



Übungen zur Vorlesung Geometrische Funktionentheorie (SS 2009)  
Blatt 5

**Aufgabe 1.** Sei  $f \in \mathcal{S}$  und sei  $f(\mathbb{D})$  konvex. Für  $\theta \in \mathbb{R}$  sei die Funktion  $f_\theta$  definiert durch  $f_\theta(z) := -e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $\theta \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $f_\theta \in \mathcal{S}$  und mit konvexem Bild  $f_\theta(\mathbb{D})$  und für alle  $r > 0$  ist  $U_r(0) \subseteq f_\theta(\mathbb{D})$  genau dann, wenn  $U_r(0) \subseteq f(\mathbb{D})$ .  
(b) Sei  $w_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$  mit  $r = \min\{|w|; w \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})\}$ . Dann gilt  $f_\theta(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{H}_{-r} := \{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} w \geq -r\}$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $f$  wie in Aufgabe 1 und sei  $r > 0$  wie in Aufgabe 1 (b). Die Funktion  $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  sei definiert durch

$$g(z) := \frac{2rz}{1-z}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Zeigen Sie:

- (a)  $g(\mathbb{D}) = \mathbb{H}_{-r}$ .  
(b)  $U_{1/2}(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1/2\} \subseteq f(\mathbb{D})$ .

Mit Hilfe dieser Aufgabe und der Resultate aus Blatt 4 kann man folgende Variante des Satzes 1.4 der Vorlesung zeigen (mit einem analogen Beweis):

**Satz.** Sei  $f \in \mathcal{S}$  mit konvexem Bildbereich  $f(\mathbb{D})$  und sei  $0 < r < 1$ . Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = r$ :

- (a)  $\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$ .  
(b)  $\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$ .  
(c)  $\frac{1}{r(1+r)} \leq \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{1}{r(1-r)}$ .

Diese Ungleichungen sind scharf: Gleichheit tritt auf für die Funktion  $f: z \mapsto \frac{z}{1-z}$  in den Punkten  $z = \pm r$ .

**Aufgabe\* 3.** Sei  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$  mit einer Potenzreihendarstellung der Form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Zeigen Sie:

- (a) Gilt  $f(\mathbb{D}) \cap \mathbb{R} = f(\mathbb{D} \cap \mathbb{R})$ , so ist  $a_n \in \mathbb{R}$  und  $|a_n| \leq n$  für alle  $n \geq 2$ . (Betrachten Sie hierzu  $\operatorname{Im} f(re^{i\theta})$  für  $0 < r < 1$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ).  
(b) Ist  $f \in \mathcal{S}$  mit reellen Koeffizienten, so gilt  $|a_n| \leq n$  für alle  $n \geq 2$ .

**Abgabetermin: Mittwoch, 27.05.2009, vor der Vorlesung.**

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

<http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/geom-ft/uebungen.html>