben mit $\operatorname{ran} U = \operatorname{ran}(T-i)$. Wegen

$$(T+i)^{-1}(\operatorname{ran}(T+i)) = D(T+i) = D(T)$$

können wir U auch schreiben in der Form

$$U = (T+i)^{-1}(T-i) \qquad \text{mit } D(U) = \operatorname{ran}(T+i).$$

U heißt die *Cayley-Transformierte von* T. Bevor wir diese näher untersuchen zeigen wir:

23.12. Lemma. *Sei $U : \mathcal{H} \supseteq D(U) \to \mathcal{H}$ eine lineare Isometrie, d.h. ein linearer Operator mit $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in D(U)$.*

(a) $\forall x, y \in D(U) : \quad \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.
(b) *Ist* $\operatorname{ran}(1-U)$ *dicht in* $\mathcal{H}$, *so ist* $1-U$ *injektiv.*
(c) *Ist einer der drei Räume* $D(U)$, $\operatorname{ran} U$, $G(U)$ *abgeschlossen, so gilt dies auch für die beiden anderen.*

Beweis. (a) folgt mit der Polarisierungsidentität.

(b) Sei $x \in \ker(1-U)$, d.h. $x \in D(U)$ und $Ux = x$. Dann gilt für alle $y \in D(U)$ unter Verwendung von (a):

$$\big\langle x, (1-U)y\big\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Uy\rangle = \langle Ux, Uy\rangle - \langle x, Uy\rangle = \big\langle (U-1)x, Uy\big\rangle = 0.$$

Also ist $x \in \operatorname{ran}(1-U)^\perp$ und somit $x = 0$, falls $\operatorname{ran}(1-U)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

(c) bleibt als Aufgabe 23.1 dem Leser überlassen. $\square$

23.13. Satz. *Für die Cayley-Transformierte U eines hermiteschen Operators $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ gilt:*

(a) *U ist genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist.*
(b) *Es ist* $\operatorname{ran}(1-U) = D(T)$. *Der Operator* $1-U$ *ist injektiv und es gilt*

$$T = i(1+U)(1-U)^{-1}.$$

(c) *U ist genau dann unitär, wenn T selbstadjungiert ist.*

Ist umgekehrt $V : \mathcal{H} \supseteq D(V) \to \mathcal{H}$ eine lineare Isometrie, für die $1-V$ injektiv ist, so ist V die Cayley-Transformierte eines hermiteschen Operators $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$.

Beweis. (a) Nach Lemma 23.11 ist T genau dann abgeschlossen, wenn $\operatorname{ran}(T+i) = D(U)$ abgeschlossen ist. Nach Lemma 23.12 ist dies genau dann der Fall, wenn U abgeschlossen ist.

(b) Nach Definition der Cayley-Transformierten ist $D(U) = \operatorname{ran}(T+i)$ und $U(T+i)x = (T-i)x$ für alle $y = (T+i)x \in D(U)$, $x \in D(T)$. Es folgt

$$\begin{aligned}(1-U)y &= (T+i)x - (T-i)x = 2ix\,,\\ (1+U)y &= (T+i)x + (T-i)x = 2Tx\,.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt: $1-U$ ist injektiv und $\operatorname{ran}(1-U) = D(T)$. $(1-U)^{-1}$ bildet also $D(T)$ bijektiv auf $D(1-U) = D(U)$ ab und für alle $x \in D(T)$ gilt mit $y := (T+i)x$:

$$2Tx = (1+U)y = (1+U)(1-U)^{-1}2ix$$

und daher $Tx = i(1+U)(1-U)^{-1}x$.

(c) $\Longleftarrow$: Ist T selbstadjungiert, so gilt nach Satz 23.8: $\operatorname{ran}(1+T^2) = \mathcal{H}$. Wegen

$$(T+i)(T-i)x = (1+T^2)x = (T-i)(T+i)x$$

für alle $x \in D(T^2) = D\left((T+i)(T-i)\right) = D\left((T-i)(T+i)\right)$ folgt $D(U) = \operatorname{ran}(T+i) = \mathcal{H}$.

$\Longrightarrow$: Sei nun umgekehrt die Cayley-Transformierte U von T unitär. Dann gilt $\operatorname{ran}(1-U)^\perp = \ker(1-U)^*$ und $1-U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist normal. Man erhält daher

$$\begin{aligned}\|(1-U)x\|^2 =& \langle(1-U)x, (1-U)x\rangle = \langle(1-U)^*(1-U)x, x\rangle = \langle(1-U)(1-U)^*x, x\rangle\\ =& \|(1-U)^*x\|^2.\end{aligned}$$

Wegen (b) folgt hieraus $\ker(1-U)^* = \ker(1-U) = \{0\}$. Daher liegt $D(T) = \operatorname{ran}(1-U)$ dicht in $\mathcal{H}$. Der adjungierte Operator T^* ist also definiert und man hat $T \subseteq T^*$, da T hermitesch ist.

Sei nun $y \in D(T)^*$ beliebig. Wegen $\operatorname{ran}(T+i) = D(U) = \mathcal{H}$ gibt es ein $y_0 \in D(T)$ mit (wegen $T \subseteq T^*$):

$$(T^*+i)y = (T+i)y_0 = (T^*+i)y_0\,.$$

Insbesondere ist $y_1 := y - y_0 \in D(T^*)$ und für alle $x \in D(T)$ gilt:

$$\langle(T-i)x, y_1\rangle = \langle x, (T^*+i)y_1\rangle = 0.$$

Es folgt $y_1 = y - y_0 \in \operatorname{ran}(T+i)^\perp = D(U) = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$. Dies zeigt $y = y_0 \in D(T)$ für alle $y \in D(T^*)$. Wegen $T \subseteq T^*$ folgt hieraus $T = T^*$.

Sei nun umgekehrt $V : \mathcal{H} \supseteq D(V) \to \mathcal{H}$ eine lineare Isometrie, für die $1-V$ injektiv ist. Wir definieren einen linearen Operator $S : \mathcal{H} \supseteq D(S) := \operatorname{ran}(1-V) \to \mathcal{H}$ durch

$$Sx := i(1+V)u \qquad \text{für alle } x = (1-V)u \in D(S)\,, u \in D(V). \tag{23.3}$$

Wegen der Injektivität von $1-V$ ist S wohldefiniert. Seien nun $x, y \in D(S) = \operatorname{ran}(1-V)$ beliebig. Dann gibt es eindeutig bestimmte $u, v \in D(V)$ mit $(1-V)u = x$, $(1-V)v = y$ und es folgt mit (23.3):

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle &= \langle i(1+V)u, (1-V)v\rangle = i\left(\langle u, v\rangle - \langle Vu, Vv\rangle + \langle Vu, v\rangle - \langle u, Vv\rangle\right)\\ &= i\langle Vu, v\rangle - i\langle u, Vv\rangle\,,\end{aligned}$$

da V als Isometrie das Skalarprodukt erhält. Aus dem gleichen Grund ist $\langle u, iv\rangle = \langle Vu, V(iv)\rangle$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle &= i\langle Vu, v\rangle - i\langle u, Vv\rangle = \langle u, iv\rangle - \langle Vu, V(iv)\rangle + \langle Vu, iv\rangle - \langle u, V(iv)\rangle\\ &= \langle(1-V)u, i(1+V)v\rangle = \langle x, Sy\rangle.\end{aligned}$$

S ist also ein symmetrischer Operator.

