



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II
Sommersemester 2009

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 30.04.2009, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

(4+4=8 Punkte)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1. Zeigen Sie:

- (a) Für alle $x, y \in \mathfrak{A}$ mit $xy = yx$ gilt $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.
- (b) Für alle $a, b, c \in \mathfrak{A}$ gilt $\exp(a)b\exp(c) = \exp(L_a + R_c)(b)$. Hierbei sind $L_a, R_c \in \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ definiert durch

$$L_a(x) = ax \quad \text{und} \quad R_c(x) = xc \quad (x \in \mathfrak{A}).$$

Aufgabe 2

(10 Punkte)

Sei $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ eine C^* -Algebra. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathfrak{A}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $x = x^*$, d. h. x ist hermitesch.
 - (ii) $\|\exp(itx)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
 - (iii) $\|\exp(itx)\| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
-

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Seien $(\mathfrak{A}_1, \|\cdot\|_1), (\mathfrak{A}_2, \|\cdot\|_2)$ zwei C^* -Algebren mit Einselementen $1_{\mathfrak{A}_1}, 1_{\mathfrak{A}_2}$ und sei $\Phi : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$ ein $*$ -Homomorphismus mit $\Phi(1_{\mathfrak{A}_1}) = 1_{\mathfrak{A}_2}$. Zeigen Sie, dass Φ dann stetig ist mit $\|\Phi\| = 1$.

Aufgabe 4

(5+4+3+4*=12+4* Punkte)

Die Diskalgebra ist definiert als

$$A(\mathbb{D}) := \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) : f|_{\mathbb{D}} \text{ ist holomorph}\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass durch

$$\|f\|_{A(\mathbb{D})} := \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{T}\}$$

eine Norm auf $A(\mathbb{D})$ gegeben ist und dass $A(\mathbb{D})$ damit eine Banachalgebra wird.

- (b) Berechnen Sie für $f \in A(\mathbb{D})$ das Spektrum $\sigma(f)$ von f in $A(\mathbb{D})$.
 - (c) Zeigen Sie, dass $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ eine isometrische Involution auf $A(\mathbb{D})$ definiert.
 - (d)* Zeigen Sie, dass $A(\mathbb{D})$ mit dieser Involution keine C^* -Algebra ist.
-

Bitte wenden!

Allgemeine Informationen

- Punkte aus *-Aufgaben tragen nicht zur maximal erreichbaren Punktzahl bei, werden jedoch, wenn Sie eine solche bearbeiten, wie Punkte aus normalen Aufgaben gewertet. Auf diesem Blatt sind also 40 Punkte = 100%, aber Sie können 44 Punkte erreichen.
- Um für diese Veranstaltung einen Leistungsnachweis zu erwerben, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

(i) erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb, d.h

- durchgehende Anwesenheit in den Übungsgruppen; es besteht also Anwesenheitspflicht (außer in begründeten Ausnahmefällen),
- ernsthafte Bearbeitung von mindestens 75 % der Übungsaufgaben,
- mindestens 50 % der möglichen Übungspunkte,
- aktive Mitarbeit in den Übungsgruppen; d.h. Vorstellung der von Ihnen erarbeiteten Lösungen,

und (ii) Bestehen einer mündlichen Prüfung.

Das Bestehen einer mündlichen Prüfung alleine - ohne erfolgreiche Teilnahme an den Übungen - berechtigt **nicht** zum Erwerb eines Leistungsnachweises!

- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss09/fa2/uebungen.html