UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Geometrische Funktionentheorie (SS 2009)
Blatt 5

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathcal{S}$ und sei $f(\mathbb{D})$ konvex. Für $\theta \in \mathbb{R}$ sei die Funktion f_θ definiert durch $f_\theta(z) := -e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\theta \in \mathbb{R}$, so ist auch $f_\theta \in \mathcal{S}$ und mit konvexem Bild $f_\theta(\mathbb{D})$ und für alle $r > 0$ ist $U_r(0) \subseteq f_\theta(\mathbb{D})$ genau dann, wenn $U_r(0) \subseteq f(\mathbb{D})$.

(b) Sei $w_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$ mit $r = \min\{|w|\,;\, w \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})\}$. Dann gilt

$$f_\theta(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{H}_{-r} := \{w \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Re} w \geq -r\}.$$

Aufgabe 2. Sei f wie in Aufgabe 1 und sei $r > 0$ wie in Aufgabe 1 (b). Die Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$g(z) := \frac{2rz}{1-z}, \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Zeigen Sie:

(a) $g(\mathbb{D}) = \mathbb{H}_{-r}$.

(b) $U_{1/2}(0) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1/2\} \subseteq f(\mathbb{D})$.

Mit Hilfe dieser Aufgabe und der Resultate aus Blatt 4 kann man folgende Variante des Satzes 1.4 der Vorlesung zeigen (mit einem analogen Beweis):

Satz. *Sei $f \in \mathcal{S}$ mit konvexem Bildbereich $f(\mathbb{D})$ und sei $0 < r < 1$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$:*

(a) $\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$.

(b) $\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$.

(c) $\frac{1}{r(1+r)} \leq \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{1}{r(1-r)}$.

Diese Ungleichungen sind scharf: Gleichheit tritt auf für die Funktion $f : z \mapsto \frac{z}{1-z}$ in den Punkten $z = \pm r$.

Aufgabe* 3. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit einer Potenzreihendarstellung der Form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Zeigen Sie:

(a) Gilt $f(\mathbb{D}) \cap \mathbb{R} = f(\mathbb{D} \cap \mathbb{R})$, so ist $a_n \in \mathbb{R}$ und $|a_n| \leq n$ für alle $n \geq 2$. (Betrachten Sie hierzu $\operatorname{Im} f(re^{i\theta})$ für $0 < r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$).

(b) Ist $f \in \mathcal{S}$ mit reellen Koeffizienten, so gilt $|a_n| \leq n$ für alle $n \geq 2$.

Abgabetermin: Mittwoch, 27.05.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/geom-ft/uebungen.html`