Wegen (23.3) gilt für alle $x = (1-V)u \in D(S)$, $u \in D(V)$:

$$\begin{aligned}(S-i)x &= i(1+V)u - i(1-V)u = 2iVu\\ (S+i)x &= i(1+V)u + i(1-V)u = 2iu\,.\end{aligned}$$

Hiermit folgt für alle $x = (S+i)v \in \operatorname{ran}(S+i)$:

$$V(S+i)x = 2iVu = (S-i)x$$

und $D(V) = \operatorname{ran}(S+i)$. V ist also die Cayley-Transformierte von S. □

Aufgrund dieses Satzes und der Definition der Cayley-Transformierten sehen wir: Für die Cayley-Transformierten U_1, U_2 zweier hermitescher Operatoren T_1, T_2 gilt:

$$T_1 \subseteq T_2 \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 \subseteq U_2\,.$$

Das Studium hermitescher Erweiterungen hermitescher Operatoren wird also reduziert auf das Studium isometrischer Erweiterungen V mit $\ker(1-V) = \{0\}$ von isometrischen Operatoren.

Sei nun $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener, symmetrischer Operator mit der Cayley-Transformierten U. Dann sind $D(U) = \operatorname{ran}(T+i)$ und $\operatorname{ran} U = \operatorname{ran}(T-i)$ abgeschlossen in $\mathcal{H}$ und U bildet $\operatorname{ran}(T+i)$ isometrisch auf $\operatorname{ran}(T-i)$ ab. Da $D(T) = \operatorname{ran}(1-U)$ nach Voraussetzung dicht liegt in $\mathcal{H}$, liegt auch für jede isometrische Erweiterung U_1 von U der Unterraum $\operatorname{ran}(1-U_1)$ dicht in $\mathcal{H}$. Nach Lemma 23.12 ist dann auch $1-U_1$ injektiv und daher nach Satz 23.13 Cayleytransformierte einer symmetrischen Erweiterung von T.

23.14. Definition. Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener, symmetrischer Operator. Dann heißen

$$\begin{aligned}d_+(T) &:= \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T+i) = \dim\operatorname{ran}(T+i)^\perp,\\ d_-(T) &:= \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T-i) = \dim\operatorname{ran}(T-i)^\perp\end{aligned}$$

die *Defektindizes* von T.

23.15. Satz. *Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener, symmetrischer Operator. Dann gilt:*

(a) *T ist genau dann selbstadjungiert, wenn $d_+(T) = d_-(T) = 0$ gilt.*
(b) *T ist genau dann maximalsymmetrisch, wenn $d_+(T) = 0$ oder $d_-(T) = 0$ gilt.*
(c) *T besitzt genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung, wenn $d_+(T) = d_-(T)$ gilt.*

Beweis. (a) folgt aus Satz 23.13 und den Vorbetrachtungen.

(b) Ist $d_+(T) = 0$ oder $d_-(T) = 0$ so gilt für die Cayley-Transformierte U von T: $D(U) = \mathcal{H}$ oder $\operatorname{ran} U = \mathcal{H}$. Insbesondere kann U keine echte isometrische Erweiterung besitzen.

Sind umgekehrt die Defektindizes von T beide von 0 verschieden und ist U die Cayley-Transformierte von T, so gibt es Vektoren $e_\pm \in \operatorname{ran}(T \pm i)^\perp$ mit $\|e_\pm\| = 1$. Wir setzen $D(U_1) := D(U) \oplus \mathbb{C}e_+ = \operatorname{ran}(T+i) \oplus \mathbb{C}e_+$ und für alle $x + \lambda e_+$, $x \in D(U) = \operatorname{ran}(T+i)$, $\lambda \in \mathbb{C}$: $U_1(x+\lambda e_+) := Ux + \lambda e_-$, falls $e_+ \neq e_-$. Dann ist U_1 eine echte isometrische Erweiterung von U mit $\operatorname{ran}(1-U_1) \supseteq \operatorname{ran}(1-U) = \operatorname{ran}(T-i)$ dicht in $\mathcal{H}$ und daher $\ker(1-U_1) = \{0\}$ (nach Lemma 23.12). Nach Satz 23.13 ist U_1 also Cayleytransformierte einer echten symmetrische Erweiterung von T.

(c) folgt mit Satz 23.13 (c) und der Tatsache daß jede *unitäre* Erweiterung U_1 der Cayleytransformierten U von T den Raum $\operatorname{ran}(T+i)^\perp$ isometrisch auf $\operatorname{ran}(T-i)^\perp$ abbildet. □

23.16. Beispiel. Sei $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum mit $\dim \mathcal{K} = d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und sei

$$\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{N}_0, \mathcal{K}) := \Big\{ x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}_0} \,;\, \|x\|_2^2 := \sum_{n=0}^\infty \|x_n\|_{\mathcal{K}}^2 < \infty \Big\}$$

versehen mit dem Skalarprodukt, welches definiert ist durch:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^\infty \langle x_n, y_n \rangle \qquad x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{H}\,.$$

Sei $Vx := (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ für alle $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{H}$. Dann ist V eine lineare Isometrie mit $\ker(1 - V) = \{0\}$ und $\operatorname{codim} \operatorname{ran} V = d > 0$. V ist also Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators T mit $d_+(T) = \operatorname{codim} \operatorname{ran}(T + i) = \operatorname{codim} D(V) = 0$ und $d_-(T) = \operatorname{codim} \operatorname{ran}(T - i) = \operatorname{codim} \operatorname{ran} V = d > 0$. Insbesondere ist T maximalsymmetrisch aber nicht selbstadjungiert.

23.17. Definition. Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Wir definieren die *Resolventenmenge* $\rho(T, \mathcal{H}) \subseteq \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von T wie folgt:

$$\rho(T, \mathcal{H}) \cap \mathbb{C} := \{ z \in \mathbb{C} \,;\, z - T \text{ ist injektiv und } (z - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \}\,.$$

Für den Punkt ∞ gelte:

$$\infty \in \rho(T, \mathcal{H}) \quad :\Longleftrightarrow \quad T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Die Menge $\sigma(T, \mathcal{H}) := \hat{\mathbb{C}} \setminus \rho(T, \mathcal{H})$ nennen wir das *Spektrum* von T in $\mathcal{H}$.

23.18. Lemma. *Für einen linearen Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ gilt:*

(a) *Ist $\sigma(T, \mathcal{H}) \neq \hat{\mathbb{C}}$, so ist T ein abgeschlossener linearer Operator.*

(b) *$\sigma(T, \mathcal{H})$ ist eine kompakte, nicht leere Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. (a) Ist $\sigma(T, \mathcal{H}) \neq \hat{\mathbb{C}}$, so gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $(z - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Insbesondere ist $(z - T)^{-1}$ ein abgeschlossener linearer Operator. Nach Lemma 5.13 ist dann auch $z - T$ und somit (unter Verwendung von Lemma 5.14 und Lemma 5.15) auch T ein abgeschlossener linearer Operator.

(b) Ist $T \notin \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist $\infty \in \sigma(T, \mathcal{H})$ und ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist $\sigma(T, \mathcal{H})$ kompakte, nicht leere Teilmenge von $\mathbb{C}$ nach Satz 7.9. Ist $\sigma(T, \mathcal{H}) = \hat{\mathbb{C}}$, so ist $\sigma(T, \mathcal{H})$ kompakt. Sei nun $\sigma(T, \mathcal{H}) \neq \hat{\mathbb{C}}$ und $T \notin \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Es genügt zu zeigen, daß $\rho(T, \mathcal{H})$ offen ist. Sei also $z \in \rho(T, \mathcal{H})$ beliebig. Dann ist $z \in \mathbb{C}$ und nach dem Beweis von (a) ist T ein abgeschlossener linearer Operator. Ferner ist nach Definition von $\rho(T, \mathcal{H})$ der Operator $z - T : D(T) \to \mathcal{H}$ bijektiv und $(z - T)^{-1} : \mathcal{H} \to D(T) \subseteq \mathcal{H}$ stetig bezüglich der Norm von $\mathcal{H}$. Da T ein abgeschlossener Operator ist, ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}((D(T), \|\cdot\|_T), \mathcal{H})$ (wegen $\|Tx\| \leq \|x\|_T$ für alle $x \in D(T)$). Nach dem Satz 5.7 von der inversen Abbildung ist $(z - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, (D(T), \|\cdot\|_T))$. Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w - z| < \|(z - T)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, (D(T), \|\cdot\|_T))}$ folgt

$$\|(w - T)(z - T)^{-1} - i_{\mathcal{H}}\| = |w - z| \|(z - T)^{-1}\| \leq |w - z| \|(z - T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, (D(T), \|\cdot\|_T))} < 1\,.$$

