UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung
Geometrische Funktionentheorie (SS 2009)
Blatt 12

Auf diesem Übungsblatt sei $f : \mathbb{D} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $t \geq 0$ ist $f(\cdot, t) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine auf $\mathbb{D}$ schlichte holomorphe Funktion.
(b) Für alle $t \geq 0$ gilt $f(0, t) = 0$ und $f'(0, t) = e^t$.
(c) Für alle $s, t \geq 0$ mit $s < t$ gilt $f(\mathbb{D}, s) \subseteq f(\mathbb{D}, t)$.
(d) Für alle $z \in \mathbb{D}$ ist die Funktionen $f(z, \cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stetig.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $t \geq 0$ die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

(a) $e^t \dfrac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z, t)| \leq e^t \dfrac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$.

(b) $e^t \dfrac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z, t)| \leq e^t \dfrac{|z|}{(1 - |z|)^2}$.

Was können Sie über f aussagen, wenn in einer der Ungleichungen in (a) oder (b) das Gleichheitszeichen steht?

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Für alle $T > 0$ ist die Menge $\{f(\cdot, t)\,;\, 0 \leq t \leq T\}$ relativkompakt in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$.
(b) f ist eine Loewner-Kette.

Aufgabe* 3. Sei $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ injektiv und stetig mit $0 \notin \gamma([0, \infty))$ und $\gamma(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Für $t \geq 0$ setzen wir

$$G_t := \mathbb{C} \setminus \gamma([t, \infty)).$$

Zeigen Sie, dass für die Familie $(G_t)_{t \geq 0}$ die Voraussetzungen (a)-(c) zu Satz 4.13 der Vorlesung erfüllt sind.

Abgabetermin: Mittwoch, 15.07.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/geom-ft/uebungen.html`