UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Geometrische Funktionentheorie (SS 2009)
Blatt 3

Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge, die aus mehr als einem Punkt besteht und deren Komplement in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ einfach zusammenhängend ist. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es genau eine biholomorphe Abbildung Ψ von $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit $\Psi(\infty) = \infty$ und $\Psi'(\infty) = \lim_{z \to \infty} \Psi'(z) > 0$. Die Funktion Ψ hat dann in einer punktierten Umgebung von ∞ eine Laurententwicklung

$$\Psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{1} a_n z^n.$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$z \mapsto \frac{z\Psi'(z)}{\Psi(z) - w}$$

für alle $w \in K$ in einer Umgebung von ∞ holomorph ist und in ∞ den Wert 1 annimmt. Daher hat diese Funktion in einer Umgebung von ∞ eine Darstellung der Form

$$\frac{z\Psi'(z)}{\Psi(z) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(w) z^{-n}.$$

Zeigen Sie weiter, dass die hierdurch definierten Funktionen $w \mapsto p_n(w)$ Polynome vom Grad n sind ($n \in \mathbb{N}_0$).

Aufgabe 2. Sei nun speziell $K := [-1, 1]$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Funktion Ψ die Darstellung

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

besitzt, und geben sie die inverse Abbildung

$$\Psi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1] \to \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

an.

Aufgabe* 3. Geben Sie in der Situation $K = [-1, 1]$ eine Rekursionsformel für die in Aufgabe 1 gefundene Folge von Polynomen an und berechnen Sie $p_0, \ldots, p_5$.

Abgabetermin: Mittwoch, 13.05.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/geom-ft/uebungen.html`