Der Operator $(w - T)(z - T)^{-1}$ ist also in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ invertierbar. Insbesondere ist

$$w - T : D(w - T) = D(z - T) = \operatorname{ran}(z - T)^{-1} \to \mathcal{H}$$

bijektiv. Da $(w - T)^{-1}$ ein abgeschlossener Operator ist, folgt mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen $(w - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. $\square$

Die folgenden einfachen Rechenregeln für selbstadjungierte Operatoren rechnet man unmittelbar nach:

23.19. Lemma. *Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator.*

(a) *Ist* $S = S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *so ist auch* $S + T$ *selbstadjungiert.*
(b) *Ist* $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, *so ist auch* αT *selbstadjungiert.*

23.20. Lemma. *Ist* $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ *ein selbstadjungierter Operator, so ist* $\sigma(T, \mathcal{H}) \subseteq \mathbb{R} \cup \infty$.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ beliebig, $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. $(\lambda - T)^{-1}$ existiert offensichtlich genau dann in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, wenn der abgeschlossene Operator

$$\frac{1}{\beta}(\lambda - T) = i + \Big(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} T\Big)$$

auf $D(T)$ injektiv ist und $\operatorname{ran} \frac{1}{\beta}(\lambda - T) = \mathcal{H}$ gilt. Da der Operator $A := \big(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}T\big)$ nach Lemma 23.19 selbstadjungiert ist, folgt nach Satz 23.15

$$0 = d_+(A) = \operatorname{codim} \operatorname{ran}(i + A) = \operatorname{codim} \operatorname{ran} \frac{1}{\beta}(\lambda - T).$$

Also existiert $(\lambda - T)^{-1}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und es folgt $\lambda \in \rho(T, \mathcal{H})$. □

Die folgende Rechenregel für die Adjungiertenbildung wird später benötigt:

23.21. Lemma. *Sind* $T_j : \mathcal{H} \supseteq D(T_j) \to \mathcal{H}$, $j = 1, 2$, *dicht definierte lineare Operatoren, so daß auch* $D(T_2T_1)$ *dicht in* $\mathcal{H}$ *liegt, so gilt*

$$T_1^* T_2^* \subseteq (T_2 T_1)^*. \tag{23.4}$$

Ist $T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *so gilt* $T_1^* T_2^* = (T_2 T_1)^*$.

Beweis. Für alle $x \in D(T_2T_1)$, $y \in D(T_1^*T_2^*)$ gilt wegen $x \in D(T_1)$ und $T_2^* y \in D(T_1^*)$

$$\langle T_1 x, T_2^* y\rangle = \langle x, T_1^* T_2^* y\rangle.$$

Wegen $T_1 x \in D(T_2)$ und $y \in D(T_2^*)$ folgt weiter

$$\langle T_2 T_1 x, y\rangle = \langle T_1 x, T_2^* y\rangle = \langle x, T_1^* T_2^* y\rangle.$$

Also ist $y \in D((T_2T_1)^*)$ und $(T_2T_1)^* y = T_1^* T_2^* y$.

Ist zusätzlich $T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist $D(T_2^*) = \mathcal{H}$ und es folgt für alle $x \in D(T_2T_1)$, $y \in D((T_2T_1)^*)$:

$$\langle T_1 x, T_2^* y\rangle = \langle T_2 T_1 x, y\rangle = \langle x, (T_2T_1)^* y\rangle.$$

Also ist $T_2^* y \in D(T_1^*)$ und damit $y \in D(T_1^* T_2^*)$. □

Im folgenden sei σ stets eine abgeschlossene Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$ und

$$E : \mathcal{B} := \mathcal{B}(\sigma) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

ein Spektralmaß mit $E(\sigma \cap \{\infty\}) = 0$ und $\langle E(\cdot)x, y\rangle \in \operatorname{rca}(\sigma)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Nach Lemma 22.3 ist dann

$$\Psi := \int_\sigma \cdot \, dE : B(\sigma, \mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

ein stetiger unitaler $*$-Homomorphismus. Insbesondere gilt für alle $f \in B(\sigma, \mathcal{B})$, $x \in \mathcal{H}$:

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \langle \Psi(f)x, \Psi(f)x\rangle = \langle \Psi(|f|^2)x, x\rangle = \int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle. \tag{23.5}$$

Wegen $E(\{\infty\}) = 0$ gilt

$$\forall f \in B(\sigma, \mathcal{B}) : \qquad \int_\sigma f \, dE = \int_{\sigma \setminus \{\infty\}} f \, dE\,.$$

Wir wollen nun auch unbeschränkte Borel-meßbare Funktionen zulassen.

23.22. Lemma. *Sei $f : \sigma \to \mathbb{C}$ Borel-meßbar. Dann ist*

$$D_f := \Big\{x \in \mathcal{H}\,;\, \int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle < \infty\Big\}$$

ein dichter Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Für alle $x, y \in D_f$ gilt

$$\int_\sigma |f(z)| \, dv(\langle E(\cdot)x, y\rangle, z) \leq \|y\| \Big(\int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{23.6}$$

Ist f beschränkt, so gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$d\langle E(\cdot)x, \Psi(f)y\rangle = \overline{f} d\langle E(\cdot)x, y\rangle. \tag{23.7}$$

Beweis. (i) Beweis der Dichtheit von D_f in $\mathcal{H}$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\omega_n := \{z \in \sigma\,;\, |f(z)| < n\}$. Wegen der Borel-Meßbarkeit von f sind dies Borelmengen. Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\forall \delta \in \mathcal{B} : \qquad \langle E(\delta)E(\omega_n)x, E(\omega_n)x\rangle = \langle E(\delta \cap \omega_n)x, x\rangle.$$

Es folgt

$$\int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)E(\omega_n)x, E(\omega_n)x\rangle = \int_{\omega_n} |f(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle \leq n^2 \|E(\omega_n)x\|^2 \leq n^2\|x\|^2$$

und damit $\operatorname{ran} E(\omega_n) \subseteq D_f$. Wegen $\sigma = \bigcup_{n=1}^\infty \omega_n$ und $\omega_n \subseteq \omega_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt für alle $x \in \mathcal{H}$ wegen der abzählbaren Additivität in der starken Operatortopologie folgt für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$x = \lim_{n\to\infty} E(\omega_n)x \in \overline{D_f}.$$

D_f liegt also dicht in $\mathcal{H}$.

(ii) Wir zeigen nun, daß D_f ein Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist. Seien also $x, y \in D_f$ beliebig. Dann gilt für alle $\delta \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\langle E(\delta)(x+y), x+y\rangle &= \|E(\delta)(x+y)\|^2 \leq (\|E(\delta)x\| + \|E(\delta)y\|)^2 \\ &\leq 2(\|E(\delta)\|^2 + \|E(\delta)y\|^2) = 2(\langle E(\delta)x, x\rangle + \langle E(\delta)y, y\rangle).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für alle $x, y \in D_f$:

$$\begin{aligned}\int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)(x+y), (x+y)\rangle \leq& 2\int_\sigma |f(z)|^2 \, d(\langle E(z)x, x\rangle + \langle E(\delta)y, y\rangle)) \\ \leq& 2\Big(\int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle + \int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)y, y\rangle\Big) \\ <& \infty\end{aligned}$$

und daher $x + y \in D_f$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt weiter

$$\int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)\lambda x, \lambda x\rangle = |\lambda|^2 \int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle < \infty\,,$$

d.h. $\lambda x \in D_f$.

