



Übungen zur Vorlesung
Geometrische Funktionentheorie (SS 2009)
Blatt 12

Auf diesem Übungsblatt sei $f : \mathbb{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Für alle $t \geq 0$ ist $f(\cdot, t) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf $\mathbb{D}$ schlichte holomorphe Funktion.
- (b) Für alle $t \geq 0$ gilt $f(0, t) = 0$ und $f'(0, t) = e^t$.
- (c) Für alle $s, t \geq 0$ mit $s < t$ gilt $f(\mathbb{D}, s) \subseteq f(\mathbb{D}, t)$.
- (d) Für alle $z \in \mathbb{D}$ ist die Funktionen $f(z, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $t \geq 0$ die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

- (a) $e^t \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z, t)| \leq e^t \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}.$
- (b) $e^t \frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z, t)| \leq e^t \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}.$

Was können Sie über f aussagen, wenn in einer der Ungleichungen in (a) oder (b) das Gleichheitszeichen steht?

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

- (a) Für alle $T > 0$ ist die Menge $\{f(\cdot, t); 0 \leq t \leq T\}$ relativkompakt in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$.
- (b) f ist eine Loewner-Kette.

Aufgabe* 3. Sei $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv und stetig mit $0 \notin \gamma([0, \infty))$ und $\gamma(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Für $t \geq 0$ setzen wir

$$G_t := \mathbb{C} \setminus \gamma([t, \infty)).$$

Zeigen Sie, dass für die Familie $(G_t)_{t \geq 0}$ die Voraussetzungen (a)-(c) zu Satz 4.13 der Vorlesung erfüllt sind.

Abgabetermin: Mittwoch, 15.07.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
<http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/geom-ft/uebungen.html>