UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Geometrische Funktionentheorie (SS 2009)
Blatt 4

Aufgabe 1. Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit Potenzreihendarstellungen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \qquad (z \in \mathbb{D})$$

und sei g schlicht sowie $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$. Zeigen Sie, dass dann $|a_1| \leq |b_1|$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Schwartz.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Ist in der Situation von Aufgabe 1 zusätzlich die Menge $g(\mathbb{D})$ konvex, so gilt sogar $|a_m| \leq |b_1|$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Für festes $m \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ die m-ten Einheitswurzeln. Ist $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, so definieren wir

$$h(z) := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k r e^{i\theta/m}).$$

Zeigen Sie nun, dass die so definierte Funktion $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{D}$ holomorph ist. Wie lautet die Potenzreihendarstellung von h?

Aufgabe* 3. Sei g wie in Aufgabe 2 mit zusätzlich $b_1 = 1$. Zeigen Sie

$$|b_n| \leq 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und zeigen Sie, dass diese Ungleichungen scharf sind, indem Sie ein Beispiel einer Funktion g angeben, die den genannten Forderungen genügt und für die $|b_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Abgabetermin: Mittwoch, 20.05.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/geom-ft/uebungen.html`