(iii) Beweis zu (23.7): Für alle $f \in B(\sigma, \mathcal{B}), h \in C(\sigma)$, $x, y \in \mathcal{H}$ gilt (da Ψ ein $*$-Homomorphismus ist):

$$\begin{aligned}\int_\sigma h(z)\overline{f(z)} \, d\langle E(z)x, y\rangle &= \langle \Psi(\overline{f}h)x, y\rangle = \langle \Psi(f)^*\Psi(h), x, y\rangle = \langle \Psi(h)x, \Psi(f)y\rangle \\ &= \int_\sigma h(z) \, d\langle x, \Psi(f)y\rangle\end{aligned}$$

Mit der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz folgt (23.7).

(iv) Der Beweis zu (23.6) benötigt den Satz von Radon-Nykodym, auf den hier aus Zeitgründen nicht eingegangen werden kann[2]. Nach diesem Satz gibt es im Fall $f \in B(\sigma, \mathcal{B})$ eine Borel-meßbare Funktion $g : \sigma \to \mathbb{C}$ mit $|g| \equiv 1$, so daß

$$gf\, d\langle E(\cdot)x, y\rangle = |f|\, dv(\langle E(\cdot)x, y\rangle, \cdot)\,.$$

Hieraus folgt

$$\int_\sigma |f(z)|\, dv(\langle E(\cdot)x, y\rangle, z) = \int_\sigma g(z)f(z)\, d\langle E(z)x, y\rangle = \langle \Psi(gf)x, y\rangle \le \|\Psi(gf)x\| \cdot \|y\|\,.$$

Wegen (23.5) gilt

$$\|\Psi(gf)x\|^2 = \int_\sigma |gf(z)|^2\, d\langle E(z)x, x\rangle = \int_\sigma |f(z)|^2\, d\langle E(z)x, x\rangle\,.$$

Damit folgt die Abschätzung (23.6) für Funktionen $f \in B(\sigma, \mathcal{B})$. Den allgemeinen Fall erhält man hieraus mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz (angewendet auf die beschränkten Borel-meßbaren Funktionen $\chi_{\omega_n} f$, $n \in \mathbb{N}$). □

23.23. Satz. *Seien σ und E wie vor und seien f, g Borel-meßbare Funktionen auf σ.*

(a) *Es gibt genau einen abgeschlossenen linearen Operator*

$$\Psi(f) : \mathcal{H} \supseteq D(\Psi(f)) = D_f \to \mathcal{H}$$

mit

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\sigma f(z)\, d\langle E(z)x, y\rangle$$

für alle $x \in D_f, y \in \mathcal{H}$. Ferner

$$\forall x \in D_f : \qquad \|\Psi(f)x\|^2 = \int_\sigma |f(z)|^2\, d\langle E(z)x, x\rangle \tag{23.8}$$

(b) *Es gilt*

$$\Psi(f)\Psi(g) \subseteq \Psi(fg) \quad \textit{mit } D(\Psi(f)\Psi(g)) = D_g \cap D_{fg}.$$

Es gilt also $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$ genau dann, wenn $D_{fg} \subseteq D_g$.

(c) $\Psi(f)^* = \Psi(\overline{f})$ *und* $\Psi(f)^*\Psi(f) = \Psi(|f|^2) = \Psi(f)\Psi(f)^*$.

Beweis. (a) Mit (23.6) folgt für alle $x \in D_f$, $y \in \mathcal{H}$:

$$\Big|\int_\sigma f(z)\, d\langle E(z)x, y\rangle\Big| \le \int_\sigma |f(z)|\, dv(\langle E(\cdot)x, y\rangle, z) \le \Big(\int_\sigma |f(z)|^2\, d\langle E(z)x, y\rangle\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Durch $y \mapsto \int_\sigma f(z)\, d\langle E(z)x, y\rangle$ ist also ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ gegeben. Nach dem Satz von Riesz gibt es daher genau ein $\Psi(f)x \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\sigma f(z)\, d\langle E(z)x, y\rangle \tag{23.9}$$

für alle $y \in \mathcal{H}$ und es gilt

$$\|\Psi(f)x\|^2 \le \int_\sigma |f(z)|^2\, d\langle E(z)x, x\rangle\,. \tag{23.10}$$

Die Linearität von $x \mapsto \Psi(f)x$ auf dem Untervektorraum D_f von $\mathcal{H}$ rechnet man nach unter Verwendung von (23.9) und der Tatsache, daß $x \mapsto \langle E(\cdot)x, y\rangle$ linear ist.

[2] Eine ausführliche Darstellung mit Beweis findet man z.B. in [**20**].

Wir setzen wieder $f_n := \chi_{\omega_n} f$ mit $\omega_n := \{z \in \sigma\,;\, |f(z)| \le n\}$. Nach dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz und (23.10) folgt

$$\|\Psi(f)x - \Psi(f_n)x\|^2 = \|\Psi(f - f_n)x\|^2 \le \left| \int_\sigma |f(z) - f_n(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle \to 0\right.$$

für $n \to \infty$. Andererseits gilt für $n \to \infty$ nach (23.5) und dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\|\Psi(f_n)x\|^2 = \int_\sigma |f_n(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle \to \int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle\,.$$

Damit folgt (23.8).

Die Abgeschlossenheit des Graphen von $\Psi(f)$ wird aus (c) folgen.

(b) Sei zunächst $f \in B(\sigma, \mathcal{B})$ vorausgesetzt. Dann ist $D_g \subseteq D_{fg}$ und für alle $x \in D_g$, $y \in \mathcal{H}$ gilt unter Verwendung von (23.7)

$$\begin{aligned}\langle \Psi(f)\Psi(g)x, y\rangle &= \langle \Psi(\overline{f})^*\Psi(g)x, y\rangle = \langle \Psi(g)x, \Psi(\overline{f})y\rangle = \int_\sigma g(z) \, d\langle E(z)x, \Psi(\overline{f})y\rangle \\ &= \int_\sigma g(z)f(z) \, d\langle E(z)x, y\rangle.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\forall x \in D_g: \quad \Psi(f)\Psi(g)x = \Psi(fg)x\,.$$

Ferner folgt hiermit nach (a)

$$\begin{aligned}\int_\sigma |f(z)|^2 \, d\langle E(z)\Psi(g)x, \Psi(g)x\rangle &= \|\Psi(f)\Psi(g)x\|^2 = \|\Psi(fg)x\|^2 \\ &= \int_\sigma |f(z)g(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle\,.\end{aligned} \tag{23.11}$$

Sei nun $f : \sigma \to \mathbb{C}$ eine beliebige Borel-meßbare Funktion und seien $f_n := f\chi_{\omega_n}$, $n \in \mathbb{N}$, wie im Beweisteil (a). Dann folgt für alle $x \in D_g$ durch Anwenden von (23.11) auf f_n und Übergang zum Grenzwert für $n \to \infty$ mit dem Satz über die monotone Konvergenz:

$$\|\Psi(f)\Psi(g)x\|^2 < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\sigma |f(z)g(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle < \infty$$

und

$$\|\Psi(f)\Psi(g)x\|^2 = \int_\sigma |f(z)g(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle\,,$$

falls eine (und damit auch die andere) der beiden Größen endlich ist. Insbesondere folgt

$$D(\Psi(f)\Psi(g)) = D_g \cap D_{fg}\,.$$

Weiter folgt für alle $x \in D_g \cap D_{fg}$ mit dem Satz über die dominierte Konvergenz für $n \to \infty$:

$$\int_\sigma |f_n(z) - f(z)|^2 \, d\langle E(z)\Psi(g)x, \Psi(g)x\rangle = \int_\sigma |f_n(z)g(z) - f(z)g(z)|^2 \, d\langle E(z)x, x\rangle \to 0\,.$$

Daher gilt für alle $x \in D(\Psi(f)\Psi(g)) = D_g \cap D_{fg}$:

$$\Psi(f)\Psi(g)x = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n)\Psi(g)x = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n g)x = \Psi(fg)x\,.$$

Damit ist (b) bewiesen.

