



Übungen zur Vorlesung Geometrische Funktionentheorie (SS 2009)
Blatt 1

Für $0 \neq a \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ sei $\phi_a : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$\phi_a(z) := \begin{cases} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \\ -\frac{1}{\bar{a}} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Ferner definieren wir $\phi_0 := \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$. Aus der Funktionentheorievorlesung ist bekannt:

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{e^{it}\phi_a|_{\mathbb{D}}; a \in \mathbb{D}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$ genau eine der folgenden vier Aussagen gilt:

- (a) $e^{it}\phi_a = \text{id}$.
- (b) $e^{it}\phi_a$ hat genau zwei Fixpunkte w_a, w_i mit $w_a \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$, $w_i \in \mathbb{D}$. Der zugehörige Automorphismus heißt dann *elliptisch*.
- (c) $e^{it}\phi_a$ hat zwei verschiedene Fixpunkte $w_1, w_2 \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Der zugehörige Automorphismus heißt dann *hyperbolisch*.
- (d) $e^{it}\phi_a$ hat genau einen (doppelten) Fixpunkt w_0 und dieser liegt in $\mathbb{T}$. Der zugehörige Automorphismus heißt dann *parabolisch*.

Zeigen Sie weiter: Ist im Fall (b) $w_i \neq 0$, so ist $w_a \neq \infty$ und $|w_i w_a| = 1$.

Aufgabe 2. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ sei

$$k_\theta(z) := \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^2}$$

- (a) Geben Sie die Potenzreihenentwicklung von k_θ um den Entwicklungspunkt 0 an.
- (b) Berechnen Sie $k_\theta(\frac{1}{ze^{2i\theta}})$ für $0 \neq z \in \mathbb{C}$.
- (c) Zeigen Sie, dass k_θ auf $\mathbb{D}$ schlicht ist.
- (d) Berechnen Sie $k_\theta(\mathbb{D})$.

Aufgabe* 3. Gegeben seien die gebrochen linearen Transformationen ψ_1, ψ_2, ψ_3 auf $\mathbb{D}$ mit

$$\psi_1(z) := e^{2009i}z, \quad \psi_2(z) = \frac{(1+i)z-i}{iz+1-i}, \quad \psi_3(z) = \frac{2z+1}{2+z}.$$

- (a) Zeigen Sie $\psi_2, \psi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.
- (b) Klassifizieren Sie die Automorphismen ψ_1, ψ_2, ψ_3 gemäß Aufgabe 1.

Abgabetermin: Mittwoch, 29.04.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

<http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/geom-ft/uebungen.html>

Informationen zum Erwerb eines Leistungsnachweises

Sie können zu dieser Vorlesung einen (benoteten) Leistungsnachweis erwerben. Die Voraussetzungen hierfür sind:

- (a) **erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb**, d.h.
 - **ernsthafte** Bearbeitung von mindestens 60 % der gestellten Übungsaufgaben,
 - **mindestens** 40 % aller erreichbaren Punkte,
 - aktive Mitarbeit in der Übungsgruppe,**und**
- (b) **Bestehen der mündlichen Prüfung am Ende des Semesters.**