(c) Seien nun $x, y \in D_f = D_{\overline{f}}$ beliebig. Mit f_n, $n \in \mathbb{N}$ wie vor gilt (unter Verwendung von Lemma 22.3):

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, y\rangle \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi(f_n)^*y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi(\overline{f_n})y\rangle = \langle x, \Psi(\overline{f})y\rangle$$

und somit $y \in D(\Psi(f)^*)$ sowie $\Psi(\overline{f}) \subseteq \Psi(f)^*$.

Zu zeigen ist also noch: $D(\Psi(f)^*) \subseteq D_f = D_{\overline{f}}$. Sei also $x \in D(\Psi(f)^*)$. Mit $f_n = f\chi_{\omega_n}$ wie vor gilt nach (b)

$$\Psi(f_n) = \Psi(f)\Psi(\chi_{\omega_n}) = \Psi(f)E(\omega_n).$$

Es folgt mit Lemma 23.21:

$$E(\omega_n)\Psi(f)^* = E(\omega_n)^*\Psi(f)^* \subseteq (\Psi(f)E(\omega_n))^* = \Psi(f_n)^* = \Psi(\overline{f_n})$$

und damit (wegen $D(\Psi(f)^*) = D(E(\omega_n)\Psi(f)^*)$)

$$E(\omega_n)\Psi(f)^* = \Psi(\overline{f_n})x.$$

Es folgt (wegen der σ-Additivität von E in der starken Operatortopologie)

$$\begin{aligned}\int_\sigma |f(\lambda)|^2\, d\langle E(\lambda)x, x\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_\sigma |f_n(\lambda)|^2\, d\langle E(\lambda)x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_\sigma |\overline{f_n(\lambda)}|^2\, d\langle E(\lambda)x, x\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\Psi(\overline{f_n})x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|E(\omega_n)\Psi(f)^*x\| = \|\Psi(f)^*x\|^2 < \infty\,.\end{aligned}$$

Also ist $x \in D_f = D_{\overline{f}}$ und $\Psi(f)^*x = \Psi(\overline{f})x$. Insbesondere folgt $\Psi(f) = \Psi(\overline{f})^*$. Nach Lemma 23.2 ist $\Psi(f)$ also ein abgeschlossener Operator.

Die verbleibende Aussage folgt aus der ersten Aussage in (c) und (b) unter Beachtung von $D_{|f|^2} = D_{f\overline{f}} \subseteq D_f = D_{\overline{f}}$. □

Sei $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ wie vor ein Spektralmaß auf den Borelmengen einer kompakten, nicht leeren Teilmenge σ von $\hat{\mathbb{C}}$ mit $\langle E(\cdot)x, y\rangle \in \mathrm{rca}(\sigma)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und mit $E(\{\infty\} \cap \sigma) = 0$. Sei weiter $f : \sigma \to \mathbb{C}$ eine Borel-meßbare Funktion auf σ. Die Familie

$$\mathfrak{D}_{\mathbb{Q}} := \big\{D(x + iy, \rho) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - x - iy| < \rho\}\,;\, x, y, \rho \in \mathbb{Q}\big\}$$

aller offenen Kreisscheiben mit rationalen Radien, und Mittelpunkten mit rationalen Real- und Imaginärteilen ist abzählbar. Für eine Borel-meßbare Funktion $f : \sigma \to \mathbb{C}$ ist

$$V_f := \bigcup\{D \in \mathfrak{D}_{\mathbb{Q}}\,;\, E(f^{-1}(D)) = 0\}$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wegen der σ-Additivität von E in der starken Operatortopologie folgt

$$E(f^{-1}(V_f)) = 0.$$

Die Menge V_f ist die größte offene Teilmenge V von $\mathbb{C}$ mit $E(f^{-1}(V)) = 0$. Wir definieren den *E-wesentlichen Wertebereich* $E - \operatorname{ess\,ran}(f)$ von f durch

$$E - \operatorname{ess\,ran}(f) := \mathbb{C} \setminus V_f$$

und das *E-wesentliche Supremum von f auf σ* durch

$$E - \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\sigma} |f(z)| := \sup_{w \in E - \operatorname{ess\,ran}(f)} |w|.$$

Die Funktion f heißt auf σ *wesentlich beschränkt* bzgl. E, falls $E - \operatorname{ess\,sup}_{z\in\sigma} |f(z)| < \infty$. In diesem Fall ist der E-wesentliche Wertebereich von f kompakt. Die Menge der E-wesentlich beschränkten Funktionen auf σ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^\infty(E)$. f heißt eine *E-Nullfunktion*, falls $E - \operatorname{ess\,sup}_{z\in\sigma} |f(z)| = 0$. Die Menge aller E-Nullfunktionen auf σ bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_E$. Offensichtlich gilt

$$E - \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\sigma} |f(z)| \le \|f\|_\sigma = \sup_{z\in\sigma} |f(z)|$$

und $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ genau dann, wenn es eine Funktion $h \in B(\sigma, \mathcal{B})$ gibt mit $f - h \in \mathcal{N}_E$. Die Menge

$$\mathcal{N}_E^\infty := \{f \in B(\sigma, \mathcal{B})\,;\, \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\sigma} |f(z)| = 0\}$$

ist dann ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $B(\sigma,\mathcal{B})$. Versehen wir die Quotientenalgebra

$$L^\infty(E) := B(\sigma,\mathcal{B})/\mathcal{N}_E^\infty$$

mit ihrer Quotientennorm $\|\cdot\|_{L^\infty(E)}$, so rechnet man nach, daß für alle $f \in B(\sigma,\mathcal{B})$ gilt:

$$\|f+\mathcal{N}_E^\infty\|_{L^\infty(E)} = \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\sigma} |f(z)|\,.$$

$L^\infty(E)$ ist kanonisch isomorph zum Raum aller E-wesentlich beschränkten Funktionen auf σ modulo $\mathcal{N}_E$. Für alle $f \in \mathcal{N}_E^\infty$ hat man $\Psi(f) = \int_\sigma f(z)\,d\langle E(z)x,y\rangle = 0$. Durch $\tilde\Psi(f+\mathcal{N}_E^\infty) := \Psi(f) = \int_\sigma f(z)\,dz$ wird also ein unitaler $*$-Homomorphismus

$$\tilde\Psi : L^\infty(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

definiert. Nach Aufgabe 15.4 ist $\tilde\Psi$ stetig und $\|\tilde\Psi\| = 1$. Es gilt sogar

23.24. Lemma. *$\tilde\Psi : L^\infty(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist ein isometrischer $*$-Monomorphismus.*

Beweis. Da $\mathcal{T}(\sigma,\mathcal{B})$ dicht in $B(\sigma,\mathcal{B})$ und somit $\hat{\mathcal{T}} := \{g+\mathcal{N}_E^\infty\,;\, g\in\mathcal{T}(\sigma,\mathcal{B})\}$ dicht in $L^\infty(E)$ liegt, genügt es die Isometrieeigenschaft auf $\hat{\mathcal{T}}$ nachzuweisen. Sei also $g \in \mathcal{T}(\sigma,\mathcal{B})$ beliebig. g hat eine Darstellung der Form

$$g = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{\delta_j}$$

mit paarweise verschiedenen $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ und paarweise disjunkten Mengen $\delta_j \in \mathcal{B}$. Offensichtlich gilt

$$E-\operatorname{ess\,ran}(g) = \{a_j\,;\, 1\le j\le n,\ E(a_j)\ne 0\}$$

und daher

$$\|g+\mathcal{N}_E^\infty\|_{L^\infty(E)} = E-\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\sigma}|g(z)| = \max\{|a_j|\,;\,1\le j\le n,\ E(a_j)\ne 0\} = |a_k|$$

für ein $k\in\{1,\dots,n\}$ mit $E(\delta_k)\ne 0$. Sei nun $x\in E(\delta_k)\mathcal{H}$ beliebig mit $\|x\|=1$. Dann folgt (wegen $E(\delta_k)x = x$ und $E(\delta_j)x = 0$ für $j\ne k$):

$$\|\tilde\Psi(g+\mathcal{N}_E^\infty)\| \ge \|\Psi(g)x\| = \Big(\int_\sigma |g(z)|^2\,d\langle E(z)x,x\rangle\Big)^{\frac12} = |a_k| = \|g+\mathcal{N}_E^\infty\|_{L^\infty(E)}\,.$$

Für alle $x\in\mathcal{H}$ mit $\|x\|\le 1$ folgt mit Pythagoras

$$\begin{aligned}\|\Psi(g)x\|^2 =& \Big\|\sum_{j=1}^n a_jE(\delta_j)x\Big\|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|\cdot\|E(\delta_j)x\|^2 \le |a_k|^2\sum_{j=1}^n\|E(\delta_j)x\|^2 \le |a_k|^2\|x\|^2\\ \le&(E-\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\sigma}|g(z)|)^2.\end{aligned}$$

Damit folgt auch $\|\tilde\Psi(g+\mathcal{N}_E^\infty)\| = \|\Psi(g)\| \le E-\operatorname{ess\,sup}_{z\in\sigma}|g(z)| = \|g+\mathcal{N}_E^\infty\|_{L^\infty(E)}$. □

23.25. Satz. *Sei $f:\sigma\to\mathbb{C}$ eine Borel-meßbare Funktion. Dann gilt $D_f = \mathcal{H}$ genau dann, wenn $f+\mathcal{N}_E \in L^\infty(E)$.*

Beweis. Ist $D_f = \mathcal{H}$, so ist $\Psi(f)\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. Sei wieder $\omega_n := \{z\in\sigma\,;\,|f(z)|\le n\}$. Mit Lemma 23.24 und Satz 23.23 folgt

$$\|f\chi_{\omega_n}+\mathcal{N}_E^\infty\|_{L^\infty(E)} = \|\Psi(f\chi_{\omega_n})\| = \|\Psi(f)\Psi(\chi_{\omega_n})\| \le \|\Psi(f)\|$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Dies ist nur möglich, wenn f wesentlich beschränkt ist. Die Umkehrung ist offensichtlich. □

23.26. Satz. *Seien σ und E wie vor und sei $f:\sigma\to\mathbb{C}$ eine Borel-meßbare Funktion.*

(a) *Ist* $\lambda \in E - \operatorname{ess\,ran}(f)$ *und* $E(f^{-1}(\lambda)) \neq 0$, *so ist* λ *ein Eigenwert von* $\Psi(f)$.

(b) *Ist* $\lambda \in E - \operatorname{ess\,ran}(f)$ *und* $E(f^{-1}(\lambda)) = 0$, *so ist* $\lambda - \Psi(f) : \mathcal{H} \supseteq D_f \to \mathcal{H}$ *injektiv mit dichtem Bild und es gibt eine Folge* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *in* D_f *mit* $\|x_n\| = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} \|(\lambda - \Psi(f))x_n\| = 0$.

(c) $\sigma(\Psi(f)) = \overline{E - \operatorname{ess\,ran}(f)}^{\hat{\mathbb{C}}}$.

Beweis. (a) Ist $E\left(f^{-1}(\{\lambda\})\right) \neq 0$, so gibt es ein $x_0 \in E\left(f^{-1}(\{\lambda\})\right)\mathcal{H}$ mit $\|x_0\| = 1$. Es folgt $(\lambda - f)\chi_{f^{-1}(\{\lambda\})} \equiv 0$ und daher nach Satz 23.23

$$0 = \Psi((\lambda - f)\chi_{f^{-1}(\{\lambda\})}) = (\lambda - \Psi(f))\Psi(\chi_{f^{-1}(\{\lambda\})}) = (\lambda - \Psi(f))E(f^{-1}(\{\lambda\})$$

also auch

$$(\lambda - \Psi(f))x_0 = (\lambda - \Psi(f))E\left(f^{-1}(\{\lambda\})\right)x_0 = 0.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\delta_n := \{z \in \sigma\,;\, |\lambda - f(z)| \geq 1/n\}$. Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt wegen der σ-Additivität von E in der starken Operatortopologie:

$$x = E(\sigma)x = E\left(f^{-1}(\{\lambda\})\right)x + E\Big(\bigcup_{n=1}^\infty \delta_n\Big)x = \lim_{n\to\infty} E(\delta_n)x\,. \tag{23.12}$$

Nach Satz 23.23 folgt

$$E(\delta_n)x = \Psi(\chi_{\delta_n})x = \Psi\Big((\lambda - f)\cdot\frac{\chi_{\delta_n}}{\lambda - f}\Big)x = (\lambda - \Psi(f))\Psi\Big(\frac{\chi_{\delta_n}}{\lambda - f}\Big)x\,.$$

Also liegt $\operatorname{ran}(\lambda - \Psi(f))$ dicht in $\mathcal{H}$.

Ist $x \in D_f$ mit $(\lambda - \Psi(f))x = 0$ so folgt mit Satz 23.23

$$E(\delta_n)x = \Psi(\chi_{\delta_n})x = \Psi\Big(\frac{\chi_{\delta_n}}{\lambda - f}\cdot(\lambda - f)\Big) = \Psi\Big(\frac{\chi_{\delta_n}}{\lambda - f}\Big)\Psi(\lambda - f)x = 0$$

und hieraus wegen (23.12):

$$x = E(\sigma)x = \lim_{n\to\infty} E(\delta_n)x = 0.$$

Damit ist die Injektivität von $\lambda - \Psi(f)$ gezeigt.

Wegen $\lambda \in E - \operatorname{ess\,ran}(f)$ gilt $E\left(f^{-1}\left(U_{1/n}(\lambda)\right)\right) \neq 0$ für alle Kreisscheiben $U_{1/n}(\lambda)$ um λ mit Radius $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Es gibt daher für alle $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n \in E\left(f^{-1}\left(U_{1/n}(\lambda)\right)\right)\mathcal{H}$ mit $\|x_n\| = 1$. Mit Satz 23.23 folgt

$$(\lambda - \Psi(f))x_n = \Psi(\lambda - f)E\left(f^{-1}\left(U_{1/n}(\lambda)\right)\right)x_n = \Psi\left((\lambda - f)\chi_{f^{-1}\left(U_{1/n}(\lambda)\right)}\right)x_n$$

und daher nach Lemma 22.3

$$\|(\lambda - \Psi(f))x_n\| \leq \left\|(\lambda - f)\chi_{f^{-1}\left(U_{1/n}(\lambda)\right)}\right\|_\sigma \|x_n\| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Insbesondere ist $(\lambda - \Psi(f))^{-1}$ ein dicht definierter aber unstetiger Operator und es folgt auch in diesem Fall $\lambda \in \sigma(\Psi(f), \mathcal{H})$.

(c) Wir haben bereits E–$\operatorname{ess\,ran}(f) \subseteq \sigma(\Psi(f), \mathcal{H})$ gezeigt. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}\backslash E$–$\operatorname{ess\,ran}(f)$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $E\left(f^{-1}(D(\lambda, r))\right) = 0$. Die Funktion $g : \sigma \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in f^{-1}(D(\lambda, r)) \\ \frac{1}{\lambda - f(z)} & \text{für } z \in \sigma \setminus f^{-1}(D(\lambda, r)) \end{cases}$$

erfüllt $fg - 1 \in \mathcal{N}_E$ und ist auf σ E-wesentlich beschränkt. Insbesondere ist $\Psi(g) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mit Satz 23.23 folgt

$$\Psi(g)(\lambda - \Psi(f)) \subseteq \Psi(g(\lambda - f)) = \Psi(1) = 1 = \Psi((\lambda - f)g) = (\lambda - \Psi(f))\Psi(g).$$

Der Operator $\lambda - \Psi(f)$ ist also injektiv und $(\lambda - \Psi(f))^{-1} = \Psi(g) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, d.h. es ist $\lambda \in \rho(\Psi(f), \mathcal{H})$. $\square$

23.27. Satz (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren). *Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter linearer Operator. Dann gibt es genau ein Spektralmaß*

$$E : \mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

mit $\langle E(\cdot)x, y\rangle \in \mathrm{rca}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und mit

(23.13)
$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} z\, d\langle E(z)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} z\, d\langle E(z)x, y\rangle \qquad \text{für alle } x \in D(T), y \in \mathcal{H}\,.$$

Es ist $E(\sigma(T, \mathcal{H})) = 1$ und $E(\{\infty\}) = 0$.

Beweis. Sei $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ die Cayley-Transformierte von T. Da U als unitärer Operator insbesondere normal ist, gibt es nach dem Spektralsatz 22.5 genau ein Spektralmaß

$$E_U : \mathcal{B}_U := \mathcal{B}(\sigma(U, \mathcal{H})) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

mit $\langle E_U(\cdot)x, y\rangle \in \mathrm{rca}(\sigma(U, \mathcal{H}))$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und mit

$$U = \int_{\sigma(U,\mathcal{H})} z\, dE_U\,. \tag{23.14}$$

Wegen der Injektivität von $1 - U$ (vergl. die Bemerkungen vor Definition 23.14) und $E_U(\{1\})\mathcal{H} = \ker(1 - U)$ ist $E_U(\sigma(U, \mathcal{H}) \cap \{1\}) = 0$. Die durch

$$f(z) := \begin{cases} i\frac{1+z}{1-z} & \text{für } 1 \neq z \in \sigma(U, \mathcal{H}) \\ 0 & \text{für } z \in \sigma(U, \mathcal{H}) \cap \{1\} \end{cases}$$

definierte Funktion ist auf $\sigma(U, \mathcal{H})$ Borel-meßbar. Sei $\Psi_U(f)$ zu E_U wie in Satz 23.23 (bezüglich E_U) definiert mit

$$\langle \Psi_U(f)x, y\rangle = \int_{\sigma(U,\mathcal{H})} f(z)\, d\langle E_U(z)x, y\rangle \qquad \text{für alle } x \in D_f, y \in \mathcal{H}\,.$$

Da f auf $\sigma(U, \mathcal{H}) \subseteq \mathbb{T}$ reellwertig ist, ist $\Psi_U(f)$ nach Satz 23.23 ein selbstadjungierter Operator. Wegen

$$f(z)(1 - z) = i(1 + z) \qquad \text{für alle } z \in \sigma(U, \mathcal{H})$$

und $E_U(\sigma(U, \mathcal{H}) \cap \{1\}) = 0$ folgt nach Satz 23.23 (c) und dem Spektralsatz für normale Operatoren:

$$\Psi_U(f)(1 - U) = i(1 + U)\,.$$

Nach Satz 23.13 gilt auch $T(1-U) = i(1+U)$ und $D(T) = \mathrm{ran}(1-U) \subseteq D_f = D(\Psi_U(f))$. $\Psi_U(f)$ ist daher eine selbstadjungierte Erweiterung von T. Da T nach Lemma 23.10 als selbstadjungierter Operator maximal symmetrisch ist, folgt $T = \Psi_U(f)$. Also gilt für alle $x \in D_f = D(T)$ und alle $y \in \mathcal{H}$

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\sigma(U,\mathcal{H})} f(z)\, d\langle E_U(z)x, y\rangle = \int_{\sigma(U,\mathcal{H})\setminus\{1\}} f(z)\, d\langle E_U(z)x, y\rangle.$$

Nach Satz 23.26 (c) ist

$$\sigma(T, \mathcal{H}) = \sigma(\Psi_U(f), \mathcal{H}) = \overline{E - \mathrm{ess\,ran}(f)}^{\hat{\mathbb{C}}} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Wir definieren nun für alle Borelmengen $\delta \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$E(\delta) := E_U\left(f^{-1}(\delta) \cap \sigma(U, \mathcal{H})\right)\,.$$

Insbesondere ist $E(\{\infty\}) = 0$. Dann ist $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Spektralmaß mit $\langle E(\cdot)x, y\rangle \in \operatorname{rca}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und es gilt für alle Treppenfunktionen

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\delta_j} \in \mathcal{T}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}),$$

daß ihr Integral bezüglich E die Darstellung

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} g\,dE &= \int_{\mathbb{R}} g\,dE = \sum_{j=1}^{n} a_j E(\delta_j) = \int_{\sigma(U,\mathcal{H})} \sum_{j=1}^{n} a_j E_U\left(f^{-1}(\delta_j) \cap \sigma(U,\mathcal{H})\right) \\ &= \int_{\sigma(U,\mathcal{H})} g \circ f\,dE_U\end{aligned}$$

besitzt. Für alle Borel-meßbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ und alle $x, y \in \mathcal{H}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} |g(w)|^2\,d\langle E(w)x, x\rangle < \infty \quad \text{oder} \quad \int_{\sigma(U,\mathcal{H})} |g(f(z))|^2\,d\langle E_U(z)x, x\rangle < \infty$$

folgt daher

$$\int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} g(w)\,d\langle E(w)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(w)\,d\langle E(w)x, y\rangle = \int_{\sigma(U,\mathcal{H})} g(f(z))\,d\langle E_U(z)x, y\rangle\,.$$

Insbesondere gilt für alle $x \in D(T) = D_f$ und alle $y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} w\,d\langle E(w)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} w\,d\langle E(w)x, y\rangle &= \int_{\sigma(U,\mathcal{H})} f(z)\,d\langle E_U(z)x, y\rangle \\ &= \langle \Psi_U(f)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle.\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\sigma(T,\mathcal{H}) = \sigma(\Psi_U(f),\mathcal{H}) = \overline{E - \operatorname{ess\,ran}(f)}^{\hat{\mathbb{C}}} = \overline{f(\sigma_U(U) \setminus \{1\})}^{\hat{\mathbb{C}}}$$

sowie für alle $\delta \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}E(\delta) &= E_U\left(f^{-1}(\delta) \cap \sigma(U,\mathcal{H})\right) = E_U\left((f^{-1}(\delta) \cap \sigma(U,\mathcal{H})) \setminus \{1\}\right) \\ &= E\left((\delta \cap \sigma(T,\mathcal{H})) \setminus \{\infty\}\right) = E(\delta \cap \sigma(T,\mathcal{H})).\end{aligned}$$

Insbesondere folgt für alle Borel-meßbaren Funktionen $g : \sigma(T,\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ und alle $x, y \in \mathcal{H}$ mit $\int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\})} |g(w)|^2\,d\langle E(w)x, x\rangle < \infty$:

$$\int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} g(w)\,d\langle E(w)x, y\rangle = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})\setminus\{\infty\}} g(w)\,d\langle E(w)x, y\rangle = \int_{\sigma(T,\mathcal{H})} g(w)\,d\langle E(w)x, y\rangle\,.$$

Ebenso, wie wir das Spektralmaß von T mittels des Spektralmaßes der Cayley-Transformierten U von T erhalten haben, können wir das Spektralmaß von U erhalten, in dem wir T als inverse Cayley–Transformierte von U auffassen. Da aber das Spektralmaß von U nach dem Spektralsatz für normale, stetige, lineare Operatoren eindeutig bestimmt ist erhält man so auch die Eindeutigkeitsaussage des Satzes. □

23.28. Satz. *Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator.*

(a) *Es gilt $\sigma(T,\mathcal{H}) \subseteq [0,\infty]$ genau dann, wenn für alle $x \in D(T)$ gilt $\langle Tx, x\rangle \geq 0$. Wir schreiben dann auch $T \geq 0$.*

(b) *Ist $T \geq 0$, so existiert genau ein selbstadjungierter Operator $S : \mathcal{H} \supseteq D(S) \to \mathcal{H}$ mit $S \geq 0$ und $S^2 = T$.*

BEWEIS. (a) als Übungsaufgabe 23.5.

(b)Sei $T \geq 0$ und sei $E : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ das Spektralmaß zu T gemäß Satz 23.27. Für die Funktion g mit

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } t \in [0, \infty) \\ 0 & \text{für } t \in (-\infty, 0) \cup \{\infty\} \end{cases}$$

gilt mit $D_g = \left\{x \in \mathcal{H}\,;\, \int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} |g(t)|^2\, d\langle E(t)x, x\rangle < \infty\right\}$: Es ist $D_g \cap D_{g^2} = D_{g^2}$ und daher nach Satz 23.23 und Satz 23.27

$$\langle \Psi(g)^2 x, y\rangle = \langle \Psi(g^2)x, y\rangle = \int_{[0,\infty)} t\, d\langle E(t)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} t\, d\langle E(t)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

für alle $x \in D(T) = D_{g^2} = D(\Psi(g)^2)$, $y \in \mathcal{H}$. Also gilt $T = \Psi(g^2) = \Psi(g)^2$. Wegen

$$\sigma(\Psi(g), \mathcal{H}) = \overline{E - \operatorname{ess\,ran}(g)} \subseteq [0, \infty]$$

ist $S := \Psi(g) \geq 0$.

Ist auch $R = R^* \geq 0$ mit $R^2 = T$ und bezeichnet E_R das zu R gehörige Spektralmaß, so definieren wir ein Spektralmaß $\tilde{E} : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ durch

$$\tilde{E}(\delta) := E_R(g(\delta)) \qquad \text{für alle } \delta \in \mathcal{B}\,.$$

Man rechnet nach, daß mit $\langle E_R(\cdot)x, y\rangle \in \operatorname{rca}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ auch $\langle \tilde{E}(\cdot)x, y\rangle \in \operatorname{rca}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ gilt. Für alle $x \in D(T) = D(R^2)$ und alle $y \in \mathcal{H}$ folgt

$$\langle Tx, y\rangle = \langle R^2 x, y\rangle = \int_{[0,\infty)} t^2\, d\langle E_R(t)x, y\rangle = \int_{[0,\infty)} s\, d\langle \tilde{E}(s)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} s\, d\langle \tilde{E}(s)x, y\rangle\,.$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Spektralsatz 23.27 folgt $E = \tilde{E}$. Da E_R durch $E_R((-\infty, 0) \cup \{\infty\}) = 0$ und $E(\delta) = \tilde{E}(\delta) = E_R(g(\delta))$ schon eindeutig bestimmt ist, ist R eindeutig bestimmt und es folgt $R = S$. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 23.

23.1. AUFGABE. Sei $U : \mathcal{H} \supseteq D(U) \to \mathcal{H}$ eine lineare Isometrie. Zeigen Sie: Ist einer der drei Räume $D(U)$, $\operatorname{ran} U$, $G(U)$ abgeschlossen, so gilt dies auch für die beiden anderen.

23.2. AUFGABE. Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter linearer Operator. Zeigen Sie:

(a) $\ker(T^*) = \operatorname{ran}(T)^\perp \cap D(T^*)$.
(b) Ist T abgeschlossen, so gilt $\ker(T) = \operatorname{ran}(T^*)^\perp \cap D(T)$.

23.3. AUFGABE. Sei H^2 der in Aufgabe 1.11 eingeführte Hardy-Raum auf der Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ und S der Shiftoperator, also

$$S : H^2 \longrightarrow H^2, \qquad (Sf)(z) := zf(z).$$

Zeigen Sie, daß S die Cayley-Transformierte des symmetrischen Operators

$$T : H^2 \supseteq D(T) \longrightarrow H^2, \qquad (Tf)(z) := i\frac{1+z}{1-z}f(z)$$

ist. T ist maximal symmetrisch, besitzt aber keine selbstadjungierte Erweiterung.

23.4. AUFGABE. Der Operator V sei auf H^2 definiert als $(Vf)(z) := zf(z^2)$. Zeigen Sie, daß V eine Isometrie ist, welche die Cayley-Transformation eines abgeschlossenen symmetrischen Operators auf H^2 ist, dessen Defektindizes 0 und ∞ sind.

23.5. Aufgabe. Zeigen Sie: Für einen selbstadjungierten, linearen Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ gilt $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in D(T)$ genau dann, wenn $\sigma(T) \subseteq [0, \infty]$.

23.6. Aufgabe. Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener linearer Operator mit nicht leerer Resolventenmenge $\rho(T) := \hat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(T)$. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \rho(T)$, so gilt

$$\sigma((\lambda - T)^{-1}) = \{1/(\lambda - z)\,;\, z \in \sigma(T)\}.$$

23.7. Aufgabe. Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, linearer Operator.

(a) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $(z - T)^{-1}$ ein normaler Operator.
(b) Berechnen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ das Spektralmaß von $(z - T)^{-1}$.

Literaturverzeichnis

[1] Albrecht, Ernst, Funktionentheorie, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, SS 2007.
[2] Albrecht, Ernst, Topologie, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, SS 2007.
[3] Arens, Richard, Dense inverse limit rings, *Michigan Math. J.* **5** (1958), 169–182.
[4] Alt, H.W., *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, Berlin Heidelberg New York 1985.
[5] Bourbaki, Nicolas, *Topologie générale*, Chapitre II, Hermann, Paris 1960.
[6] Conway, John B., *A Course in Functional Analysis*, Springer, Berlin 1996.
[7] Dobrowolski, Manfred, *Angewandte Funktionalanalysis*, Springer, Berlin Heidelberg 2005.
[8] Dunford, Nelson and Schwartz,Jack T., *Linear Operators I: General Theory*, Wiley-Interscience, New York 1958.
[9] Dunford, Nelson and Schwartz,Jack T., *Linear Operators II:Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, Wiley-Interscience, New York 1963.
[10] Dunford, Nelson and Schwartz,Jack T., *Linear Operators III: Spectral Operators*, Wiley-Interscience, New York 1971.
[11] Grothendieck, Alexander, *Topological Vector Spaces* Gordon and Breach, New York-London-Paris 1973.
[12] Heuser, Harro, *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart 1986.
[13] Jarchow, Hans, *Locally Convex Spaces* Teubner, Stuttgart 1981.
[14] Kaballo, Winfried, *Einführung in die Analysis II*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford 1997.
[15] Kamke *Mengenlehre*, Sammlung Göschen **999/999a**, Walter deGuyter & Co, Berlin 1962.
[16] Köthe, Gottfried, *Topological Vector Spaces I*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1969.
[17] Köthe, Gottfried, *Topological Vector Spaces II*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1979.
[18] Mathieu, Martin, *Funktionalanalysis*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford.
[19] Meise, Reinhold und Vogt, Dietmar, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg,
[20] Rudin, Walter, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill 1970.
[21] Rudin, Walter, *Functional Analysis*, McGraw-Hill 1973.
[22] Schaeaefer, Helmut H., *Topological Vector Spaces*, Springer 1971.
[23] Schröder, Herbert, *Funktionalanalysis*, Akademieverlag, Berlin 1997.
[24] Werner, Dirk, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 2002.
[25] Yosida, Kôsaku, *Functional Analysis*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1995.

Index